

# 구조해석을 위한 적응 웨이블릿-갤러킨 기법

김 윤 영\* · 장 강 원\*\*

(1999년 12월 28일 접수)

## Adaptive Wavelet-Galerkin Method for Structural Analysis

Yoon Young Kim and Gang Won Jang

**Key Words:** Wavelet-Galerkin(웨이블릿 갤러킨), Adaptive Analysis(적응해석), Multi-Resolution(다중분해), Thin-Walled Box Beam(박스형 박판보)

### Abstract

The object of the present study is to present an adaptive wavelet-Galerkin method for the analysis of thin-walled box beam. Due to good localization properties of wavelets, wavelet methods emerge as alternative efficient solution methods to finite element methods. Most structural applications of wavelets thus far are limited in fixed-scale, non-adaptive frameworks, but this is not an appropriate use of wavelets. On the other hand, the present work appears the first attempt of an adaptive wavelet-based Galerkin method in structural problems. To handle boundary conditions, a fictitious domain method with penalty terms is employed. The limitation of the fictitious domain method is also addressed.

### 1. 서 론

웨이블릿을 이용하는 웨이블릿 갤러킨 방법(WGM)이나 웨이블릿 콜로케이션 방법(WC)은 유한요소법과 스펙트럴 방법의 장점을 포함하고 단점을 보완하는 방법이다. 유한요소법은 요소 내에서만 정의되는 부분 연속의 형상함수를 사용하고 스펙트럴 방법은 전체 영역에서 정의되는 미분 가능한 기본 함수를 사용한다. 유한요소법은 형상함수가 유한 구간에서 정의되므로 해의 국부적인 변화를 표현하는 데는 좋으나 연속성 측면에서 본다면 그다지 매끄러운 해를 기대하기는 어려우며 스펙트럴방법은 연속성은 뛰어나나 무한 구간에서 정의되기 때문에 수치계산상 어려움이 있고 급작스런 해의 변화를 포착하는데는 비

효율적이다. 최소의 유한구간에서 정의되고 최대의 연속성을 지니는 웨이블릿의 특성을 이용한 웨이블릿 방법은 부드러운 해의 변화에는 최소 개수의 웨이블릿만으로 표현이 가능하며 해의 급작스런 변화 역시 해의 차이를 표현하는 웨이블릿 함수를 이용하여 효율적으로 표현할 수 있다.

미분방정식 해석에 웨이블릿이 유용한 가장 큰 이유는 웨이블릿은 다중분해 해석을 가능하게 한다는 것과 소멸모멘트를 갖는다는 것이다. 다중분해 해석<sup>(1)</sup>은 분해의 정도를 점진적으로 높여가면서 해석을 수행하기 때문에 높은 분해도가 요구되는 구간에서만 정밀한 해석을 하게 된다. 이와 같은 특징으로 인하여 웨이블릿은 적응 해석이 용이하고 새로운 적응해석 기법의 대안이 될 수 있다. 그리고 소멸모멘트<sup>(1)</sup>를 갖는 웨이블릿을 사용하는 경우 이러한 웨이블릿에 의해 급격히 변화하는 함수가 매우 효율적으로 표현되는 장점이 있다. 이 이외에도 유한요소와 달리 요소망 없이 절점만으로 구성되기 때문에 적응해석시 요구되는 절점의 제거나 추가가 매우 용이하다는 장점도 가지고 있다.

\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부, 정밀기계설계 공동연구소

E-mail : yykim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

\*\* 서울대학교 웨이블릿 응용 구조설계 및 진단 연구실

웨이블렛-갤러킨 방법에 관련된 그간의 연구를 살펴보면 다음과 같다. 웨이블렛이 지나는 경계 문제 처리의 단점을 보완하기 위하여 Raymond, Zhou 등<sup>(2)</sup>은 페널티 파라미터와 가상영역을 도입하였고 여기에 따르는 강성 행렬의 조건수가 행렬크기에 따라 급격히 증가하는 문제를 해결하기 위해서 Kunoth<sup>(3)</sup>는 라그랑지 승수를 이용하였다. 이러한 웨이블렛 갤러킨 방법의 구조문제에 대한 최초의 적용은 DeRose,<sup>(4)</sup> Diaz<sup>(5)</sup>에 의해 시도되었으나 이들에 의한 연구는 웨이블렛이 지나는 다중 분해 특성을 이용하지 못한 채 단지 단일 스케일만을 이용하여 적용 해석을 수행할 수 없었다. 다중 분해 해석과 적응 해석 기법의 수학적 정리는 최근에 와서야 Cohen, Dahmen, Devore 등<sup>(6)</sup>의 수학자들에 의해 정립되어 가고 있는 상황이다.

본 연구에서는 구조해석 문제에 처음으로 적응 웨이블렛-갤러킨 기법을 적용하였다. 특히 끝단효과에 의해 해가 국부적으로 변화하는 1차원 박판보 문제<sup>(8-10)</sup>에 적용하여 적응 웨이블렛-갤러킨 기법을 정식화하고, 이 기법의 장단점을 살펴보고자 한다. 특히 통상적인 유한요소 해석시 요소의 크기를 줄여나감에 따라 시스템 강성행렬을 모두 재구성해야만 하는 비효율성을 극복하고 시스템의 강성행렬을 효과적으로 그 크기를 줄여나감으로써 정밀한 해를 얻기 위해 요구되는 변수의 개수를 최소로 줄이는 적응 웨이블렛 갤러킨 기법을 구현해 보았다. 또한 구조문제에서 적응 웨이블렛 해석 기법이 없다는 점을 고려하여 웨이블렛 적응 해석 특성을 면밀히 고찰하였다.

경계 문제를 해결하기 위해서 본 연구에서는 경계에서의 변위 조건은 페널티 파라미터를 이용해서 조건 식을 강제로 부여하는 방법을 사용하였다. 실제 구조문제에의 응용은 비틀림-뒤틀림-찌그러짐을 받는 사각 박판보에 적용하였다.

## 2. 웨이블렛 해석

### 2.1 Daubechies 웨이블렛<sup>(1)</sup>

이 절에서는 본 연구에서 이용할 최소 구간에서 최대의 소멸 모멘트를 가지는 Daubechies 웨이블렛 중에서 미분이 가능한 웨이블렛을 살펴보고자 한다.  $p$  가 양의 정수이고 (1a)와 같은 행렬  $\mathbf{a}$  의 원소들이 (1b-c)의 성질을 지니는  $\mathbf{a}$  를 생

각하자.  $\delta$  는 크로네커 델타 함수이다.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{2p-1} \\ g_0 & g_1 & \cdots & g_{2p-1} \end{pmatrix} \quad (1a)$$

$$\sum_{k=0}^{2p-1} h_k h_{k+2l} = 2\delta_{l,0} \quad (1b)$$

$$\sum_{k=0}^{2p-1} g_k g_{k+2l} = 2\delta_{l,0} \quad (1c)$$

$$\sum_{k=0}^{2p-1} h_k = 2 \quad (1d)$$

$$\sum_{k=0}^{2p-1} g_k = 0 \quad (1e)$$

일반적으로  $h_k$  와  $g_k$  사이의 관계는 다음과 같이 정해진다.

$$g_k = (-1)^{k+1} h_{2p-1-k} \quad (2)$$

$\mathbf{a}$  의 원소를 이용하여 두 함수  $\phi, \psi$  를 (3a), (3b)로 정의한다.

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} h_k \phi(2x-k) \quad (3a)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} g_k \psi(2x-k) \quad (3b)$$

식 (3)의 두 함수  $\phi, \psi$  를 각각 스케일링 함수와 웨이블렛 함수라고 부르며 식 (4)와 같이 팽창과 병진에 관해서 일반적으로 정의한다. 단,  $k \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}^+$ 이며  $\mathbf{Z}$  와  $\mathbf{Z}^+$  는 각각 정수 및 양의 정수의 집합을 나타낸다.

$$\phi_k^j(x) := 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \quad (4a)$$

$$\psi_k^j(x) := 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad (4b)$$

위 웨이블렛 함수들이 지나는 일반적인 성질의 나열은 생략하고 소멸 모멘트와 함수가 정의되는 구간만 살펴보자.

$$\int_R \phi(x) dx = 1 \quad (5a)$$

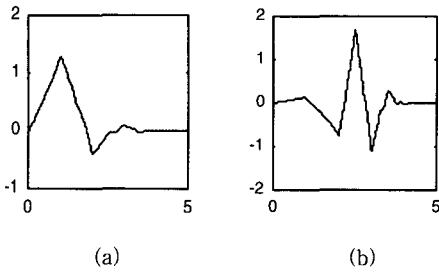


Fig. 1 The Daubechies (a) scaling function and (b) wavelet for  $p=3$

$$\int_{\mathbf{R}} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m=0, \dots, p-1 \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_k &= \text{supp } \psi_k^j & (5c) \\ &= \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+2p-1}{2^j} \right] \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{R}$  은 실수의 집합을 의미한다. 식 (5a)에서와 같이 스케일링 함수는 적분 값이 1이고 함수의 웨이블릿 변환시 유한구간에서 함수의 평균값을 측정한다. 그러나 웨이블릿 함수는 (5b)와 같이  $p$  차 미만의 다항함수를 모두 0으로 변환시키는 성질을 지니고 유한구간에서 함수의 급격한 변동을 측정한다. 이 때 웨이블릿 함수는  $p$  차의 소멸모멘트를 가진다고 한다. 따라서 웨이블릿 변환시 소멸 모멘트가 큰 웨이블릿을 사용하면 변환 후의 값들이 간략히 표현될 수 있는 장점을 지니는 반면 함수가 정의되는 구간은 (5b)에서와 같이 늘어난다. 본 연구에서는 소멸 모멘트  $p$  가 3인 Daubechies 웨이블릿을 사용하는데, 이것에 대한 스케일링 함수와 웨이블릿은 Fig. 1에 나타나 있다.

$$V_j := \text{span} \{ \phi_{j,k}, k \in \mathbf{Z} \} \quad (6a)$$

$$W_j := \text{span} \{ \psi_{j,k}, k \in \mathbf{Z} \} \quad (6b)$$

식 (6)에서와 같이  $\phi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$  를 각각 Riesz 기본함수로 하는 벡터공간  $V_j, W_j$  를 생각한다면 다음 (7)에서와 같이 웨이블릿의 다중 분해 특성을 정리할 수 있다.

$$0 \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} &\subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbf{R}) \\ &\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \text{ is dense in } L^2 \quad (7c)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad (7d)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x+1) \in V_{j+1} \quad (7e)$$

그리고 어떤 함수  $f(x)$  가  $V_j$  공간에서 근사되었을 경우 한 단계 해상도 높은  $V_{j+1}$  공간에서의 근사를 원한다면 그 함수의  $W_j$  공간에서의 근사된 값을 더해 주지만 하면 된다. 즉 식 (8a)과 같다.

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f \quad (8a)$$

$P_{V_j}, P_{W_j}$  는 각각  $L^2$  에서  $V_j, W_j$  공간으로의 직교 투영 연산자를 의미한다.  $V_j$  와  $W_j$  는 서로 직교하는  $L^2$  의 부분공간이며  $W_j, W_{j+1}$  역시 서로 직교한다. 이상의 성질을 정리하면 (8b), (8c)와 같다.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (8b)$$

$$V_0 \oplus \left[ \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right] = L^2(\mathbf{R}) \quad (8c)$$

2.2 함수의 근사화와 가상영역/폐널티의 도입  $\phi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$  가 각각  $V_j, W_j$  공간의 기저 함수이므로 임의의 함수  $f \in L^2(\mathbf{R})$  에 대하여 (8c)를 이용하면 식 (9a)와 같이 표현할 수 있다.

$$P_{V_{j+1}} f(x) = \quad (9a)$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} s_{0,k} \phi_{0,k} + \sum_{j=0}^j \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (9b)$$

$$s_{0,k} = \int_{\mathbf{R}} f(x) \phi_{0,k} dx \quad (9b)$$

$$d_{j,k} = \int_{\mathbf{R}} f(x) \psi_{j,k} dx \quad (9c)$$

그런데  $\phi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$  는 서로 직교하므로

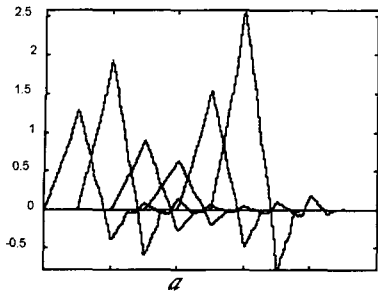


Fig. 2 Wavelets near a boundary "a"

$s_{0,k}, d_{j,k}$  는 (9b), (9c)와 같이 표현된다.  $s_{0,k}$  와  $d_{j,k}$  는  $\phi_{0,k}$  와  $\psi_{j,k}$  가 0이 아닌 구간에서의 함수  $f$  의 가중평균과 변동치를 의미한다. 식 (8c) 에 의해 다음 역시 성립한다.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{V_j} f = f$$

웨이블렛-갤러킨 방법을 설명하기 위해 먼저 다음과 같은 1차원 문제를 생각해 보자.

$$-\nabla^2 u = f, \quad \text{in } w \tag{10a}$$

$$u = 0, \quad \text{on } \partial w \tag{10b}$$

여기서  $\nabla$  는 그라디언트를 의미한다. 일차원 공간  $R$  의 구간  $[a, b]$  에서 정의된 Dirichlet 경계조건의 미분방정식 (10)을 생각하자.

경계  $a$  지점에서의 함수 값은 Fig. 2에서 알 수 있듯이 그 이전 영역에서의 웨이블렛 함수 값들의 선형결합으로 표현되어야 한다. 따라서 해석을 해야 할 영역은  $w \subset \Omega = [a-c, b+c]$ ,

$c \in R^+$  인 가상 영역  $\Omega$  이다. 여기서  $c$  의 값은 전체 행렬식의 크기에 직접적인 영향을 미치게 되므로 작을수록 좋다. (5c)의 함수 구간을 고려할 때  $c$  의 범위는  $c \geq (2p-2)/2^j$  로 주어진다.

$\partial w$  에서의 경계조건을 페널티 파라미터  $\epsilon$  을 도입해서 갤러킨 정식화한 식은 (11)과 같다.  $\epsilon$  이 0에 접근할수록  $u_\epsilon$  이 엄밀해에 접근한다는 것은 이미 수학적으로 증명된 바이다.<sup>(7)</sup>

$$\int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v d\Omega + \frac{1}{\epsilon} |(u_\epsilon - g)|_{\partial w} \tag{11}$$

$$= \int_{\Omega} f v d\Omega$$

식 (11)은 가상변위를 나타낸다.

### 2.3 문제의 정식화

해인  $u$  와 외력항인  $f$  를 다음과 같이  $V_j$  공간에 투영시킨다.

$$P_{V_j} u(x) = u_j(x) \tag{12a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_m-1} s_{m,k} \phi(2^m x - k) + \sum_{j=m}^{l-1} \sum_{k=0}^{n_j-1} d_{j,k} \psi(2^j x - k)$$

$$P_{V_j} f(x) = f_j(x) \tag{12b}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_m-1} f^s_{m,k} \phi(2^m x - k) + \sum_{j=m}^{l-1} \sum_{k=0}^{n_j-1} f^d_{j,k} \psi(2^j x - k)$$

$m$  은 영역  $\Omega$  를 분할하는 최소의 해상도를 의미하고  $m \leq J-1$  ( $m, J \in Z^+$ )이다. 또  $n_j = (b-a+2c) \times 2^j$  이고  $y=2^m x$  로 치환하여 식 (11)을 정리하면 (13)과 같은 최종 행렬식을 얻는다.

$$K d + \frac{1}{\epsilon} M d = F \tag{13a}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{13b}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \dots \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \dots \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{13c}$$

$$d = \{s_m, d_m, d_{m+1}, \dots, d_{J-1}\}^T \tag{13d}$$

$$F = \{f^s_m, f^d_m, f^d_{m+1}, \dots, f^d_{J-1}\}^T \tag{13e}$$

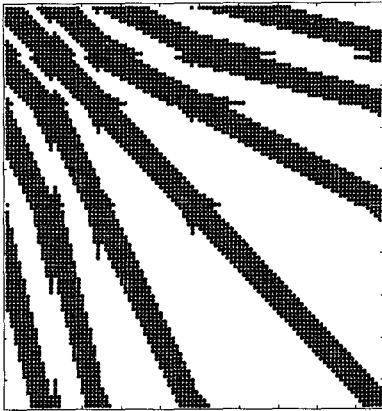


Fig. 3 Example of a circulant structure of the matrix  $K$

(13d-e)의  $d, F$  벡터는 웨이블릿 계수 벡터들을 원소로 하는 벡터이고 (13e)의 벡터  $F$  은 외력  $f(x)$ 를  $V_J$  공간에 투영시켜서 이미 알고 있는 외력항에 의한 벡터이다. (13b)의 행렬  $K$  의 부분행렬  $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  등은 문제가 정의되는 영역  $\Omega$  가 주기성을 가진다고 한다면 순환행렬이 되고 Fig. 3과 같이 원소들이 많이 비어있는 모습을 보이게 된다.  $K, M$  원소들의 일반식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{kl} &= 2^m \int_{\Omega} \phi'(y-k)\phi'(y-l)dy & (14) \\
 K_{1j}^{kl} &= K_{j1}^{kl} & (j \geq 2) \\
 &= 2^{m+j-2} \int_{\Omega} \phi'(y-k)\phi'(2^{j-2}y-l)dy \\
 K_{ij}^{kl} &= K_{ji}^{kl} & (i \geq 2, j \geq 2) \\
 &= 2^{m+i+j-4} \int_{\Omega} \phi'(2^{i-2}y-k)\phi'(2^{j-2}y-l)dy \\
 M_{11}^{kl} &= \sum_{y \in \Omega} \phi(y-k)\phi(y-l) \\
 M_{1j}^{kl} &= M_{j1}^{kl} & (j \geq 2) \\
 &= \sum_{y \in \Omega} \phi(y-i)\phi(2^{j-2}y-j) \\
 M_{ij}^{kl} &= M_{ji}^{kl} & (i \geq 2, j \geq 2) \\
 &= \sum_{y \in \Omega} \phi(2^{i-2}y-k)\phi(2^{j-2}y-l)
 \end{aligned}$$

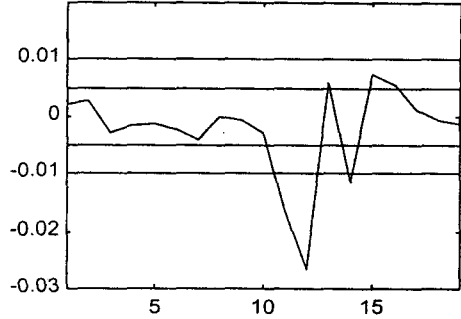


Fig. 4 Wavelet coefficients and two thresholding values ( $\epsilon_d$ : dotted,  $\epsilon_u$ : dashed)

식 (14)의 값을 연관계수<sup>(11)</sup>라고 하며 웨이블릿 갤러킨 해석 수행시 반드시 필요로 하는 계산과 정이다. 위 계산은 한번만 수행하면 모든 단계에서 그 값을 참고할 수 있다.

### 2.4 적응해석 기법

2.2절에서 살핀 바와 같이  $d_{j,k}$  는 유한구간의 함수의 변동을 나타낸다. 따라서 해가 급격한 양상을 보이지 않는 구간의  $d_{j,k}$  는 작은 값을 보이게 되고 이를 생략하더라도 전체 해의 수렴에 주는 영향은 무시할 수 있다.

Fig. 4의 웨이블릿 계수  $d_{j,k}$  의 분포에서 일정한 값  $\epsilon_d$  이하의 계수들이 전체 해의 변동에 주는 영향을 무시하고  $\epsilon_u$  이상의 계수 값을 지니는 절점 부근만 절점을 추가시킨다면 전체 계수의 개수 증가를 둔화시키면서 해가 급격한 변동을 보이는 지점을 더욱 세밀하게 해석할 수 있다.

적응해석 기법 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

- 해상도를  $J=m$  으로 하고 (9a)를 이용하여 함수  $u_J(x)$  를 근사시키고 문제를 해석한다.
- $d_{J-1,k}$  의 값을  $\epsilon'_d, \epsilon'_u$  ( $0 < \epsilon'_u < \epsilon'_d$ ) 와 비교하여  $\epsilon'_u$  보다 큰 계수는  $d_{J,k}$  를 Fig. 5와 같이 추가시킨다.  $\epsilon'_d$  보다 작은 계수는 전체에서 제외한다.

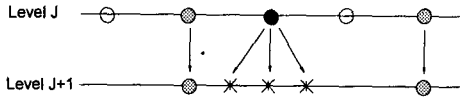


Fig. 5 Adaptive algorithm (white circle  $\langle \varepsilon_d$ ,  $\varepsilon_d \leq$  grey circle  $\langle \varepsilon_u$ , black circle  $\geq \varepsilon_u$ )

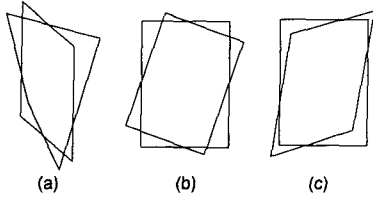


Fig. 6 Deformation of a thin-walled rectangular cross-section : (a) warping (out-of-plane motion), (b) rotation, (c) distortion

- $J=J+1$  에서 문제를 다시 해석한다.
- $\|u_{J+1} - u_J\|_{L^2} > \varepsilon_p$  이면 두 번째 단계로 돌아 간다.

위에서  $\varepsilon_d^j, \varepsilon_u^j$  의 값은 (15)와 같이 정했다.

$$\varepsilon_d^j = \text{Max}[s_{m,k} : k \in \{0.1, \dots, n_m - 1\}] \times 10^{-2} 2^{m-j} \quad (15a)$$

$$\varepsilon_u^j = 10 \varepsilon_d^j \quad (15b)$$

### 3. 박판보 해석에의 적용

폐단면 직사각형 박판보의 1차원 해석에 대한 기존 연구<sup>(8-10)</sup>에 따라 절점 자유도를 Fig. 6과 같은 단면에서 뒤틀림  $U$ , 회전  $\theta$ , 찌그러짐  $\chi$  로 설정하면 식 (16)와 같이 변위를 웨이블릿 공간에서 근사시킬 수 있다.

$$\theta_j = \sum_{k \in Z} s_{m,k}^\theta \phi_k^m + \sum_{j=m}^l \sum_{k \in Z} d_{j,k}^\theta \psi_j^k \quad (16)$$

$U, \chi$  에 대해서도 같은 방법으로 근사시킨다.

기존의 폐단면 박판보에 대한 연구<sup>(10)</sup>를 간략하게 정리하면 식 (17)과 같다. 폭  $b$ , 높이  $h$ , 두께  $t$  인 박판보의 경우 (17a)는 변형이 가해졌을 때 박판보가 지나는 포텐셜에너지를 표현하는 식이고  $a, b_1, b_2, c$  는 단면계수를 의미한다. (17a)의  $p_1$  은 뒤틀림 하중,  $q_1$  은 비틀림 하중,  $q_2$  는 찌그러짐 하중의 축방향 일차원 분포를 나타낸다. 또  $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$  이고,  $E, G$  와  $\nu$  는 각각 종탄성 계수, 횡탄성 계수, 푸와송 비이다.

$$\Pi = \int \left[ \frac{1}{2} a \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} c \chi^2 + \frac{1}{2} b_1 \{ U^2 + \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dz} \right)^2 \} + b_1 U \frac{d\chi}{dz} + b_2 U \frac{d\theta}{dz} + b_2 \frac{d\theta}{dz} \frac{d\chi}{dz} \right] dz - \int (p_1 U + q_1 \theta + q_2 \chi) dz \quad (17a)$$

$$a = \frac{E_1}{24} b^2 h^2 (b+h)t \quad (17b)$$

$$b_1 = \frac{G}{2} bh(b+h)t \quad (17c)$$

$$b_2 = \frac{G}{2} bh(b-h)t \quad (17d)$$

$$c = \frac{8E_1 t^3}{b+h} \quad (17e)$$

최소 포텐셜 에너지 원리를 이용하고 경계조건을 페널티 파라미터를 이용하여 부과한다면 문제는 (18a)를 최소화시키는 것과 동일해진다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{u}) \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{u}) d\Omega \quad (18a)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial \omega} \mathbf{u}^T (\mathbf{u} - \mathbf{g}) d\omega$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} U \\ \theta \\ \chi \end{pmatrix} \quad (18b)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} B \\ H \\ Q \end{pmatrix} \quad (18c)$$

식 (18c)에서  $B, H, Q$  는 각각 쌍모멘트, 비틀림모멘트 그리고 횡방향 쌍모멘트를 나타낸다. 그리고 식 (18a)에서  $\mathbf{g}$  는 경계에서의 기술된 변

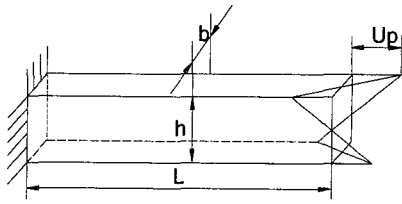


Fig. 7 A clamped thin-walled beam under unit warping at one end

위값을 나타낸다. 식 (18)에 2절에서 설명한 웨이블릿-갤러킨 기법을 적용하면 식 (19)와 같은 결과를 얻는다.

$$K d + \frac{1}{\epsilon} M d = F + \frac{1}{\epsilon} g \quad (19)$$

행렬  $K$  에는 연관계수의 계산이 필요하다.  $d$  는 웨이블릿 계수  $s_{j,k}$ ,  $d_{j,k}$  를 요소로 하는 벡터이며  $M, g$  는 변위 경계조건에 관계되는 행렬, 벡터이다.

#### 4. 폐단면 박판보 해석에의 적용

##### 4.1 단위 뒤틀림 변위가 작용할 경우

Fig. 7과 같이 일단 고정, 일단 자유인 박판보의 자유단에 단위 뒤틀림 변위 ( $U_p = 1\text{mm}$ )를 가할 때 회전 변위  $\theta$  의 분포를 1차원 유한요소 해석<sup>(8-10)</sup>결과와 비교하였다. ( $L=1\text{mm}$ ,  $b=0.05\text{mm}$ ,  $h=0.1\text{mm}$ , 두께  $0.001\text{mm}$ ,  $E=200\text{GN/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $G=76.9\text{GN/m}^2$ ). 벽면 경계에서의 뒤틀림, 비틀림, 찌그러짐은 모두 없으며 자유단 경계에서는 뒤틀림 변위만 존재할 뿐 나머지는 모두 0이다.

Fig. 7에서 알 수 있듯이 회전각은 보의 길이방향으로 지수함수의 거동을 하고 웨이블릿의 해상도가 높아갈수록 해는 수렴된 유한요소 해석 결과(요소 개수 30개)에 잘 일치해 감을 알 수 있다.

해상도가 한 단계씩 높아질수록 웨이블릿 계수의 개수는 두배로 늘어나고 강성행렬  $K$  의 크기 두배가 되지만 적응해석 기법을 이용하면 Table 1과 같이 크기의 증가가 둔화한다. 즉 크기가 크지 않은 웨이블릿 계수들은 문턱값  $\epsilon_d$  에

Table 1 The size of the system matrix ( IN : number of added grids, OUT : number of dropped grids )

Resolution	IN	OUT	Total
$J=3$			72 x 72
$J=4$	28	19	81 x 81
$J=5$	26	6	101 x 101

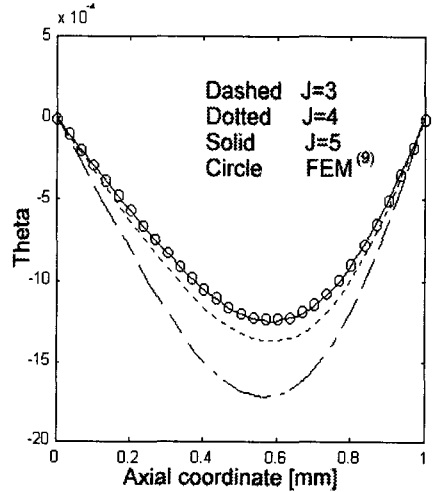


Fig. 8 The rotation angle distribution along the axial direction of a box beam under unit warping

의해 제거되지만 해의 정밀도는  $\epsilon_u$  보다 큰 계수들이 형성하는 한 해상도 높은 웨이블릿들로 인하여 유지될 수 있다.

##### 4.2 뒤틀림 없는 끝단에 짝힘이 작용하는 경우

다음은 경계조건으로 Fig. 9와 같이 박판보의 자유단에 단위 짝힘을 가할 때 찌그러짐 각  $\chi$  (단위: rad)의 분포를 구해보았다. 해석에 쓰인 박판보의 규격은  $L=1\text{mm}$ ,  $b=0.025\text{mm}$ ,  $h=0.05\text{mm}$ , 두께  $0.001\text{mm}$ 이고 물성치는 4.1과 동일하다. 끝단에 짝힘을 가했을 경우에는 비틀림 하중과 찌그러짐 하중을 동시에 가한 것이 된다. 여기서 주의해야 할 점은 가상 영역에 대한 고려이다. 비틀림 하중의 경우 가상 영역에 대한 정역학적 평형을 생각해 하중을 실제로 부여하고 싶은 크기 이상으로 주어야 하며 찌그러짐 하중은 결과력이 없으므로 실제보다 2배로 문제에 부과하여야만 한다. 즉 보의 길이가  $L$ , 가상영역을 좌우로

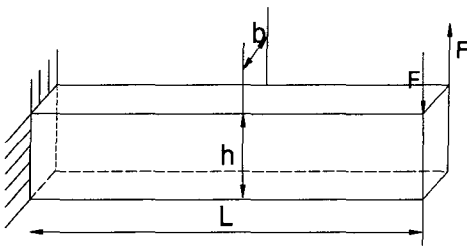


Fig. 9 A clamped thin-walled beam under unit couple at one end with warping restraint

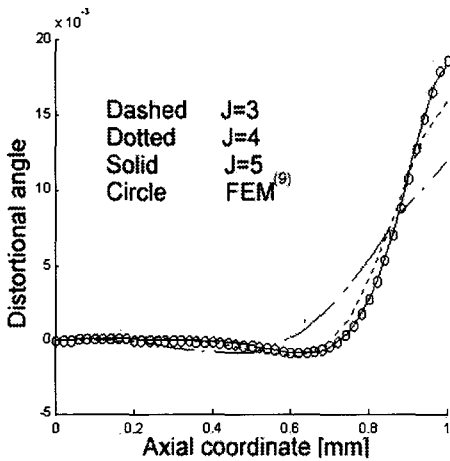


Fig. 10 The distortional angle distribution along the axial direction of a cantilevered box beam under unit couple force with warping restraint

$c$ 만큼 설정하며 끝단에 비틀림 하중을  $H$ , 찌그러짐 하중을  $Q$ 의 양 만큼 주고 싶다면 실제로는  $4cH/(L+2c)$ ,  $2Q$ 로 하중을 입력시켜야 한다. Fig. 10은 찌그러짐 각의 축방향 변화를 나타내는 그림이다. 보의 끝단에서 찌그러짐은 급격히 증가하는 양상을 보이며 이런 경우 웨이블릿은 많은 개수를 필요로 하게 된다. 하지만 벽면 부근의 보가 고정된 지점에서는 찌그러짐이 거의 발생하지 않으며 이 부근에서는 해의 변화가 없으므로 웨이블릿은 필요가 없게 된다. Fig. 11은 해상도의 증가에 따른 웨이블릿의 추가되는 양상을 보여준다. 고정 벽면에는 웨이블릿이 거의 없는 반면 자유단 부근에서는 해상도가 높아짐에 따라 많은 웨이블릿이 분포하게 된다.

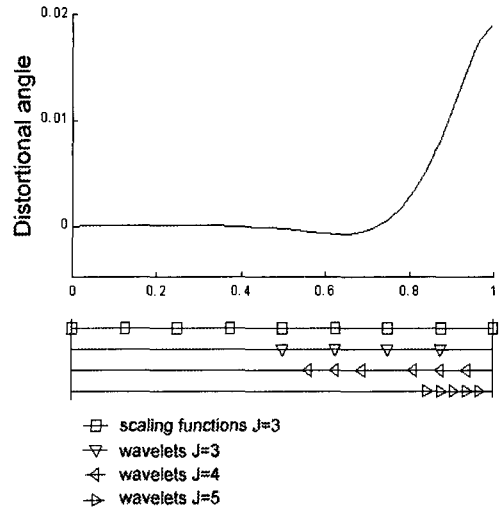


Fig. 11 Wavelets distribution for approximating the distortional deformation of the beam in Fig. 9

### 5. 결론

웨이블릿이 지니는 짧은 유한구간과 연속성, 소멸 모멘트 등의 특징은 급격히 변화하는 함수를 표현하는데 효과적이다. 본 연구에서는 최근 활발히 시도되고 있는 이러한 웨이블릿 적응해석 기법을 1차원 구조해석 문제에 처음으로 적용시켜 보았다. 다중 분해해석을 통한 적응해석 수행시 웨이블릿을 이용한 방법은 해가 급격한 변동을 보이는 경우 기존 유한요소해석방법의 적응해석에 비해 간단히 구현되며 그 효율 또한 크다. 반면 경계 조건의 처리에 있어서는 아직 유연성이 많이 떨어진다. 경계 문제를 해결하기 위해서 본 연구에서 사용한 가상 영역을 통한 접근방법은 구조물에 힘을 부여할 경우 이를 역학적으로 고려해서 실제 힘과 다른 힘을 다시 문제에 부여해야 하는 등 현실적으로 부적합한 면이 없지 않다. 그리고 페널티 파라미터로부터 기인하는 강성행렬의 높은 조건수 또한 무시할 수 없는 문제이다. 이러한 가상 영역의 문제점을 극복하기 위하여 현재 보간 웨이블릿을 이용하여 경계조건을 효율적으로 다룰 수 있는 기법을 연구 중에 있다.



## 참고문헌

- (1) Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press.
- (2) Wells, R. O. Jr, Rieder, Glowinski, A. and Zhou, X., 1993, "A Wavelet Multi-grid Preconditioner for Dirichlet Boundary Value Problems in General Domains," *Technical Report Computational, Mathematics Laboratory*. TR93-06, Rice University.
- (3) Kunoth, A., 1995, "Multilevel Preconditioning - Appending Boundary Conditions by Lagrange Multipliers," *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 4, pp. 145~170.
- (4) DeRuse, G. Jr, 1998, "Solving Topology Optimization Problems Using Wavelet-Galerkin Techniques," PhD thesis, Michigan State University.
- (5) Diaz, A. R., 1999, "A Wavelet-Galerkin Scheme for Analysis of Large-Scale Problems on Simple Domains," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 44, pp. 1599~1616.
- (6) Cohen, A., Dahmen, W. and DeVore, R., 1998, "Adaptive Wavelet Methods for Elliptic Operator Equations - Convergence Rates," *RWTH Aachen, IGPM Preprint No.* 165.
- (7) Wells, R. O. Jr and Zhou, X., 1993, "Wavelet Solutions for the Dirichlet Problem," *Technical Report Computational Mathematics Lab*. Technical Report, Rice University.
- (8) Kim, Y. Y. and Kim, J. H., 1999, "Thin-Walled Closed Box Beam Element for Static and Dynamic Analysis," *Int. J. Num. Methods Eng.* Vol. 45, pp. 473~490.
- (9) Kim, J. H. and Kim, Y. Y., 1999, "Analysis of Thin-Walled Closed Beams with General Quadrilateral Cross Sections," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. 904~912.
- (10) 김운영, 김진홍, 송상현, 1998, "비틀림을 받는 직사각 폐단면 박판보 유한요소 개발," *대한기계학회논문집 A권 제22권 제6호*, pp. 947~954.
- (11) Latto, A., Resnikoff, H. K. and Tenenbaum, E., 1991, "The Evaluation of Connection Coefficients of Compactly Supported Wavelets," *In Proceedings of the USA-French Workshop on Wavelets and Turbulance*, Princeton University.
- (12) Vasilyev, O. V., Yuen, D. A. and Paolucci, S., 1997, "Solving PDEs Using Wavelets," *Computers in Physics*, Vol. 11. No. 5.