

영구자석을 사용한 모터의 코깅토크에 관한 이론적 해석

고 흥 석* · 김 광 준**
(1999년 10월 11일 접수)

Analytical Analysis of Cogging Torque in Motors of Permanent Magnetic Type

Hong-Seok Ko and Kwang-Joon Kim

Key Words : Cogging Torque(코깅토크), Permanent Magnet(영구자석), Maxwell Stress Tensor,(맥스웰 응력 텐서), Flux Density(자속밀도), Electric Machine(전기기계)

Abstract

One of the principal sources of vibration and noise in permanent magnetic machines is cogging torque, which is induced by interaction between the rotor poles and the stator teeth. For its analysis, using finite element analysis is very time consuming and the calculation of performance factors is extremely sensitive to the discretization. Especially, Maxwell stress tensor method is sensitive to the location of integral path. In this paper, a cogging permeance function is defined and replaced by the straight line. And it is assumed that the flux density acting on the stator's tooth side is the equal to the flux density of the slot area. Using this definition and assumption, analytical calculation of cogging torque is presented and validated. And several reduction method is introduced.

기호설명

σ : 응력	B : 자기밀도
μ_0 : 공극 투자율	F : 기자력
Λ : 퍼미언스	h_m : 영구자석 길이
μ_r : 상대 투자율	g_a : 공극길이
$2p$: 극 수	R_s : 고정자 반경
R_m : 영구자석 반경	R_r : 회전자 반경
α_p : 자석 비	w_s : 슬롯 각
τ_s : 슬롯 피치	

1. 서론

일반적으로 영구 자석을 사용하는 모터의 소음, 진동원은 전류의 공급에 의하여 발생하는 전기적 토크의 변동성분, 회전자와 고정자 사이의 반경

방향의 힘, 그리고 코깅토크 등이 언급되어 지고 있다.⁽¹⁾ 전기적 토크의 변동성분은 정현파의 전류를 사용하는 등의 공급 전류의 파형의 변화로 충분히 저감시킬 수 있다. 또한 영구자석을 이용한 모터에서는 반경방향의 힘이 비교적 작아 유도전동기에서처럼 가장 중요한 소음, 진동원이라고 볼 수 없다. 반면 주요 소음, 진동원이 코깅토크라는 것은 여러 문헌에서 언급되어 지고 있다.⁽²⁾ 코깅토크는 영구자석을 사용하는 모터에서 슬롯 등의 영향으로 공극이 일정하지 않을 경우에 발생하고, 부하의 상태와는 관계없이 오직 공극의 형상과 영구 자석과 관계되는 힘이다.⁽³⁾ 이 토크의 변동성분은 회전속도의 변동성분을 발생시킬 뿐만 아니라, 소음, 진동을 유발하게 된다. 일반적으로 코깅토크를 구하기 위하여 많이 사용되는 방법이 유한요소법이다. 구체적으로는 맥스웰 응력 텐서를 이용한 방법, 가상 일을 이용한 방법, 저장된 에너지의 변화를 이용하는 방법 등 여러 가지 방법들이 있다. 그러나 기본적으로 유한요소법을 사용하기 위해서는 요소의 크기를 충분히 작게 하여야 한다. 또한 각 회전자의 위치에 따라 해석을 수행하여야 함으로 많은 계산 시간과 노력을 필

* 한국과학기술원, 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원, 기계공학과

E-mail : kjkim@mail.kaist.ac.kr
TEL: (042)869-3024 FAX : (042)869-8220

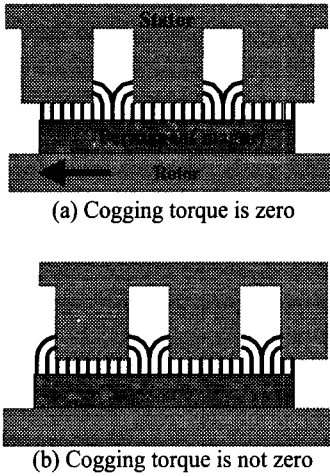


Fig. 1 Cogging torque production

요로 한다. 그리고 맥스웰 응력 텐서를 이용할 경우 적분경로에 따라 값이 달라지는 경향이 있으므로 적분 경로의 선정에도 유의 하여야 한다.⁽⁴⁻⁶⁾ 더욱 유한요소법은 코깅토크의 정량적 판단에는 좋으나, 정성적 분석과 이를 바탕으로 한 코깅토크 저감 방법 연구에는 적당하지 않다. 본 논문에서는 소음, 진동원 인 코깅토크를 이론적으로 구하고 이것을 적용하여 코깅토크 저감 방법을 살펴보고자 한다.

2. 코깅토크의 이론적 해석

코깅토크는 영구자석이 안정위치(aligned or detent position)에서 벗어남으로써 안정 위치로 복귀하려는 힘에 의하여 코깅토크는 발생한다. 즉 자속은 리럭턴스(reluctance)가 최소가 되는 경로를 택하려는 경향이 있으므로 발생하는 것이다. 이 힘은 고정자 이(teeth)의 양쪽 측면에 작용하는 자속에 의하여 발생하게 된다고 가정한다. 즉 고정자 이(teeth)의 측면에 작용하는 자속이 Fig. 1(a)의 경우와 같이 균형을 이룰 경우 코깅토크는 발생하지 않으나, Fig. 1(b)의 경우 측면 자속의 불균형이 발생하면 코깅토크가 발생하게 되는 것이다. 그러므로 본 논문에서 코깅토크를 규명하기 위하여 고정자의 이의 측면 자속에 관심을 두기로 하겠다.

이론적 해석을 위하여 자기장의 2차원 선형해석에 수반되는 가정을 한다.

- a) 고정자나 회전자에의 투자율은 무한대이다
 - b) 자기 포화 현상은 무시한다.
 - c) 양 끝단효과(end effect)는 무시한다.
- 고정자나 회전자로 주로 사용되는 재료의 상대투자율은 1000~5000 정도이다. 이 가정을 통하여 자

속은 고정자와 공극의 경계면에 수직인 성분만이 존재하게 되고, 자기 포화 현상을 무시함으로써 선형화된 방정식을 얻을 수 있다. 또한 끝단효과를 무시함으로써 코깅토크를 2차원 해석으로 구할 수 있는 것이다. 이와 같은 가정하에 자속밀도를 구하면 맥스웰 응력 텐서(식 (1))에 의하여 고정자 이(teeth)에 작용하는 응력 분포를 구할 수 있다.

$$\sigma_{stator} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1)$$

이 경우 모터의 축방향 두께를 l 이라 하면, 토크는 이의 측면에 작용하는 응력에 의하여 발생하므로 식 (2)를 사용하여 구할 수 있다.

$$T_{toothside} = \int \sigma_{stator} l(R_s + r) dr \quad (2)$$

$$T_{co} = T_{right} - T_{left} \quad (3)$$

결국 코깅토크는 이의 좌우 측면에 작용하는 토크의 차로 구할 수 있다(식 (3)). 안정위치에서는 이 두 토크의 차가 영이 되어 코깅토크가 발생하지 않는 것이다.

2.1 기자력

자속밀도는 식 (4)에 의하여 기자력(magnetic motive force)과 퍼미언스(permeance)의 곱으로 구할 수 있다.

$$B = F\Lambda \quad (4)$$

슬롯이 없는 경우 공극은 $g = g_a + h_m / \mu_r$ 과 같이 정의 할 수 있다. 즉 자석표면과 고정자의 내측원과의 거리에 자석의 리럭턴스에 해당하는 공극을 더하여 공극을 표현할 수 있다. 이경우 기자력은 공극이 일정하다는 가정하에 유도된 자속 밀도로부터 구할 수 있다.

$$F = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} 2M_n g \frac{np}{(np)^2 - 1} \left(\frac{R_r}{R_m} \right)^{np-1} T_n \cos np\theta \quad (5)$$

$$\text{여기서 } M_n = 2 \left(\frac{B_r}{\mu_0} \right) \alpha_p \frac{\sin(n\pi\alpha_p / 2)}{(n\pi\alpha_p) / 2}$$

$$T_n = \frac{(np-1)R_m^{2np} + 2R_r^{np+1}R_m^{np-1} - (np+1)R_r^{2np}}{(\mu_r + 1)[R_s^{2np} - R_r^{2np}] - (\mu_r - 1)\left[R_m^{2np} - R_s^{2np} \left(\frac{R_r}{R_m} \right)^{2np} \right]}$$

이 때의 자속 밀도는 모터에 관한 맥스웰 방정식으로부터 유도된 포아송방정식(Poisson equation)을 극좌표계에서 푸리에 전개를 이용하여 구할 수 있

다. 이때의 기자력은 식 (5)로 얻을 수 있다.^(3, 7, 8)

2.2 코깅퍼미언스

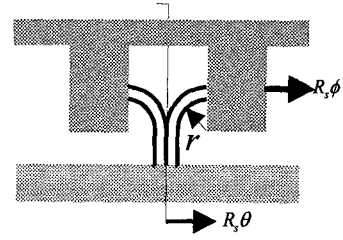
전술하였듯이 코깅토크에 영향을 미치는 구간은 슬롯 구간이고 이의 끝 단 영역은 코깅토크에 기여하지 않는다. 그러므로 코깅토크에 관계된 슬롯 구간에 해당하는 퍼미언스를 코깅퍼미언스로 정의하겠다. 코깅토크는 자속밀도의 제곱에 관계가 있으므로 슬롯의 중심을 기준으로 왼쪽은 양의 토크를 발생시키고 오른쪽은 음의 토크를 발생시키게 된다. 코깅퍼미언스 역시 두 부분으로 나누어 계산을 수행한 후 최종적으로 식 (3)에 의하여 코깅토크를 구하면 된다. 코깅퍼미언스를 구하기 위하여 가장 근간이 되는 가정은 슬롯 구간에서의 자속의 경로는 고정자 이(teeth) 끝의 모서리를 중심으로 사분원의 경로를 가지고 형성된다는 것이다⁽⁹⁾(Fig. 2 (a)). 그러므로 슬롯 구간의 퍼미언스는 자속의 경로가 2.1 절에서 정의된 공극에 사분원 경로를 더한 값이 되므로 식 (6)으로 정의 할 수 있다.

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{g + \frac{\pi}{2}r} \quad (6)$$

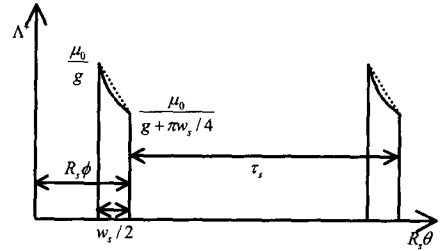
이것을 토크에 기여하는 방향에 따라 양과 음으로 나누어 그려보면 Fig. 2 와 같다. Fig. 2 의 (b), (c)는 슬롯의 중심에 영구자석의 중심이 오는 기준위치(Fig. 2 (a))에서 고정자를 ϕ 만큼 회전하였을 때, 즉 회전자 대신 고정자가 회전한다고 생각하고 고정자의 특정위치 $R_s\phi$ 에서 θ 의 함수로 코깅퍼미

$$\begin{aligned} \Lambda^+ &= \frac{8gw_s + \pi w_s^2}{16g^2\tau_s + 4g\pi\tau_s w_s} \\ &+ \sum_{n=1,2,3,\Delta} \frac{1}{gn^2\pi(4g + \pi w_s)} \left[\tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi - w_s/2))}{\tau_s}\right) \right. \\ &- \tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - R_s\phi)}{\tau_s}\right) + (4gn + n\pi w_s) \\ &\times \sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi - w_s/2))}{\tau_s}\right) - 4gn \sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - R_s\phi)}{\tau_s}\right) \left. \right] \quad (7) \end{aligned}$$

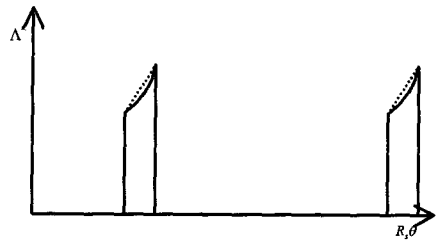
$$\begin{aligned} \Lambda^- &= \frac{8gw_s + \pi w_s^2}{16g^2\tau_s + 4g\pi\tau_s w_s} \\ &+ \sum_{n=1,2,3,\Delta} \frac{1}{gn^2\pi(4g + \pi w_s)} \left[\tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi + w_s/2))}{\tau_s}\right) \right. \\ &- \tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - R_s\phi)}{\tau_s}\right) - (4gn + n\pi w_s) \\ &\sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi + w_s/2))}{\tau_s}\right) + 4gn \sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - R_s\phi)}{\tau_s}\right) \left. \right] \quad (8) \end{aligned}$$



(a) Origin of cogging permeance function



(b) Positive cogging permeance function



(c) Negative cogging permeance function

Fig. 2 Cogging permeance function

언스를 푸리에 전개(Fourier expansion)를 이용하여 수식화 한다.

이때 식 (6)으로 정의된 코깅퍼미언스를 푸리에 전개시켜 사용하는 데는 한계가 있으므로, Fig. 2의 (b)와 (c)의 점선으로 표현한 직선으로 근사화시켜 수식화 한다(식 (7), (8)). 이 경우 코깅퍼미언스의 오차는 최대 2.3%이다.

2.3 코깅토크

슬롯이 존재 할 경우의 R_s 에서 자속 밀도는 식 (4)를 이용하여 구할 수 있다. 이의 측면에 작용하는 자속밀도는 슬롯구간에서 작용하는 반경방향의 자속밀도와 같다고 가정하였다.⁽⁵⁾ 그러면 식 (2)를 이용하여 코깅토크를 구할 수 있다. 여기서 r 은 역시 θ 와 ϕ 의 함수이므로 이것을 푸리에 전개를 이용하여 표현 하면 식 (9)와 같다. 다시 정리하면 식 (5), (7), (8)로 자속 밀도를 구하고 식 (1)을 이용하여 고정자 이(teeth)의 측면 응력을 구하여

Table 1 Physical data of prototype motor

R_s	73.27mm
R_m	71.97mm
R_r	62.87mm
$2p$	12
Slot number	9
B_r	0.56T
μ_r	1.26
w_s	3°
l	95mm

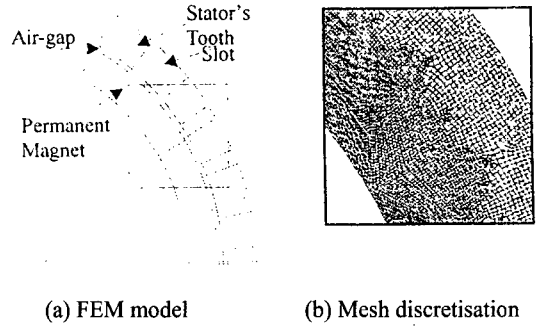


Fig. 3 FEM model and mesh discretisation

$$\begin{aligned}
 r = & \frac{w_s(4R_s + w_s)}{4\tau_s} + \\
 & \sum_{n=1,2,3\lambda} \frac{-1}{2n^2\pi^2} \left[\tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi - w_s/2))}{\tau_s}\right) + \right. \\
 & \left. \tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi + w_s/2))}{\tau_s}\right) - 2\tau_s \cos\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - R_s\phi)}{\tau_s}\right) \right. \\
 & \left. + 2n\pi R_s \sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi - w_s/2))}{\tau_s}\right) \right. \\
 & \left. - 2n\pi R_s \sin\left(\frac{2n\pi(R_s\theta - (R_s\phi + w_s/2))}{\tau_s}\right) \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

식 (9)와 (2)로 토크를 구하면 최종적으로 식 (3)을 이용하여 코깅토크를 구할 수 있다.

3. 유한요소법과의 비교

본 논문에서 사용된 코깅퍼미언스를 이용하여 이론적 방법으로 구한 결과와 유한요소법을 통하여 얻은 결과를 비교함으로써 사용된 방법의 타당성을 보이고자 한다. 유한요소법은 서론에서 언급하였듯이 고려해야 할 점이 많다. 가장 중요한 것이 충분한 수의 요소를 가지고 해석을 수행하여야 한다는 것이다. 해석에 사용된 모터의 사양은 Table 1에 정리 하였다. Fig. 3은 사용한 유한요소법 모델과 요소를 보여주고 있다. 요소는 사각형 2차 요소를 사용하였다.

우선 슬롯이 없을 경우에 자속밀도를 유한요소법의 결과와 비교하여 보면 2%오차 이내로 정확하게 일치하고 있음을 Fig. 4에서 확인 할 수 있다. Fig. 5에서는 코깅퍼미언스를 적용하여 구한 슬롯구간의 자속분포와 유한요소법을 통해 얻은 자속분포를 비교하고 있다. 고정자 이(teeth)구간에서는 슬롯이 없을 경우보다 증가했다. 그러나 슬롯 구간에서는 다른 영역보다 비교적 잘 일치하고 있다. 슬롯 구간에서 이론적 해석이 최대 5.3% 크게 나타났다.

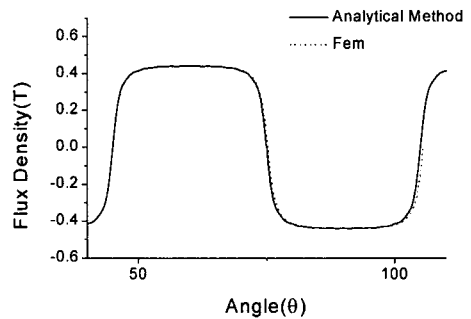


Fig. 4 Flux density on the stator bore without slot

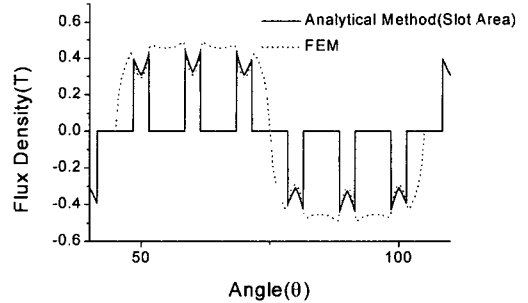


Fig. 5 Flux density on the stator bore with slot

또한 고정자 이의 모서리 구간에서 자속밀도의 증가를 볼 수 있는데 이 영역에서는 절점의 배치를 적절히 가져가지 않는다면 오차가 커지게 된다. 그러나 본 논문에서의 관심이 되는 구간은 슬롯 영역이므로 슬롯 영역 이외의 오차는 무시하여도 된다.

Fig. 6은 얻어진 코깅토크를 보여주고 있다. 코깅토크의 기본 주기는 슬롯의 기본 주기와 영구자석의 기본 주기의 조합으로 발생한다. 즉 360도를 슬롯 수와 영구자석 수의 최소공배수로 나눈 값이 코깅토크의 기본 주기가 된다. 본 논문에서 사용한 모터의 경우는 10도가 코깅토크의 기본 주기가 된다. 코깅토크의 최대값은 안정 위치에서 3.8

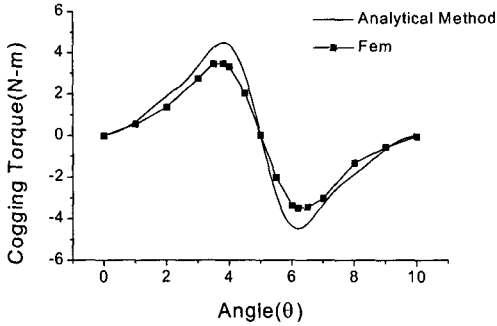


Fig. 6 Cogging torque ($\alpha_p : 1, p : 6, \text{slot} : 36$)

도 벗어난 지점에서 4.48(N-m)로 나타났다. 이것은 기존의 문헌에서는 고정자 이(teeth)의 모서리와 영구자석의 모서리가 일치 할 경우(3.5도) 최대 코깅토크가 발생한다는 사실과 약간 다른 값을 보여주고 있는데 이것은 기존의 문헌에서는 누설자속의 영향을 고려하지 못하였기 때문이다. 누설자속의 영향을 고려하면 실제로 최대 코깅토크는 3.5°보다 큰 값에서 최대 값이 발생할 것이다. Fig. 6은 이론적 방법과 유한요소법의 결과를 비교한 그림이다. 유한요소법에서는 토크를 구하기 위하여 맥스웰 응력 텐서를 사용하였고 적분경로는 공극의 중심을 택하였다. 그림에서 유한요소법의 결과가 최대값에서 22.3% 정도 작게 나타났다. 이것은 Fig. 5에서 보았듯이 이론적으로 구한 자속밀도가 유한요소법의 값 보다 큰 것이 한가지 원인이 될 수 있을 것이다. 그러나 전체적인 경향은 유한요소법과 일치하고 있다. 코깅퍼미언스를 직선으로 근사화 시키므로 발생한 오차는 최대 3.4%였다.

4. 코깅토크 저감방법

코깅토크를 감소 시키기 위한 방법으로 스큐(skew)각을 주는 방법, 슬롯을 부등간격으로 배치하는 방법 등 여러 가지가 있다. 본 연구에서는 α_p , w_s 의 영향과 보조슬롯을 사용하는 방법에 대하여 살펴본다.

4.1 자석비(α_p)의 영향

Fig. 7에서 보면 α_p 의 변화에 따라 코깅토크의 형상이 변화 할 뿐만 아니라 최대값 역시 변하고 있다. 기존 문헌들에서도 지적 되었듯이 어느

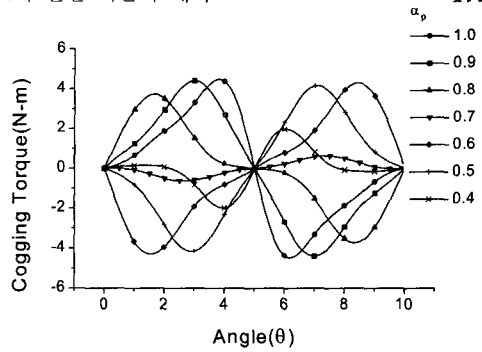


Fig. 7 Cogging torque variation due to α_p

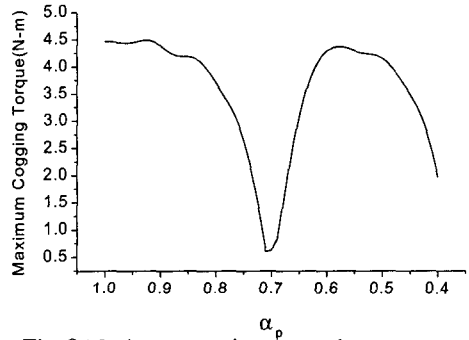


Fig. 8 Maximum cogging torque due to α_p

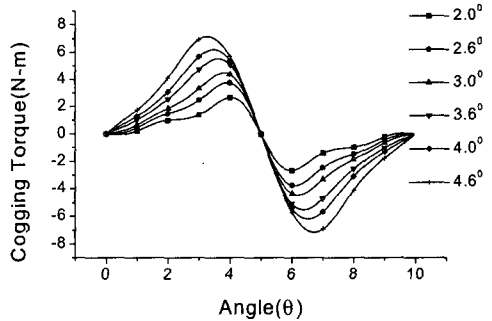


Fig. 9 Cogging torque variation due to w_s

특정 α_p 에서 코깅토크는 최소값을 가지게 된다. 이것은 Fig. 8에서 확인할 수 있다. Fig. 8에서 보면 α_p 가 0.7일 때 코깅토크는 0.95(N-m)로 α_p 가 1일때에 비하여 80% 정도 줄어든다. 코깅토크에 α_p 가 큰 영향을 미치고 있다는 것을 알 수 있다.

4.2 슬롯 각(w_s)의 영향

w_s 를 변화 시키면서 즉 슬롯의 크기를 조절함으로써 얻어진 코깅토크 변화의 결과를 Fig. 9과 Fig. 10에 나타내었다. 슬롯의 크기가 증가 하면

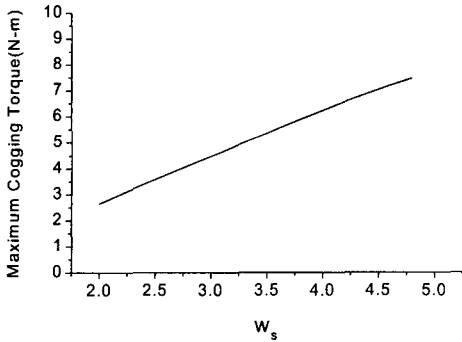


Fig. 10 Maximum cogging torque due to w_s

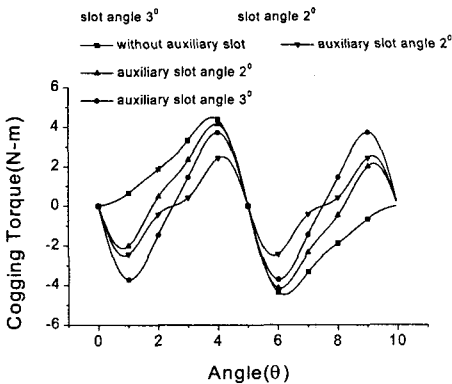


Fig. 11 Cogging torque with auxiliary slot

코깅토크가 증가 하고 있음을 알 수 있다. 그러므로 토크의 크기나 제작상에 문제가 되지 않는다면 슬롯의 크기는 작게 가져가야 한다.

4.3 보조슬롯의 사용

보조 슬롯은 코깅토크 저감을 위하여 많이 사용되는 방법으로 고정자 이(teeth)에 홈을 파서 슬롯이 추가 된 효과를 갖게하는 방법이다. 본 논문에서는 고정자 이(teeth)의 중심에 2 도의 슬롯 각을 가지는 보조 슬롯을 추가하여 코깅토크를 구해 보았다. 그 결과 코깅토크의 주기는 반으로 감소하였고, 최대 값은 11.9% 감소하였다. 또한 보조 슬롯의 각도를 3 도로 하였을 경우에는 17.2%감소하였다. 또한 슬롯 각을 2 도하고 보조 슬롯 각도 2 도로 하였을 경우에는 44.2%가 감소하였다. 즉 슬롯 각이 작은 여러 개의 슬롯을 배치하는 것이 코깅토크 저감 측면에서는 유리하다.

5. 결 론

본 논문에서는 코깅퍼미언스를 정의하고 직선

으로 근사화 하여 푸리에 전개를 통하여 수식화 하였다. 이를 바탕으로 코깅토크의 이론적 해를 구할 수 있는 방법을 제시하여 기존의 유한요소법에서의 문제점을 보완하였다. 또한 이론적해석을 통하여 코깅토크의 저감 방법을 알아 보았다. 본 논문에서 제시된 이론적 방법을 통하여 모터의 설계 단계에서 여러 변수들의 영향을 정성적, 정량적으로 분석하여 코깅토크에 효과적으로 대처할 수 있을 것이다.

마지막으로 코깅토크가 중요한 소음, 진동원이나 운전중 모터 발생 소음, 진동에 효과적으로 대처 하기 위해서는 코깅토크와 더불어 반경방향의 힘과 전기적 토크의 변동성분 역시 종합적으로 검토되어야 할 것이다.

참고 문헌

- (1) Rahman B. S. and Lieu D. K., 1991, " The Origin of Permanent Magnet Induced Vibration in Electric Machines," *ASME Journal of Vibration and Acoustic*, pp. 476~481.
- (2) 황상문, 1998, "전기조향장치용 BLDC 모터 내의 코깅토크 저감을 위한 설계 기술 개발," *한국자동차공학회지*, Vol. 6, No. 3, pp. 106~114.
- (3) Jaime De la Lee and Boules N., 1989, "Torque Production in Permant-Magnetic Synchronous Motors," *IEEE Trans. IA.*, Vol. 25, pp. 107~112.
- (4) Howe D. and Zhu Z. Q., 1992, "The Influence of Finite Element Discretisation on the Prediction of Cogging Torque," *IEEE Trans. Magn.*, Vol.28, pp. 1080~1083.
- (5) Marinescu M. and N. Marinescu, 1988, "Numerical Computation of Torques in Permanent Magnet Motors by Maxwell Stresses and Energy Method," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 24, pp. 463~465.
- (6) Wignall A. N., Gilbert A. J. and S. J. Yang, 1988, "Calculation of Forces on Magnetised Ferrous Cores Using the Maxwell Stress Method," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 24, pp. 459~462.
- (7) Boules N., 1985, "Prediction of No-Load Flux Density Distribution," *IEEE Trans. IA.*, Vol. 21, pp. 633~643.
- (8) Zhu Z. Q., Howe D., Ekkehard Bolte, and Ackermann B., 1993, "Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors, Part I:Open-Circuit Field," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 29, pp. 124~135.
- (9) Zhu Z. Q. and Howe D., 1992, "Analytical of the Cogging Torque in Radial-Field Permanent Magnet Brushless motors," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 28, pp. 1371~1374.