

반무한체에 접합된 두 등방성 층의 좌굴 해석

정 경 문* · 범 현 규**
(1999년 12월 29일 접수)

Buckling Analysis of Two Isotropic Layers Bonded to a Semi-Infinite Substrate

Kyoung Moon Jeong and Hyeon Gyu Beom

Key Words: Isotropic(등방성), Incremental Deformation Theory(증분 변형 이론), Semi-Infinite Substrate(반무한체), Critical Buckling Strain(임계 좌굴 변형률)

Abstract

The buckling of two elastic layers bonded to a semi-infinite substrate under a transverse compressive plane strain is investigated. Incremental deformation theory, which considers the effect of the initial stress on the incremental stress field, is employed to describe the buckling behavior of both two isotropic layers and the semi-infinite substrate. The problem is converted to an eigenvalue-eigenvector case, from which the critical buckling strain and the buckling wavelength are obtained. The results are presented on the effects of the layer geometries and material properties on the buckling behavior.

1. 서 론

탄성 모재와 접합된 층의 좌굴은 최근에 반도체 산업에서 중요하게 여겨져 왔다. 반도체는 고 집적화로 인해 평판의 층수가 계속 증가되어지고 있으므로, 이러한 적층 구조는 고온에서 조립된 후 상온으로 냉각 될 때의 온도차나 사용 중에 발생하는 온도 변화 그리고 열팽창 계수의 차이로 인해 층이 좌굴 변형을 일으켜 결국 층간 박리와 같은 영구적인 파손이 된다. 따라서 이러한 적층 구조의 신뢰성 향상을 위해 탄성 모재에 접합된 층의 좌굴 변형에 관한 연구는 필수적이다. 이러한 문제는 초기에 좌굴 하층이 샌드위치 패널의 압축 강도보다 항상 낮기 때문에 항공기에서 샌드위치 패널의 좌굴을 연구하는 계기가 되

었다.^(1,2) 샌드위치 패널의 구조는 두 가지 형태의 좌굴로 주로 해석된다. 샌드위치 패널 전체를 균질한 평판으로 가정하여 좌굴 거동을 해석하는 방법과 단지 외피(face layer)에서만 좌굴을 일으키고, 중간층 재질(core material)은 탄성지자로 작용한다. 반무한체에 접합된 등방성 층의 좌굴은 후자의 경우에 해당된다.

최근 반도체 산업 분야의 고속 성장으로 인하여 활발하게 진행되고 있는 반무한체에 접합된 등방성 층의 좌굴에 관한 연구⁽³⁻⁵⁾가 수행되었다. 본 연구에서는 층수가 증가된 두 등방성 층이 접합되었을 때의 좌굴에 주안점을 두고 있다. 최근에 Shield 등⁽⁴⁾은 평면 변형률시 모재에 접합된 탄성층의 좌굴을 해석하는데 탄성학의 수학적 이론을 적용하여 탄성층을 보 이론으로 적용한 근사해와 비교하였다. 그들은 보 이론 모델은 강성비가 100 이하에서 발생하는 좌굴 변형률은 3%를 초과할 때까지는 적당하다는 결과를 제시하였다. Hwang⁽⁵⁾은 층과 반무한체가 직교 이방성 재

* 전남대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 전남대학교 기계공학과

E-mail : hgbeom@chonnam.ac.kr

TEL : (062)530-1682 FAX : (062)530-1689

료일 때 Biot⁽⁶⁾의 증분 변형 이론을 층과 반무한체에 적용하여 좌굴 변형에 미치는 직교 이방성의 영향을 해석하였다. 그러나 반무한체에 층수가 증가되어 층의 기하학적 형상이 미치는 영향에 대한 좌굴은 해석되지 않았다. 문제의 수식화는 증분 변형 이론을 층과 반무한체에 각각 적용한다. 두 등방성 층에 대한 두께 비와 재료 물성치를 달리하여 좌굴 변형률과 좌굴 파장에 미치는 영향을 연구하고자 한다. 해석 결과는 중간층의 두께 변화에 따라 접착 영역(adhesive zone)과 금속간 화합물(intermetallics)로 접합되어진 구조의 좌굴로 생각할 수 있다.

2. 문제의 수식화

증분 변형의 탄성 이론은 초기에 응력을 받은 물체가 증분 응력을 받을 때 초기 응력장의 영향을 증분 응력장으로 해석하는 것이다. 이러한 이론은 안정성(stability) 문제에 매우 적합하고, 이전의 연구가들에 의해 증분 변형 이론이 적용된 몇몇 연구 결과가 보고되고 있다.^(5,7-9) 증분 응력과 증분 변형률은 초기 상태에 증분량 만큼 증가된 응력과 변형률을 의미하고, 시간에 대한 증분률의 의미는 아니다.

각 영역에서 증분 응력 σ_{ij} 에 대한 일반적인 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + S_{jk}\omega_{ik,j} + S_{ik}\omega_{jk,j} = 0 \quad (1)$$

여기에서 초기 응력(initial stress) S_{jk} 는 균일하고 체력(body force)은 무시한다. 그리고 하첨자 쉼표(.)는 미분을 나타내고, ω_{ij} 는 증분 회전(incremental rotation)을 나타낸다. 표면 트래クション(surface traction)은 식 (1)과 관련되어 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_i = (\sigma_{ij} + S_{kj}\omega_{ik} + S_{ij}\epsilon - S_{ik}\epsilon_{jk})n_j \quad (2)$$

여기서 T_i 는 단위 수직 벡터 n_j 을 갖는 표면에 대한 트래クション의 i 번째 성분이고, ϵ_{jk} 와 ϵ 은 증분 변형률(incremental strain)을 나타내며, $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ 이다.

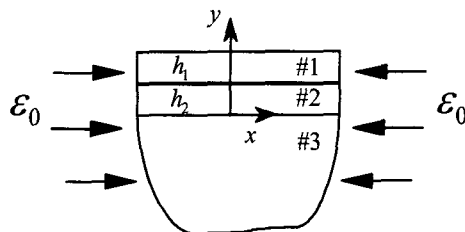


Fig. 1 Geometry of two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate

반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 반무한체에 접합된 두 개의 층이 축 방향(x 방향)으로 압축 변형률을 받는다면, 초기의 평형 상태는 두 개의 등방성 층은 직선인 상태로 유지된다. y 방향의 수직 변위에 대한 평형 상태는, 초기 변형에 미소하게 작은 증분 변형을 중첩시켜 알 수 있다. 각각 두 개의 평형 상태는 미소하게 작용하므로 동시에 발생할 수 있다. 따라서, 분기(bifurcation)가 발생하게 되고, 임계 좌굴 응력이나 변형률을 구할 수 있다.

증분 변형 이론은 두 등방성 층과 반무한체의 거동을 나타내는데 각각 적용된다. 여기서 해석하고자 하는 2차원 문제에서 지시 기호(indicial notation)는 생략하고, Cartesian 좌표계가 사용된다. Fig. 1에서 층의 두께는 각각 h_1 과 h_2 이고, #1, #2, #3은 각각 층과 반무한체를 나타내며, 앞으로 사용하게 될 수식에서 위첨자로 표기하였다. 두 개의 층과 반무한체는 균질하고, 등방성이며 선형 응력-변형률 관계를 만족한다. 그리고, 문제는 평면 변형률(plane strain) 상태로 가정하면, 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 초기 응력은 다음과 같다.

$$S_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_0 \quad (3)$$

여기서 ϵ_0 는 초기 변형률이고, E 는 영(Young) 계수, ν 는 포아송(Poisson) 비이다. 평면 변형률 문제에서 z 방향의 증분 변형률을 영(zero)으로 가정하고, x 와 y 방향의 증분 변위(incremental displacement)는 z 방향과는 무관하게 $u(x, y)$ 와 $v(x, y)$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 증분 변형률

은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u_{,x}, \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0\end{aligned}\quad (4)$$

여기서 ε_{ij} 는 증분 변형률을 나타낸다. 그러므로 등방성 재료에 대한 증분 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0\end{aligned}\quad (5)$$

여기서 λ 와 μ 는 E 와 ν 로 표현되는 Lamé 상수이다. 식 (5)에서 응력은 z 방향과는 무관하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 증분 응력에 대한 평형 방정식 (1)은 다음과 같이 줄어든다.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + S_{xx} \omega_{yx} &= 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + S_{xx} \omega_{yx} &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

여기에서 ω_{yx} 는 $\omega_{yx} = (v_{,x} - u_{,y})/2$ 로 증분 회전을 나타낸다. 두 등방성 층과 반무한체에 대한 x 와 y 방향의 증분 변형 상태는 다음과 같은 표현으로 좌굴 된 형태를 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \phi(\alpha, y) \sin \alpha x \\ v(x, y) &= \psi(\alpha, y) \cos \alpha x\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 $\alpha = \pi/l$ 이고 l 은 반 파장이다. 식 (5)와 식 (7), 증분 변형률-증분 변위 관계를 이용하여 식 (6)을 풀면, 변위장과 응력장은 $\phi(\alpha, y)$ 와 $\psi(\alpha, y)$ 의 항으로 나타낼 수 있다. 그러므로, 증분 변위와 응력장의 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u(x, y) &= [Ae^{p\alpha y} + Be^{-p\alpha y} + Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}] \sin \alpha x \\ v(x, y) &= [qAe^{p\alpha y} - qBe^{-p\alpha y} - Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}] \cos \alpha x \\ \sigma_{yy}(x, y) &= [\{\lambda + p q(\lambda + 2\mu)\}Ae^{p\alpha y} + \{\lambda + p q(\lambda + 2\mu)\}Be^{-p\alpha y} - 2\mu Ce^{\alpha y} - 2\mu De^{-\alpha y}] \alpha \cos \alpha x \\ \sigma_{xy}(x, y) &= [\mu(p - q)Ae^{p\alpha y} - \mu(p - q)Be^{-p\alpha y} + 2\mu Ce^{\alpha y} - 2\mu De^{-\alpha y}] \alpha \sin \alpha x\end{aligned}\quad (8)$$

여기에서 A, B, C, D 는 임의의 상수이고, λ, μ, p, q 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ p &= \sqrt{\frac{2\mu + S_{xx}}{2\mu - S_{xx}}} \\ q &= \frac{-2\lambda - 2\mu + S_{xx}}{p(2\lambda + 2\mu + S_{xx})}\end{aligned}\quad (9)$$

식 (8)은 두 개의 층과 반무한체에 각각 적용된다. 그리고, 층과 반무한체에 대한 변수와 미지수를 구별하는데 #1, #2, #3를 위첨자로 표기하였다. 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 표면의 트랙션은 표면의 수직 방향(normal direction)에 따라 식 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}T_x &= \left(1 - \frac{S_{xx}}{\mu}\right) \sigma_{xy} \\ T_y &= \sigma_{yy} \\ T_x &= -\left(1 - \frac{S_{xx}}{\mu}\right) \sigma_{xy} \\ T_y &= -\sigma_{yy}\end{aligned}\quad \begin{aligned}(n_2 = 1) \\ \\ (n_2 = -1)\end{aligned}\quad (10)$$

Fig. 1에서 $y = h_1 + h_2$ 인 표면에는 트랙션은 없고, $y = 0$ 과 h_2 인 계면(interface)에서 변위와 트랙션은 연속(continuous)이어야 하므로 경계 조건을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{\#1}(x, h_1 + h_2) &= 0 \\ \sigma_{xy}^{\#1}(x, h_1 + h_2) &= 0 \\ u^{\#1}(x, h_2) &= u^{\#2}(x, h_2) \\ v^{\#1}(x, h_2) &= v^{\#2}(x, h_2)\end{aligned}$$

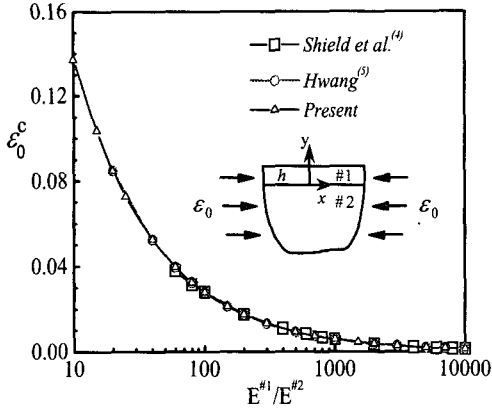


Fig. 2 Comparing present solution, Shield et al. and Hwang with critical buckling strains

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{\#1}(x, h_2) &= \sigma_{yy}^{\#2}(x, h_2) \\ \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#1}}{\mu^{\#1}}\right) \sigma_{xy}^{\#1}(x, h_2) &= \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#2}}{\mu^{\#2}}\right) \sigma_{xy}^{\#2}(x, h_2) \\ u^{\#2}(x, 0) &= u^{\#3}(x, 0) \\ v^{\#2}(x, 0) &= v^{\#3}(x, 0) \\ \sigma_{yy}^{\#2}(x, 0) &= \sigma_{yy}^{\#3}(x, 0) \\ \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#2}}{\mu^{\#2}}\right) \sigma_{xy}^{\#2}(x, 0) &= \left(1 - \frac{S_{xx}^{\#3}}{\mu^{\#3}}\right) \sigma_{xy}^{\#3}(x, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

위첨자 #1, #2는 등방성 층을, #3은 반무한체를 나타낸다. 반무한체가 계면 ($y=0$)에서 매우 멀어질 때, 즉 $y \rightarrow -\infty$, 증분 변위와 응력은 영(zero)이 된다. 그러므로, 반무한체에서 임의의 상수 $B^{\#3}$ 과 $D^{\#3}$ 은 영이 된다. 식 (8)을 이용하여 경계 조건 (11)을 대수 방정식(algebraic equation)으로 표현하면 다음과 같다.

$$[a]\{Y\} = 0 \quad (12)$$

여기에서 $\{Y\}^T = \{A^{\#1}, B^{\#1}, C^{\#1}, D^{\#1}, A^{\#2}, B^{\#2}, C^{\#2}, D^{\#2}, A^{\#3}, C^{\#3}\}$ 이다. 행렬 $[a]$ 는 초기 응력 $S_{xx}^{\#1}$, $S_{xx}^{\#2}$ 과 $S_{xx}^{\#3}$ 을 포함한 10×10 행렬이다. 미지수 행렬 $\{Y\}$ 에 대한 유용해

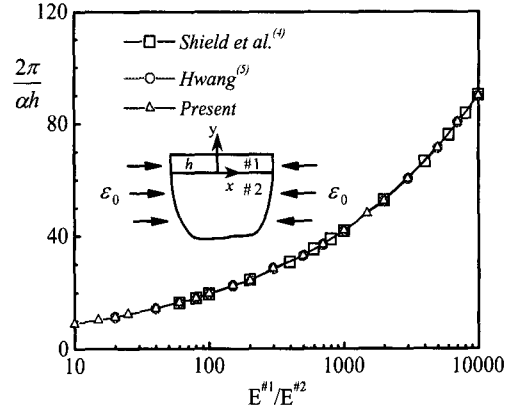


Fig. 3 Comparing present solution, Shield et al. and Hwang with buckling wavelengths

(non-trivial solution)가 존재하기 위해서는 행렬 $[a]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 되어야 한다. 임계 좌굴 응력과 변형률은 행렬 $[a]$ 의 행렬식이 영으로 가면서 가장 작은 초기 응력과 변형률 상태에서 결정된다. 임계 좌굴 응력이나 변형률은 파장 $2l$ 에 의존하므로, 다른 파장들은 가장 작은 임계 좌굴 응력과 변형률을 구하는데 적용된다. 수치 해석으로는 좌굴 변형률과 파장의 광범위한 초기 추측 값들을 이용하여 이분법(bisection method)을 적용하였다. 변형률이 최소가 될 때의 변형률이 임계 좌굴 변형률이고, 그에 대응되는 파장이 좌굴 파장으로 결정된다.

3. 결과 및 토론

본 연구에서 얻은 해석 결과의 타당성을 검증하기 위해 행렬 $[a]$ 의 행렬식에서 두 등방성 층의 영(Young) 계수가 같고, 포아송(Poisson) 비는 $\nu^{\#1} = \nu^{\#2} = \nu^{\#3} = 0.25$ 이고, 층 #1과 #2의 두께를 $h = h_1 + h_2$ 라 하면, Shield 등⁽⁴⁾이 연구한 문제와 동일하다. 임계 좌굴 변형률의 부호를 기존의 해석 결과와 비교하기 위해 변형률은 $\epsilon_{xx} = -\epsilon_0$ 인 관계로 일치시켰다. Fig. 2에 등방성 층과 반무한체의 강성비($E^{\#1}/E^{\#2}$)의 함수로서 임계 좌굴 변형률 ϵ_0^c 는 Shield 등⁽⁴⁾과 일치하였다. 또한, Fig. 3에서는 무차원화시킨 좌굴 파장

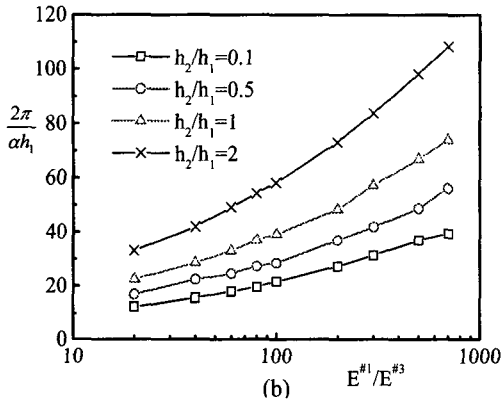
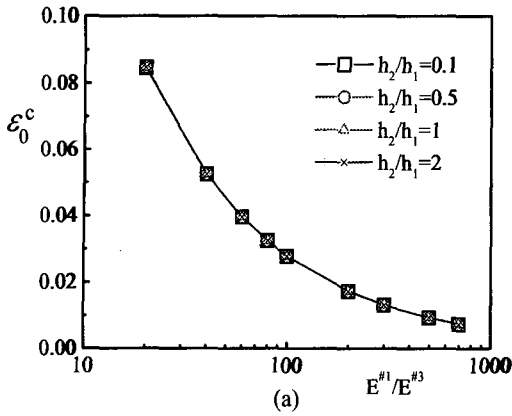


Fig. 4 Two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate when $E^{\#1}=E^{\#2}$ (a) Critical buckling strains (b) Buckling wavelengths of an isotropic layer #1

($2\pi/ah$)도 정확하게 일치하였다. Figs. 2와 3에서 등방성 층과 등방성 반무한체에 대한 임계 좌굴 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 기존의 해석 결과^(4,5)와 비교하여 일치하였으므로 본 연구의 해석 결과가 타당함을 알 수 있다.

두 등방성 층과 반무한체에 각각 증분 변형 이론을 적용하여 층의 기하학적 형상과 재료 물성치가 좌굴 변형에 미치는 영향을 해석하였다. Fig. 4는 두 등방성 층의 영(Young) 계수가 같을 때($E^{\#1}=E^{\#2}$), 임계 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 나타내었다. 본 연구의 해석 결과에서 포아송(Poisson) 비는 $\nu^{\#1}=\nu^{\#2}=\nu^{\#3}=0.25$ 이고, 무차원화시킨 좌굴 파장 ($2\pi/ah_1$)은 층 #1의 파장만을 나타내었다. 두 등방성 층의 영(Young) 계수가 같으므로 임계 좌굴 변형률은 등방성 층 #1

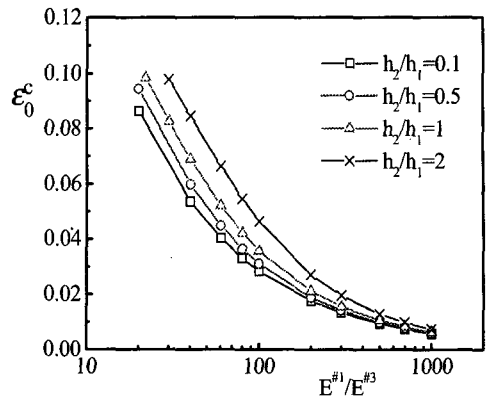


Fig. 5 Critical buckling strains ($E^{\#2}/E^{\#3}=10$)

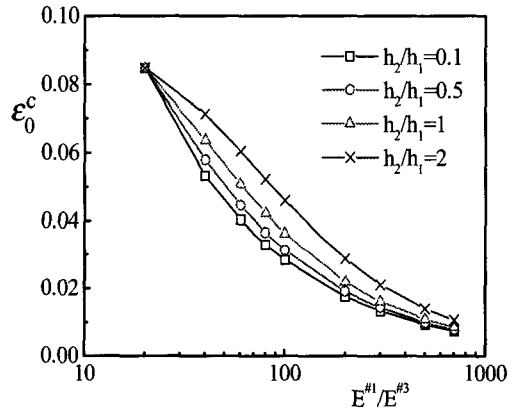


Fig. 6 Critical buckling strains ($E^{\#2}/E^{\#3}=20$)

과 #2의 두께 비(thickness ratio, h_2/h_1)에 의존하지 않지만(Fig. 4(a)), 무차원화시킨 좌굴 파장은 층 #2의 두께가 증가하면서 상대적으로 층 #1은 매우 큰 좌굴 파장을 보이며 변형이 발생한다(Fig. 4(b)). Figs. 5, 6, 7, 8은 층 #2와 반무한체의 강성비가 일정($E^{\#2}/E^{\#3}=10, 20, 100, 300$)할 때 층 #1과 반무한체의 강성비($E^{\#1}/E^{\#3}$)의 함수로서 층 #2의 두께 변화에 따라 임계 좌굴 변형률을 나타내었다. 층 #2가 층 #1보다 강성이 더 크면($E^{\#2}>E^{\#1}$) 층 #2의 두께가 증가할 때 좌굴 변형이 쉽게 발생한다. 그러나 층 #2가 층 #1보다 강성이 작으면($E^{\#2}<E^{\#1}$) 층 #2의 두께가 증가하면서 좌굴 변형이 발생하기가 상대적으로 더 어렵다. 이러한 현상은 층 #1의 강성이 작을 때 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다. 그러나, 층 #1과 층 #2의

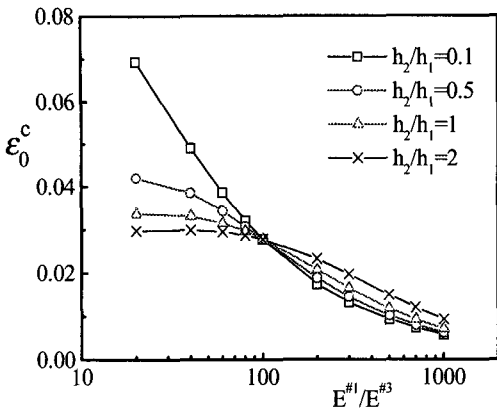


Fig. 7 Critical buckling strains ($E^{\#2}/E^{\#3}=100$)

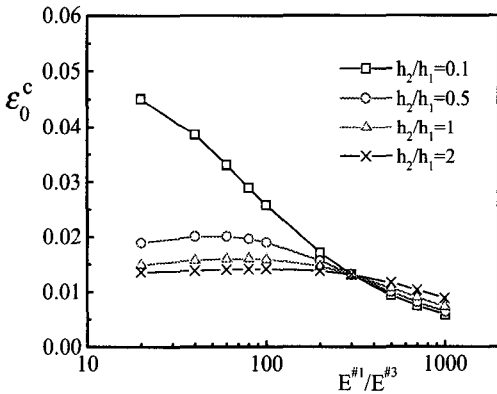


Fig. 8 Critical buckling strains ($E^{\#2}/E^{\#3}=300$)

강성이 너무 크게 차이가 나면 좌굴 변형률에 미치는 영향은 두께비에 거의 의존하지 않는다. Fig. 6($E^{\#1}/E^{\#3}=20$), Fig. 7($E^{\#1}/E^{\#3}=100$)과 Fig. 8($E^{\#1}/E^{\#3}=300$)에서 두께비에 무관하게 일치되는 현상은 Fig. 4(a)와 동일한 경우로 두 등방성 층의 강성비가 같기 때문에($E^{\#1}=E^{\#2}$) 임계 좌굴 변형률은 두께비에 의존하지 않는다. Fig. 9는 두 층의 재료 물성치가 같을 때 층 #1과 층 #2의 두께 비의 함수로서 임계 좌굴 변형률과 무차원화시킨 좌굴 파장을 나타내었다. Fig. 9(a)에서 좌굴 변형률은 두 등방성 층의 영(Young) 계수가 같을 때($E^{\#1}=E^{\#2}$), 층의 두께 변화에 의존하지 않고 일정한 값을 보이고 있다. Fig. 9(b)는 층 #1과 층 #2의 두께비의 함수로서 두 층의 강성이 증가하면서 층 #1에 미치는 영향을 나타내었다. 층 #2

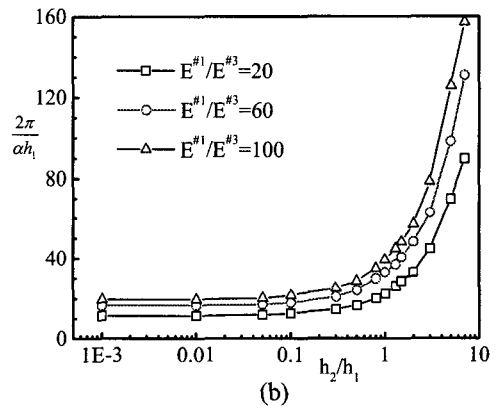
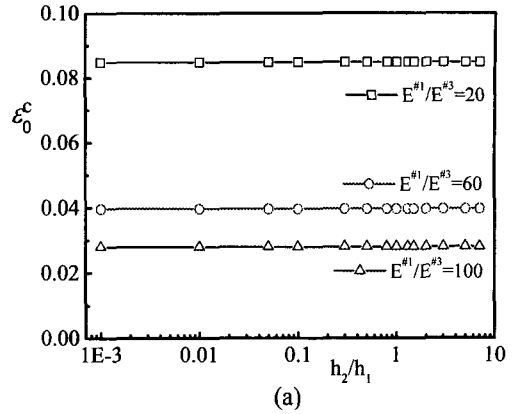


Fig. 9 Two isotropic layers bonded to a semi-infinite substrate when $E^{\#1}=E^{\#2}$ (a) Critical buckling strains (b) Buckling wavelengths of an isotropic layer #1

의 두께가 층 #1보다 증가하면서 층 #1의 무차원화된 좌굴 파장은 급격하게 커지면서 좌굴을 발생시킨다. 반무한체에 접합된 두 등방성 층에 대한 좌굴 변형률과 좌굴 파장은 층의 기하학적 형상과 재료 물성치 변화에 매우 큰 영향을 받는다. 특히, 층 #2의 두께가 증가할 때, 그리고 층 #1의 강성이 작은 곳에서 층 #2의 강성이 매우 클 때 좌굴에 미치는 영향은 더욱 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

4. 결론

반무한체에 접합된 두 등방성 층의 좌굴을 해석하였다. 두 등방성 층의 좌굴 변형률과 좌굴 파장은 증분 변형 이론을 적용하였다. 기존의 연

구와는 달리 본 연구에서는 두 등방성 층의 기하학적 형상과 재료 물성치가 좌굴 변형에 미치는 영향을 나타내었다. 좌굴 변형률은 두 등방성 층의 강성비가 100 이하에서 두께변화와 강성비에 매우 민감함을 알 수 있다. 낮은 강성비로 층과 반무한체가 접합되어진 구조에서 좌굴 발생 후에 일어나는 층간 박리현상은 두 등방성 층의 두께와 재료 물성치의 변화가 제품의 신뢰성 평가에 중요한 인자가 됨을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구(981-1012-071-2) 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Gough, G. S., Elam, C. F. and De Bruyne, N. A., 1940, "The Stabilization of a Thin Sheet by a Continuous Supporting Medium," *J. Royal Aero. Soc.*, Vol. 44, No. 34, pp. 12~43.
- (2) Hoff, N. J. and Mautner, S. E., 1945, "The Buckling of Sandwich Type Panels," *J. Aero. Sci.*, Vol. 12, No. 3, pp. 285~297.
- (3) Dorris, J. F. and Nemet-Nasser, S., 1980, "Instability of a Layer on a Half Space," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 304~312.
- (4) Shield, T. W., Kim, K. S. and Shield, R. T., 1994, "The Buckling of an Elastic Layer Bonded to an Elastic Substrate in Plane Strain," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 61, pp. 231~235.
- (5) Hwang, S. F., 1998, "The Buckling of an Orthotropic Layer on a Half-Space," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 40, No. 7, pp. 711~721.
- (6) Biot, M. A., 1965, *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New York.
- (7) Goodier, J. N., 1946, "Cylindrical Buckling of Sandwich Plates," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 13, pp. A253~A260.
- (8) Chung, W. Y. and Testa, R. B., 1969, "The Elastic Stability of Fiber in a Composite Plate," *J. Comp. Mater.*, Vol. 3, pp. 58~80.
- (9) Christensen, R. M., 1994, "Material Instability for Fiber Composites," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 61, pp. 476~477.