

# 점용접부 최적설계를 위한 적응적 유한요소망의 구성

박장원\* · 채수원\*\* · 이태수\*\*\*  
(1999년 9월 17일 접수)

## Adaptive Finite Element Mesh Construction for Optimal Design of Spot Welding

Jang-Won Park, Soo-Won Chae and Tae-Soo Lee

**Key Words :** Spot Welding(점용접), Optimal Design(최적설계), Cut Line(절취선), Domain Decomposition(영역분할법), Adaptive Mesh(적응적 요소망), h-Method(h-방법)

### Abstract

A finite element interface system for the design of optimal spot welding locations has been developed. In order to find out the optimal locations of spot welding points, iterative finite element analyses are necessary, and thus automatic generation of finite element model for the structures with spot welded points is required. In this interface system, quadrilateral shell elements are automatically generated for finite element analysis of spot welded structured, which employs a domain decomposition method and adaptive mesh(h-method).

### 1. 서론

점용접 판재의 최적설계는 용접점의 개수와 위치를 반복적인 해석을 통하여 구하는 것으로, 이를 위해서는 유한요소해석을 여러 번에 걸쳐 수행하여야 한다. 따라서 매번 해석시에 유한요소 모델을 자동적으로 구성하는 것이 필수적이며, 이러한 자동화 과정이 없이는 최적설계를 현실적으로 수행할 수 없다고 할 수 있다. 자동차의 경우 점용접은 전체적으로 수천개에 이르고 있으며, 각 부위별로는 용접점의 개수가 보통 십여개에서 수십개에 이른다. 이러한 용접부위에서 용접점의 위치나 개수를 설계하기 위해서는 점용접에서 용접점의 피로 또는 과부하에 의한 파단현상에 대한 이해가 필요하다.<sup>(1)</sup> 자동차의 구조용 판재와 같이 연성을 가진 재료에서는 충돌과 같은 과부하 상태

에서 용접점의 파단이 변형을 수반하고 기하학적 형상도 크게 변하게 된다. 한편 운행하중하에서 발생하는 피로파단의 경우 점 용접이 두 판재 사이의 특이점이 되고 응력집중을 수반하는 외부 크랙형태의 결함으로 간주될 수 있기 때문에 파괴역학적인 접근도 고려되어야 한다.<sup>(2)</sup> 따라서 이러한 해석들은 용접점 주위에 많은 수의 3차원 요소나 쉘요소를 사용하여야 하기 때문에 대부분의 연구는 점용접 하나에 초점을 맞추어 용접점의 파단현상을 규명하는 데 중점을 두고 있다. 그러나 여러 개의 점용접으로 조립된 구조물에서는 점 용접 하나 하나를 미시적인 관점에서 해석하기가 어렵고 또한 실용성이 없으므로, 본 연구에서는 앞에서 언급한 바와 같이 용접점을 하나의 절점으로 표시하고 이의 파단을 거시적인 모델을 사용하여 해석하고자 한다.<sup>(3)</sup> 따라서 본 논문에서는 점용접부의 최적설계를 위하여 용접부위 해석의 자동화를 위한 유한요소 인터페이스 시스템을 개발하였다. 이는 용접부의 최적설계를 위해서는 용접점의 위치가 이동하게 되므로, 이에 적합한 유한요소해석모델을 자동적으로 생성하는 것이다. 이때 생성된 유한요소 모델의 요소망 정보와 경계조건들에

\* 회원, 고려대학교 대학원  
\*\* 회원, 고려대학교 기계공학과  
E-mail : swchae@mail.korea.ac.kr  
TEL : (02)3290-3367 FAX : (02)926-9441  
\*\*\* 회원, 서강대학교 기계공학과

대한 정보를 얻어 상용 구조해석 소프트웨어인 ABAQUS™ (4)와 연결하여 해석할 수 있도록 하기 위해서 ABAQUS™ 입력자료를 작성함으로써 용접 부위의 최적설계에 사용할 수 있도록 하였다.

## 2. 용접부위의 최적화 기법

본 논문에서는 최적의 점용접부를 정적 외부하중에 대해 파단강도가 가장 큰 상태로 정의하였다. 점용접의 파단을 정량적으로 정의하기 위해서 용접점에 작용하는 하중으로 표현된 파단 조건식을 이용하였으며, 이 파단 조건식으로부터 각 점용접의 안전계수를 정의하였다. 정의된 안전계수로부터 최적의 점용접 위치는 점용접 안전계수의 평균값을 최대로 하고, 동시에 각 안전계수의 표준편차를 최소로 하는 위치로 정의하였다. 용접점에 작용하는 하중을 인장하중과 전단하중으로 나누어서 하중상태가 식 (1)을 만족하면 파단이 일어나지 않는 것으로 간주한다. (5)

$$\left(\frac{f_n}{F_n}\right)^{a_n} + \left(\frac{f_s}{F_s}\right)^{a_s} < 1 \quad (1)$$

$F_n, F_s$ 는 점용접의 최대 인장강도 및 최대 전단강도,  $f_n, f_s$ 는 용접점에 작용하는 인장력 및 전단력,  $a_n$  과  $a_s$ 는 파단곡선지수이다. 용접점에 작용하는 하중 상태가 위의 파단조건식을 만족하지 않으면 파단이 일어나므로  $i$ 번째 점용접의 안전계수  $s_i$ 는 식 (2)와 같이 정의할 수 있다.

$$\left(\frac{f_n}{F_n}\right)^{a_n} + \left(\frac{f_s}{F_s}\right)^{a_s} = \frac{1}{s_i} \quad (2)$$

### 2.1 목적함수

앞에서 제시된 최적 용접부의 두 가지 요건인 안전계수 표준편차의 최소화와 안전계수 평균의 최대화를 모두 내포하는 목적함수 중 가중계수  $\omega_1, \omega_2$ 를 포함하는 기본적인 가중합산형 목적함수 (Weighted Summation : WS)는 다음과 같이 표현된다. (6)

$$f(D) = \omega_1\phi_1 + \omega_2\phi_2 \quad (3)$$

여기서

D: 용접점의 위치,

$$\phi_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_i}\right)^2$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{s_i}\right)^2$$

를 나타낸다. 최적화 수행과정은 이 목적함수를 최소화하는 용접점의 위치를 찾게된다. 이는 ABAQUS™의 해석을 통하여 용접점에 작용하는 인장력과 전단력의 크기를 얻고 이 값들을 통하여 목적함수값을 계산하게 된다. 이 인장력과 전단력의 크기는 용접점을 포함하는 요소에 작용하는 힘의 크기를 평균하여 얻는다.

### 2.2 최적화 알고리즘

최적화 알고리즘의 한 방법인 Quasi Newton 알고리즘은 목적함수의 이차미분행렬의 근사행렬을 이용하는 방법이다. 목적함수를 2 차항까지 Taylor 전개하면 아래 식 (4)와 같다.

$$\Phi(D + \delta) = \Phi(D) + g^T \delta + \frac{1}{2} \delta^T H \delta \quad (4)$$

여기서  $\delta, g, H$ 는 현재 설계변수에서 목적함수가 최소값을 갖는 설계변수까지의 설계변수 증분 벡터, 목적함수의 일차미분벡터, 목적함수의 이차미분행렬을 의미한다. 실제 설계에 사용되는 목적함수의 이차 미분항을 구하는 것은 어려운 일이므로 Quasi Newton 알고리즘은 이차미분행렬을 반복횟수마다 수정하는 방법 중 보편적인 BFGS Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)방법을 이용하여 수정하는 방법을 이용하고 있다. Quasi Newton 알고리즘은 우선 근사이차미분행렬(B)과 용접점의 위치(D)를 초기화한다.

$$D = D_0 \quad (5)$$

$$B = I \quad (6)$$

이때 I 행렬은 Identity 행렬이다.

초기화된 점용접 위치에서의 목적함수값 ( $\Phi(D_0)$ )과 일차미분벡터( $g_0$ )를 계산하고, 다음 번 해의 방향벡터(u)를 계산한다. Quasi Newton 방법에서의 search 방향은 다음과 같이 계산한다.

$$u = -B^{-1}g \quad (7)$$

계산된 search 방향으로 일차원 line search를 통해 구한 step length( $\lambda$ )와 식 (8)을 이용해서 증분 벡터를 계산한 후 식 (9)로 다음 번 반복횟수의 설계변수를 계산한다. 계산된 설계변수( $D_{new}$ )에서의 목적함수( $\Phi(D_{new})$ )와 일차미분벡터( $g_{new}$ )를 계산하고 BFGS 방법으로 근사이차미분행렬을 식 (10)과

같이 수정한다. 새로 구한 설계변수에서의 목적함수와 일차미분벡터를 계산한 후 수렴조건을 만족하면 종료하고, 그렇지 않은 경우 식 (7)로부터 반복하여 계산한다.<sup>(6)</sup>

$$\delta = \lambda \frac{u}{|u|} \quad (8)$$

$$D_{new} = D + \delta \quad (9)$$

$$B_{new} = B + \frac{qq^T}{q^T \delta} - \frac{B\delta\delta^T B}{\delta^T B \delta}, \quad q = g_{new} - g \quad (10)$$

### 3. 유한요소해석 인터페이스

최적설계 과정 중 새로운 용접점의 위치가 결정되면 결정된 용접점을 포함하는 유한요소망을 구성하게 되는데 이는 크게 세 가지로 분류할 수 있다. 첫 번째는 기존 요소망을 이용하는 것으로 이 방법에는 두 가지 경우를 고려할 수 있다. 그 하나는 용접점의 위치가 결정되면 기존 요소망에서 용접점과 가장 가까운 절점의 위치만을 이 용접점으로 이동시키는 방법으로 이 때 용접점의 위치는 요소의 크기에 관계없이 연속적으로 이동할 수 있다. 다른 하나는 전체적으로 요소의 크기를 줄이고 용접점은 기존의 절점으로만 이동이 가능하도록 하는 것으로 용접점의 이동거리는 요소의 크기에 좌우되는 방법이다. 두 번째로, 새로운 용접점을 포함하는 용접부위 전체에 대해 요소망을 재구성하는 방법이 있으며, 세 번째로는 용접점의 이동시 용접점 주위의 요소를 국부적으로 수정하는 h-법과 같은 적응분할기법을 도입하는 방법이 있다. 이때 최적화 과정 수행시 목적함수 값을 감소시키는 최적의 방향을 선택하기 위해서는 목적함수의 일차미분 벡터값이 필요하므로 용접점의 이동에 대한 목적함수 값이 연속적이어야 한다. 따라서 본 논문에서는 위에서 언급한 세 가지 방법에 대해 용접부위 최적설계에의 적용 가능성을 조사하였다. 해석에 사용된 요소는 계산 효율을 고려하여 8-절점 사각형요소를 사용하였다.

#### 3.1 기존 요소망의 사용

##### 3.1.1 용접점의 연속적 이동

기존의 요소망을 사용하는 방법은 Fig. 1 에서

보는 바와 같이 용접점의 위치를 다소 변화시켰을 경우 요소망 자동생성기능을 이용하지 않고 관련된 절점의 위치만을 변화시킨 모습으로 용접점 주위에서 요소가 많이 찌그러져서 용접점 주위에서 해석결과가 다소 부정확하게 된다.

Fig. 2 는 이 방법에서 목적함수의 연속성을 조사하기 위한 유한요소 모델로 두께가 1mm 인 두 개의 평판(300x300 mm)이 0.5mm 의 간격으로 떨어져 있는 것을 세 개의 용접점으로 연결한 것이다. 여기서 용접점 P1(100,100,z), P2(100,200,z)를 고정하고 P3의 x 좌표를 이동시키면서 목적함수의 연속성을 조사하였다. 요소망의 국부적 형태가 급격히 변경되는 부분에서는 Fig. 3 에서 보는 바와 같이 목적함수값의 연속성을 얻을 수 없게 된다.

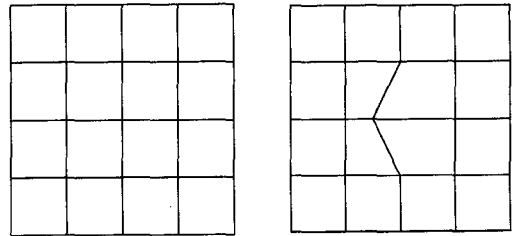


Fig. 1 Mesh with a slightly moved spot welding point

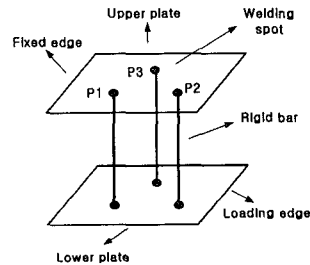


Fig. 2 Welding spot analysis

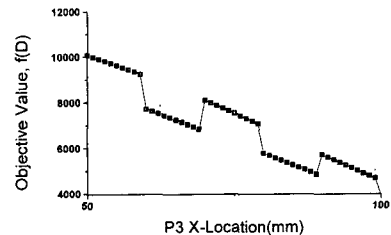


Fig. 3 Objective values for a slightly moved spot welding model

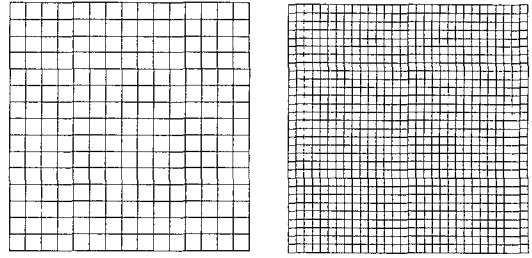
3.1.2 용접점의 불연속적 이동

이는 기존 요소망을 사용하되 요소망의 국부적인 찌그러짐을 방지하기 위해 요소의 크기를 줄이고 용접점의 이동은 주어진 절점으로만 가능하게 하는 방법이다. 이때 사용된 요소의 크기와 목적함수의 연속성을 비교하기 위하여 두께가 1mm 인 판재에서 요소의 크기가 20mm, 10mm 및 5mm 인 요소망을 구성한 후 용접점의 위치를 20mm, 10mm 및 5mm 씩 이동시키면서 목적함수의 연속성을 확인하였다. 그 결과 Fig. 4 와 같이 20mm 와 10mm 에서는 목적함수의 연속성을 얻을 수 없지만 5mm 일 경우에 목적함수의 연속성을 얻을 수 있다. 따라서 요소망 생성시 요소의 크기가 매우 작은 정도를 유지해야 할 것이다. 그러나 요소의 크기를 작게 하면 해석시간이 증가하므로 최적화 방법으로는 효율적이지 못하다.

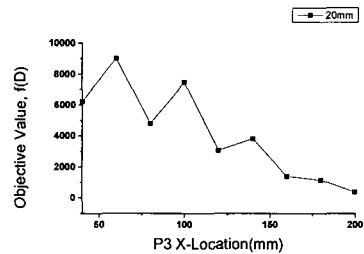
3.2 요소망의 재구성

이는 주어진 용접점을 지나도록 요소망을 재구성하는 것이다.<sup>(7)</sup> 이를 위해 해석영역의 경계에 배치된 주요절점들을 기준으로 절취선(cut line)을 사용하여 해석 영역들을 더 작은 영역들로 만들어 가며 요소를 생성하는 영역 분할법(domain decomposition)을 기초로 한 요소망 생성법을 사용하였다. 여기서 해석영역의 경계를 루프라 할 때 영역 내에서 용접점이 존재하는 경우 절취선(cut line)을 사용하여 하나의 연속된 루프를 만든 후 요소망을 생성하게 된다.

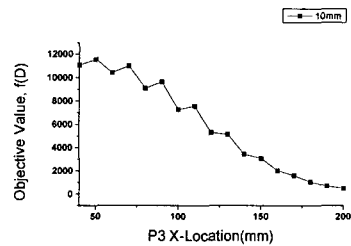
먼저 CAD 시스템으로부터 작성된 곡면에 대한 데이터를 본 프로그램에 입력하여 해석영역의 경계에서 절점을 생성하고 이 해석영역의 경계에서 생성된 절점과 용접점의 최단거리에 자동으로 절취선이 생성되며 이들이 하나의 연속된 루프를 이루도록 하였다. 이때 이 절취선은 해석영역과 거의 직각으로 생성되도록 용접점과 해석영역의 경계와의 거리, 각도 등을 변수로 설정하여 요소의 찌그러짐을 방지할 수 있다. Fig. 5 는 해석영역 내에 용접점이 두 개 존재하는 경우 두개의 절취선을 사용하여 하나의 연속 루프로 구성하는 모습을 보여주고 있다.



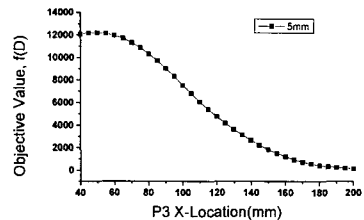
20mm 요소망                      5mm 요소망  
(a) Meshes with different element sizes



b-1) Δx=20mm



b-2) Δx=10mm



b-3) Δx=5mm

(b) Objective values

Fig. 4 . Objective values with respect to element sizes

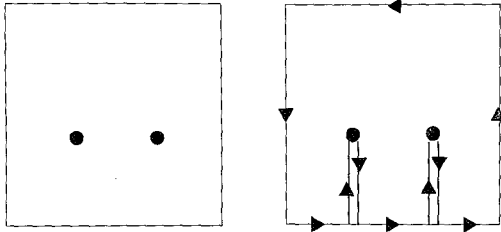


Fig. 5 Creating one continuous loop by using cut lines

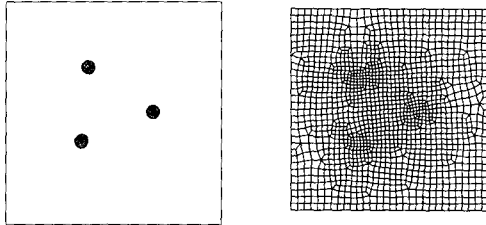
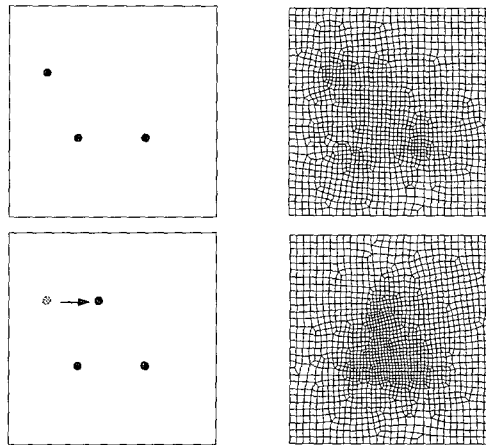
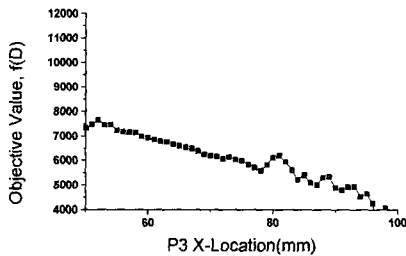


Fig. 6 Automatically generated mesh with 3 spot welding points



(a) Meshes including spot welding points



(b) Objective values

Fig. 7 Automatically generated meshes and objective values

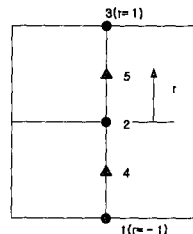
Fig. 6 은 위의 방법을 이용하여 3 개의 용접점을 포함하고 용접점 주위 요소의 크기를 고려하여 유한요소망 생성결과를 나타낸다.

Fig. 7 은 용접점의 이동에 대하여 용접부위 전체에 대해 요소망을 재구성하는 모습과 그에 따른 목적함수값의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 새로운 요소망에서는 기존의 요소망에서 사용한 요소의 개수와 국부적 조밀도 등이 완전히 바뀌게 되어 해석결과에 대한 같은 정도의 정확성을 유지할 수 없게 된다. 따라서 이 방법도 목적함수의 연속성을 얻는데 있어서 적당하지 않다.

### 3.3 적응분할기법(h-method)을 이용한 요소망의

#### 부분적 수정

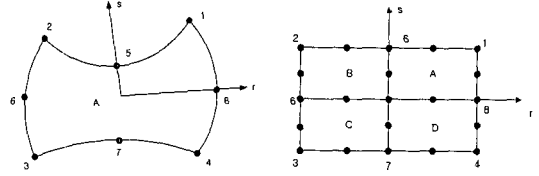
이상과 같은 문제점들을 해결하기 위해 바탕 요소망(background mesh)은 변화시키지 않고 용접점 주위의 요소망만 부분적으로 수정하는 적응분할방법을 개발하였다. 본 논문에서 사용하는 적응분할 방법은 h-방법으로 이는 한 개의 요소가 네 개의 작은 요소들로 나뉘어지는 것이다.<sup>(8, 9)</sup> 이러한 분할 과정을 자동적으로 수행하기 위하여 각 요소들의 변(edge), 절점(node) 및 이들 사이의 연결성 정보를 저장하고 수정할 수 있는 자료구조가 사용되었다. 이러한 자료구조는 분할과정 중 발생하는 연결성 정보를 계속해서 바꿀 수 있도록 미리 고안된 기본분할단위(basic refinement unit)를 사용하였다.<sup>(10)</sup> 적응분할과정은 기본분할단위에 의하여 Fig. 9 와 같이 수행된다. 분할과정 중 인접 요소간의 적합조건(compatibility condition)을 만족시키기 위해 구속방정식(constraint equation)을 사용한다. 이 구속방정식은 사용자가 직접 입력할 경우 다음의 규칙을 따른다. 예를 들어 Fig. 8 과 같은 경우 절점 4 와 절점 5 의 변위,  ${}^4\Delta_i, {}^5\Delta_i$  는 인접한 절점 1, 2 및 3 의 변위에 의해 다음과 같이 나타내진다.



$$\begin{aligned} h_1 &= 1/2 r (r-1) \\ h_2 &= 1-r^2 \\ h_3 &= 1/2 r (r+1) \end{aligned}$$

Fig. 8 Constraint equations at node 4 and node 5

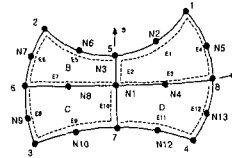
$$\begin{aligned}
 {}^4\Delta_i &= h_1|_{r=-0.5} {}^1\Delta_i + h_2|_{r=-0.5} {}^2\Delta_i + h_3|_{r=-0.5} {}^3\Delta_i \\
 &= \frac{3}{8} {}^1\Delta_i + \frac{3}{4} {}^2\Delta_i - \frac{1}{8} {}^3\Delta_i \\
 {}^5\Delta_i &= h_1|_{r=0.5} {}^1\Delta_i + h_2|_{r=0.5} {}^2\Delta_i + h_3|_{r=0.5} {}^3\Delta_i \\
 &= -\frac{1}{8} {}^1\Delta_i + \frac{3}{4} {}^2\Delta_i + \frac{3}{8} {}^3\Delta_i
 \end{aligned}$$



(a) Original element

(b) Subdivided elements in isoparametric coordinates

그러나 ABAQUS™에서는 \*MPC 란 명령어로 이러한 구속방정식을 쉽게 적용할 수 있다. 이러한 구속방정식은 분할 레벨의 차이가 2 이상이면 상당히 복잡해 지고 또 실제로는 거의 발생하지 않도록 인접한 두 요소의 분할 레벨 차이가 2가 넘지 않도록([2:1] rule) 분할 과정을 수행한다.



13 new nodes (N1 ~ N13)  
12 new edges (E1 ~ E12)  
3 new elements (B ~ D)

한 개의 요소가 네 개의 작은 요소로 분할되면 13 개의 새로운 절점과 3 개의 새로운 요소가 생성되며 새로운 절점은 등매개변수평면(isoparametric plane)상의 r,s 값을 조정하여 결정한다. 예로 새로운 절점 좌표 N1의 경우 r=0, s=0 일 때 다음과 같이 표현된다.

Fig. 9 Basic refinement unit.

$$\begin{aligned}
 N1|_{r=0,s=0} &= XY1 * h1 + XY2 * h2 + XY3 * h3 + XY4 * h4 \\
 &\quad + XY5 * h5 + XY6 * h6 + XY7 * h7 + XY8 * h8 \\
 &= -0.25 * (XY1 + XY3 + XY5 + XY7) \\
 &\quad + 0.5 * (XY2 + XY4 + XY6 + XY8)
 \end{aligned}$$

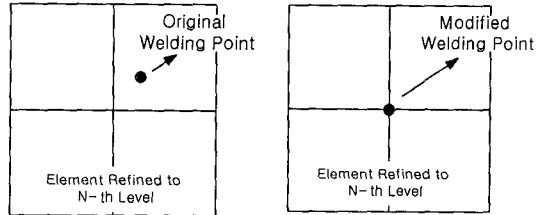


Fig. 10 Modifying spot welding point

편의상 요소의 크기를 요소를 구성하는 변(edge)의 길이 l로 정의할 때 n번 분할된 요소의 크기는  $l(\frac{1}{2})^n$ 로 표현되며 분할된 요소는 n차(n-level)까지 분할되었다고 한다.

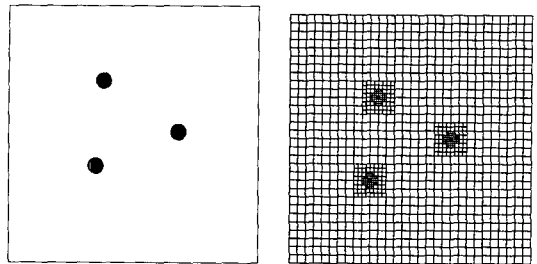


Fig. 11 An adaptive mesh with with 3 spot welding points

용접점 주위에서 분할할 요소의 범위와 요소크기, 그리고 최적화 수행시 용접점의 이동거리를 고려하여 분할 차수를 결정하여야 한다. 또 해석에 사용되는 판재의 두께에 따라 요소크기의 한계가 있으므로 이를 고려하여야 한다. n차까지 분할된 요소의 절점은 용접점을 포함하지 않을 수 있으므로 이 용접점을 Fig. 10과 같이 가장 가까운 요소의 모서리 절점으로 이동시켜야 한다.

크게 단축할 수 있다.

h-방법으로 요소망을 재구성할 때에는 용접부위 일부에 대해서 요소망을 재구성하기 때문에 바탕 요소망(background mesh)은 최적화 과정에서 1번만 생성하면 되며, 이 바탕 요소망위에 적응적 요소망을 재구성하게 된다. 따라서 최적화 수행시간을

Fig. 11은 3개의 용접점을 포함하고 용접점 주위 요소의 분할 차수를 3으로 크기를 고려한 유한요소망의 생성결과를 나타낸다.

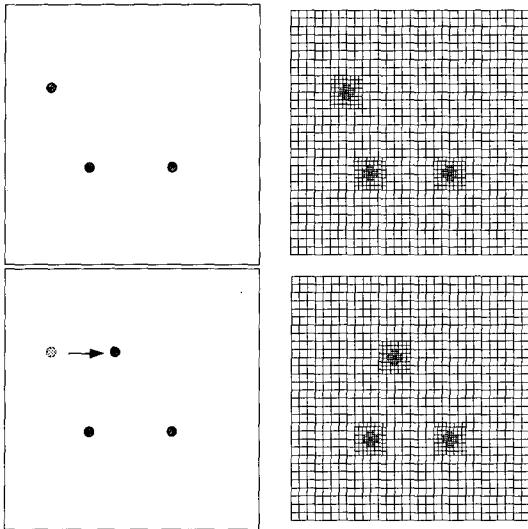
Fig. 12는 h-방법을 이용하여 요소망을 적응분할한 경우로서 용접부위에서 요소망의 밀도와 형상이 거의 같게 유지되기 때문에 목적함수의 연속성을 얻을 수 있음을 보여준다. 따라서 바탕요소망을 토대로 h-방법에 의한 적응분할법을 적용하면

용접부위의 최적설계에 사용할 수 있다. 한편 h-방법에 의해 용접점 주위의 요소망을 분할하는 경우 주어진 용접점을 포함하는 요소망이 구성되는 것이 아니므로 용접점을 가장 근접한 절점으로 이동시켜야 한다. 그러나 이 문제는 최적화 알고리즘에서 용접점의 이동방향과 거리를 조정함으로써 해결할 수 있다.

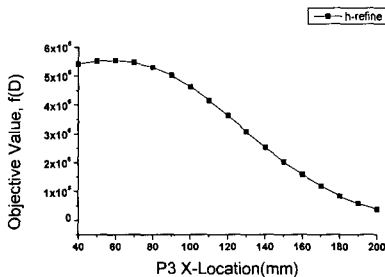
#### 4. 용접부의 최적설계시스템의 구성

용접점의 이동에 따라 재구성된 요소망에 대한 구조해석을 자동적으로 수행하기 위해서는 입력자료가 자동적으로 생성되어야 하며 용접점을 포함

한 용접부위의 형상이 정해지면 이에 대한 유한요소해석 모델이 자동적으로 생성되어야 한다. 따라서 생성된 유한요소모델의 요소망 정보와 경계절점들에 대한 정보를 얻어 상용 소프트웨어인 ABAQUS™ 에서 해석할 수 있도록 ABAQUS™ 입력자료를 생성하도록 하였다. Fig. 13 은 위 과정에 대한 순서도를 보여준다. Fig. 14 는 위에서 언급한 문제를 ABAQUS™ 에서 해석하여 2 번째 용접점 (P2)에 대한 응력분포를 보여주며 Fig. 15 는 판재의 두께를 고려하여 2 차 레벨까지 분할을 수행한 요소망에 대한 최적화 결과를 나타낸다.



(a) Adaptive meshes



(b) Objective values

Fig. 12 Adaptive meshes and corresponding objective values

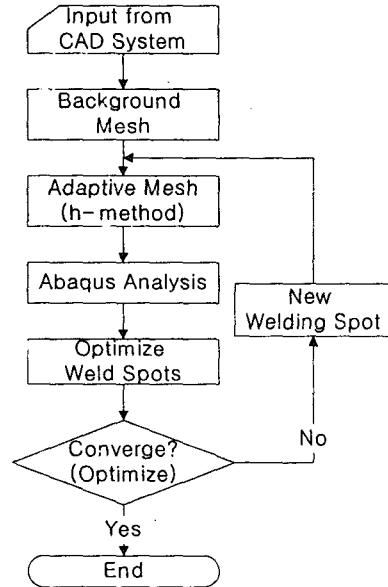


Fig. 13 Flow chart of optimal design system for spot welding

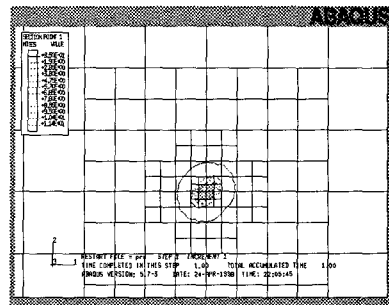
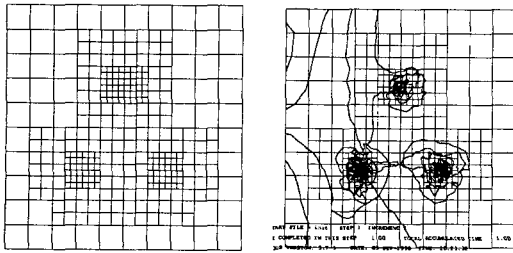
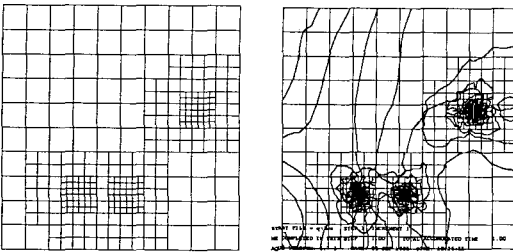


Fig. 14 Stress contour plot in ABAQUS around P3 welding point



(a) Initial locations and stress contours



(b) Optimized location and stress contours

Fig. 15 Optimized result

## 5. 결론

본 연구에서는 점용접 판재의 최적설계시 유한요소해석을 여러 번에 걸쳐 수행할 때 필요한 모델을 자동적으로 생성하는 인터페이스를 개발하였다. 이 때 생성되는 유한요소망은 h-방법을 이용하였으며 용접점 주위의 요소크기와 용접점의 이동거리를 고려하여 분할 차수를 결정하도록 하였다. 이와 같은 인터페이스를 사용하면 용접점의 최적 위치를 구하는데 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구과제(과

제번호 : 97-02-00-05-01-3)의 연구비에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Radaj, D et al, 1990, "Local Stress Parameters at the Weld Spot of Various Specimen," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, No. 5, pp. 933~951.
- (2) Zuniga, S.T., 1994, "Predicting Overload Pull-Out Failures in Resistance Spot Welded Joints," Ph.D Dissertation, Stanford University.
- (3) 류시욱, 이종찬, 이태수, 1998, "점용접 위치의 최적화를 위한 CAD Tool 개발," 대한기계학회 논문집, 제 22 권, 제 1 호, pp. 148~159.
- (4) Hibbit Kalsson and Sorensen, 1996, ABAQUS User's Manual, Volume II, Version 5.4, HKS Inc.
- (5) 이태수, 1996, Spot 용접점 파단의 정량화 모델에 관한 연구, 서강대학교 산학연구과제 보고서.
- (6) 류시욱, 1998, "용접점 파단을 기초로한 점용접부 최적설계 방법 연구," 서강대학교 석사 학위 논문.
- (7) 박장원, 채수원, 1998, "점 용접부 최적설계를 위한 유한요소 인터페이스," 대한기계학회 추계 학술대회 논문집 A 권, pp. 414~418.
- (8) M.A. Yerry & M.S. Shephard, 1983, "A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids," *Int. J.Numer. Methods Eng.*, 15, pp. 1335~1341.
- (9) C.S. Krishnamoorthy and K.Rajeshirke Umesh, 1993, "Adaptive Refinement for Two Dimensional Finite Element Stress Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 48, No. 1, pp. 121~133.
- (10) 채수원, 1994, "h-분할법에 의한 사각형 유한요소망의 적응적 구성," 대한기계학회 논문집, 제 18 권, 제 11 호, pp. 2932~2943.