

전기 절연 균열을 갖는 압전 세라믹 스트립의 세기 계수 결정

권종호* · 권순만* · 신정우* · 이강용**
(1999년 7월 30일 접수)

Determination of Intensity Factors in Piezoelectric Ceramic Strip with Impermeable Crack

Jong Ho Kwon, Soon Man Kwon, Jeong Woo Shin and Kang Yong Lee

Key Words : Piezoelectric Ceramic(압전 세라믹), Anti-Plane Shear(면외 전단), Intensity Factor(세기 계수), Energy Release Rate(에너지 해방률), Integral Transforms(적분 변환)

Abstract

Using the theory of linear piezoelectricity, we consider the problem of piezoelectric ceramic infinite strip containing a finite crack with free surface traction and surface charge under anti-plane shear. The crack is symmetrically parallel to the edges of infinite strip. Fourier transforms are used to reduce the problem to two pairs of dual integral equations, which are then expressed in terms of Fredholm integral equations of the second kind. Numerical results for PZT-5H ceramic are obtained and discussed.

기호설명

- u_i : 변위 벡터
- σ_{ij} : 응력 텐서
- ϵ_{ij} : 변형률 텐서
- ϕ : 전위
- E_i : 전기장
- D_i : 전기 변위
- C_{ijkl} : 탄성 계수
- e_{kij} : 압전 상수
- ϵ_{ij} : 유전율

1. 서론

1880년에 Curie 형제가 기계적 하중을 받으면 전하(charge)를 발생시키고 전기적 하중하에서는 응력(stress)을 발생시키는 압전 현상을 발견한 후, 압전 세라믹은 가진기(actuator), 센서(sensor) 등의 다양한 공학 분야에서 널리 응용되고 있다. 기계적 하중과 전기적 하중이 동시에 작용하는 경우 균열(crack)과 같은 내부 결함은 압전 재료를 이용한 장치의 성능에 미치는 영향이 크므로, 이에 대한 연구가 최근에 매우 활발히 진행되고 있다.

Parton⁽¹⁾과 Deeg⁽²⁾이 이론적인 관점에서 압전 재료에 관한 결함(defect)과 파괴 역학(fracture mechanics)적인 문제를 제시한 이후로, Pak⁽³⁾은 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 무한한 크기의 압전 재료에 존재하는 균열 선단(crack tip)에서의 응력(stress)과 전기변위(electric displacement) 등의 엄밀해(closed form solution)를 복소 변수 방법(complex variable approach)을 이용

* 연세대학교 기계공학과 대학원
 ** 회원, 연세대학교 기계전자공학부 기계공학전공
 E-mail : fracture@yonsei.ac.kr
 TEL : (02)361-2813 FAX : (02)361-2813

하여 구하였다. Park과 Sun⁽⁴⁾은 같은 모델과 방법을 이용하여 3가지 파괴 역학 모드(mode)에 대한 엄밀해를 제시하였으며, 최근에는 Kwon과 Lee⁽⁵⁾가 유한한 크기의 사각형 모델에 대한 해를 제시하였다.

그러나 이와 같은 압전 재료에 대한 경계치 문제에 적용되는 균열면의 전기적 경계 조건(crack face electrical boundary condition)에 대해서는 두 가지 상반되는 이론이 존재하고 있다.

Parton,⁽¹⁾ Zhang과 Hak,⁽⁶⁾ Hao와 Shen,⁽⁷⁾ 그리고 Dunn⁽⁸⁾ 등은 균열 상하면에 존재하는 전기 변위는 같다는 도전 조건(permeable condition)의 타당성을 제시하였고, 이와는 반대로 Sosa⁽⁹⁾와 Pak^(3,10) 등 여러 연구자들은 균열면에는 표면 전하(surface charge)가 존재하지 않기 때문에 전기 변위가 발생하지 않는다는 절연 조건(impermeable condition)을 제안하였고, Kumar와 Singh⁽¹¹⁾은 유한 요소법(FEM)을 이용하여 절연 조건의 타당성을 제시하였다. 또한 Shindo 등^(12,13)은 균열면의 전기적 도전 조건과 유사한 특유의 경계 조건을 적용하여 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 압전 세라믹 무한스트립(piezoelectric ceramic infinite strip)에 수직한 균열과 평행한 균열에 대한 해를 적분 변환법(integral transform method)을 이용하여 구하였다.

그러나 아직까지는 균열면의 전기적 경계 조건에 대해 확실히 검증된 바는 없으며, 연구자들에 따라 다른 결과들을 제시하고 있다.

본 연구에서는 선형 압전 이론(theory of linear piezoelectricity)을 이용하여 기계적 전단 하중(out-of-plane mechanical load)과 전기적 평면 하중(in-plane electrical load)을 동시에 받는 압전 세라믹 무한 스트립을 고려하고, 상하 양쪽 끝단의 중앙에 평행하게 존재하는 유한한 크기의 균열(Griffith crack)에 대하여 균열면의 전기적 절연 조건을 적용한 경우의 해를 적분 변환법을 이용하여 구하였다. 푸리에 변환(Fourier transform)을 이용하여 복합 적분 방정식(dual integral equation)을 구성하였으며, 이를 제 2종 Fredholm 적분 방정식(Fredholm integral equation of the second kind)으로 표현하여 해를 구하였다. 또한 PZT-5H 세라믹의 응력세기계수(stress intensity factor)와 에너지 해방률(energy release rate)에 대한 수치 결과를 제시하였다.

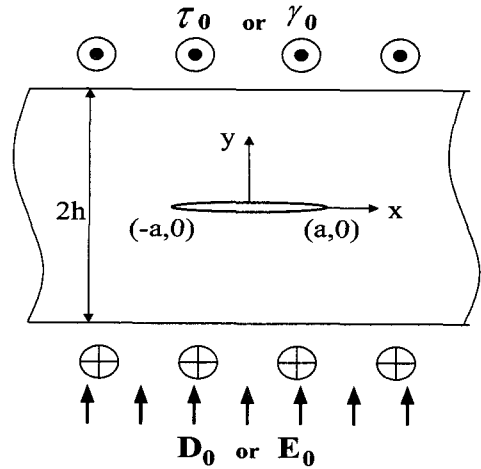


Fig. 1 Finite crack parallel to piezoelectric ceramic infinite strip

2. 해석 모델의 수학적 표현

Fig. 1에 나타난 해석 모델과 같이 x축으로 무한한 가로 등방성(transversely isotropic) 압전 세라믹 스트립에 길이 2a의 균열이 상하(y축) 대칭되는 중앙에 위치하고, 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중이 동시에 작용하는 경우에 대해 고려하였다. 따라서 모델의 형상과 작용 하중은 대칭성을 가지므로 $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq h$ 의 영역에 대해서만 검토하였다.

압전 재료의 경계치 문제는 면외 전단 변위와 평면 전기장이 작용할 때 단순화된다.

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = w(x, y) \quad (1)$$

$$E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0 \quad (2)$$

이 경우 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{zx} = c_{44}\gamma_{zx} - e_{15}E_x, \quad \sigma_{zy} = c_{44}\gamma_{zy} - e_{15}E_y \quad (3)$$

$$D_x = e_{15}\gamma_{zx} + \epsilon_{11}E_x, \quad D_y = e_{15}\gamma_{zy} + \epsilon_{11}E_y \quad (4)$$

여기서 $(\sigma_{zx}, \sigma_{zy})$ 와 $(\gamma_{zx}, \gamma_{zy})$ 는 응력과 변형률의 성분, (D_x, D_y) 와 (E_x, E_y) 는 전기 변위와 전기장의 성분을 나타낸다. 또한 c_{44} 는

탄성계수(elastic stiffness measured in a constant electric field), e_{15} 는 압전 상수(piezoelectric constant), ϵ_{11} 는 유전율(dielectric permmissibility measured at a constant strain)을 의미한다.

전기장과 전위(electric potential) ϕ 와의 관계식은 다음과 같다.

$$E_x = -\phi_{,x}, \quad E_y = -\phi_{,y} \quad (5)$$

전단 하중하에서의 지배방정식은 다음과 같다.

$$c_{44} \nabla^2 w + e_{15} \nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

$$e_{15} \nabla^2 w - \epsilon_{11} \nabla^2 \phi = 0 \quad (7)$$

여기서 ∇^2 은 2차원 라플라스 연산자(Laplace operator)이다.

본 모델에 대한 경계 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{zy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < a) \quad (8)$$

$$w(x, 0) = 0 \quad (a \leq x \leq \infty) \quad (9)$$

$$D_y(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < a) \quad (10)$$

$$\phi(x, 0) = 0 \quad (a \leq x \leq \infty) \quad (11)$$

$$\text{(Case 1)} \quad \sigma_{zy}(x, h) = \tau_0, \quad D_y(x, h) = D_0 \quad (12)$$

$$\text{(Case 2)} \quad \gamma_{zy}(x, h) = \gamma_0, \quad E_y(x, h) = E_0 \quad (13)$$

$$\text{(Case 3)} \quad \sigma_{zy}(x, h) = \tau_0, \quad E_y(x, h) = E_0 \quad (14)$$

$$\text{(Case 4)} \quad \gamma_{zy}(x, h) = \gamma_0, \quad D_y(x, h) = D_0 \quad (15)$$

여기서 τ_0 는 균일 전단 응력(uniform shear stress), γ_0 는 균일 전단 변형률(uniform shear strain), E_0 는 균일 전기장(uniform electric field), D_0 는 균일 전기 변위(uniform electric displacement)를 의미한다.

3. 적분 변환을 이용한 해법

3.1 해석 모델에 대한 적분 변환의 적용

지배방정식 (6)과 (7)에 푸리에 변환을 적용하면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{A_1(a) \cosh(\alpha y) + A_2(a) \sinh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da + a_0 y \quad (16)$$

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{B_1(a) \cosh(\alpha y) + B_2(a) \sinh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da - b_0 y \quad (17)$$

여기서 $A_i(a)$ 와 $B_i(a)$ ($i=1, 2$)는 미지 함수(unknown function)이며, a_0 와 b_0 는 해석 모델의 상하 끝단에 작용하는 하중 조건(edge loading conditions)으로부터 결정되는 상수이다.

식 (16)과 (17)을 이용하면 관계식들로부터 다음과 같은 결과들을 구할 수 있다.

$$\gamma_{zy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{A_1(a) \sinh(\alpha y) + A_2(a) \cosh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da + a_0 \quad (18)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{B_1(a) \sinh(\alpha y) + B_2(a) \cosh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da + b_0 \quad (19)$$

$$\sigma_{zy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{c_{44}A_1(a) + e_{15}B_1(a)\} \sinh(\alpha y) + \{c_{44}A_2(a) + e_{15}B_2(a)\} \cosh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da + c_0 \quad (20)$$

$$D_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{e_{15}A_1(a) - \epsilon_{11}B_1(a)\} \sinh(\alpha y) + \{e_{15}A_2(a) - \epsilon_{11}B_2(a)\} \cosh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) da + d_0 \quad (21)$$

여기서,

$$c_0 = c_{44}a_0 - e_{15}b_0, \quad d_0 = e_{15}a_0 + \epsilon_{11}b_0 \quad (22)$$

식 (12)~(15)와 (18)~(22)에 의해, 상수 c_0 , d_0 와 미지 함수의 관계식을 결정할 수 있다.

$$\text{(Case1)} \quad c_0 = \tau_0, \quad d_0 = D_0 \quad (23)$$

$$\text{(Case2)} \quad c_0 = c_{44}\gamma_0 - e_{15}E_0, \quad d_0 = e_{15}\gamma_0 + \epsilon_{11}E_0 \quad (24)$$

$$\text{(Case3)} \quad c_0 = \tau_0, \quad d_0 = \frac{e_{15}}{c_{44}}\tau_0 + \left(\epsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}}\right)E_0 \quad (25)$$

$$\text{(Case4)} \quad c_0 = \left(c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}\right)\gamma_0 - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}D_0, \quad d_0 = D_0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A_2(a) &= -\tanh(ah)A_1(a) \\ B_2(a) &= -\tanh(ah)B_1(a) \end{aligned} \quad (27)$$

균열선상에서의 혼합 경계 조건 (8)과 (9), 그리고 (10)과 (11)을 만족하는 두 개의 복합 적분방정식(dual integral equation)은 다음과 같다.

$$\int_0^\infty a \tanh(ah)A_1(a) \cos(ax) da = \frac{\pi}{2} \frac{\epsilon_{11}c_0 + e_{15}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \quad (0 \leq x < a)$$

$$\int_0^\infty A_1(a) \cos(ax) da = 0 \quad (a \leq x < \infty) \quad (28)$$

$$\int_0^\infty a \tanh(ah)B_1(a) \cos(ax) da = \frac{\pi}{2} \frac{e_{15}c_0 - c_{44}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \quad (0 \leq x < a)$$

$$\int_0^\infty B_1(a) \cos(ax) da = 0 \quad (a \leq x < \infty) \quad (29)$$

식 (28)과 (29)의 해는 함수 $\Phi_1(\xi)$ 와 $\Phi_2(\xi)$ 를 다음과 같이 정의하여 구할 수 있다.

$$A_1(a) = \int_0^a \xi \Phi_1(\xi) J_0(a\xi) d\xi \quad (30)$$

$$B_1(a) = \int_0^a \xi \Phi_2(\xi) J_0(a\xi) d\xi \quad (31)$$

여기서 $J_0(\)$ 는 영차 제1종 Bessel 함수(zero-order Bessel function of the first kind)이다.

식 (30)과 (31)을 식 (28)과 (29)에 대입하면, 함수 $\Phi_1(\xi)$ 와 $\Phi_2(\xi)$ 는 다음과 같은 제2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of the second kind)의 해가 된다.

$$\Phi_1(\xi) + \int_0^a K(\xi, \eta) \Phi_1(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} \frac{\epsilon_{11}c_0 + e_{15}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \quad (32)$$

$$\Phi_2(\xi) + \int_0^a K(\xi, \eta) \Phi_2(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} \frac{e_{15}c_0 - c_{44}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \quad (33)$$

여기서,

$$K(\xi, \eta) = \xi \int_0^\infty a [\tanh(ah) - 1] J_0(a\eta) J_0(a\xi) da \quad (34)$$

식 (32)~(34)를 무차원화 시키기 위하여 정의된 변수와 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{S}{a}, \quad \xi = aE, \quad \eta = aH \\ \Phi_1(\xi) &= \frac{\pi}{2} \frac{\epsilon_{11}c_0 + e_{15}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \frac{\Psi_1(E)}{\sqrt{E}} \\ \Phi_2(\xi) &= \frac{\pi}{2} \frac{e_{15}c_0 - c_{44}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \frac{\Psi_2(E)}{\sqrt{E}} \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)를 식 (32)~(34)에 대입하면, 무차원화된 제2종 Fredholm 적분방정식을 구할 수 있다.

$$\Psi_1(E) + \int_0^1 L(E, H) \Psi_1(H) dH = \sqrt{E} \quad (36)$$

$$\Psi_2(E) + \int_0^1 L(E, H) \Psi_2(H) dH = \sqrt{E} \quad (37)$$

여기서,

$$\begin{aligned} L(E, H) &= \sqrt{EH} \int_0^\infty S [\tanh(Sh/a) - 1] \\ &\quad J_0(SH) J_0(SE) dS \end{aligned} \quad (38)$$

3.2 세기 계수와 에너지 해방률

파괴 역학(fracture mechanics)에서 다루어지는 응력세기계수(stress intensity factor)의 개념을 다른 변수들에 대하여 확장하여 적용하면, 균열 부근에서의 세기 계수(intensity factor)들을 다음과 같이 정의하고 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} K^e &\equiv \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \gamma_{xy}(x, 0) \\ &= \frac{\epsilon_{11}c_0 + e_{15}d_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \sqrt{\pi a} \Psi_1(1) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} K^E &\equiv \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} E_y(x, 0) \\ &= \frac{c_{44}d_0 - e_{15}c_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \sqrt{\pi a} \Psi_1(1) \end{aligned} \quad (40)$$

$$K^\sigma = K_{III} \equiv \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_{xy}(x, 0) = c_0 \sqrt{\pi a} \Psi_1(1) \quad (41)$$

$$K^D \equiv \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} D_y(x, 0) = d_0 \sqrt{\pi a} \Psi_1(1) \quad (42)$$

여기서 K^ϵ 는 변형률세기계수, K^E 는 전기장 세기계수, K^σ 는 응력세기계수, K^D 는 전기변위 세기계수를 의미한다.

면의 전단 하중을 받는 경우의 에너지 해방률 (energy release rate)은 일반화된 J 적분 값과 동일하다는 연구 결과⁽³⁾를 이용하면, 균열 선단 (crack tip)에서의 J 적분 결과식은 에너지 해방률 G 를 의미한다.

$$J = G = \frac{K^\epsilon K^\sigma - K^E K^D}{2} \quad (43)$$

식 (43)에 각 세기 계수를 대입하면 에너지 해방률을 결정할 수 있으며, 이 식에 4가지 경계 조건에 해당하는 상수 c_0 와 d_0 를 적용하면 각 경우에 대한 결과를 얻을 수 있다.

$$J = \frac{\pi a}{2} \frac{\epsilon_{11} c_0^2 - c_{44} d_0^2}{c_{44} \epsilon_{11} + e_{15}^2} \Psi_1^2(1) \quad (44)$$

또한, 두께가 무한한 압전 재료의 경우의 에너지 해방률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J_\infty = \frac{\pi a}{2} \frac{\epsilon_{11} c_0^2 - c_{44} d_0^2}{c_{44} \epsilon_{11} + e_{15}^2} \quad (45)$$

4. 수치 결과에 대한 고찰

적분 변환법을 이용하여 구한 응력세기계수와 에너지 해방률에 대한 기계적 하중과 전기적 하중의 영향을 알아보기 위해서 식 (36)과 (37)을 가우스 수치 적분(Gaussian quadrature)를 이용하여 수치적으로 계산하였다. 또한 반무한 적분 구간을 갖는 적분핵(integral kernel) $L(\mathcal{E}, H)$ 는 Gauss-

Laguerre 적분 방법을 이용하여 구하였다. 수치 해석을 위해 적용한 압전 재료는 일반적으로 많이 사용되는 PZT-5H 세라믹을 고려하였으며, 이에 대한 탄성 계수, 압전 상수, 유전율 및 임계 에너지 해방률은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$c_{44} = 3.53 \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}, \quad e_{15} = 17.0 \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\epsilon_{11} = 151 \times 10^{-10} \text{ (C/Vm)}, \quad J_{cr} = 5.0 \text{ (J/m}^2\text{)}$$

여기서 N (Newton)은 힘, C (coulomb)은 전하, V (volt)는 전압, m (meter)는 길이의 단위이다.

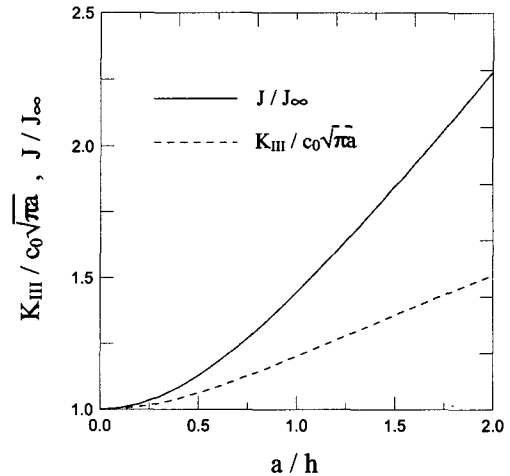


Fig. 2 Stress intensity factor and energy release rate vs. a/h

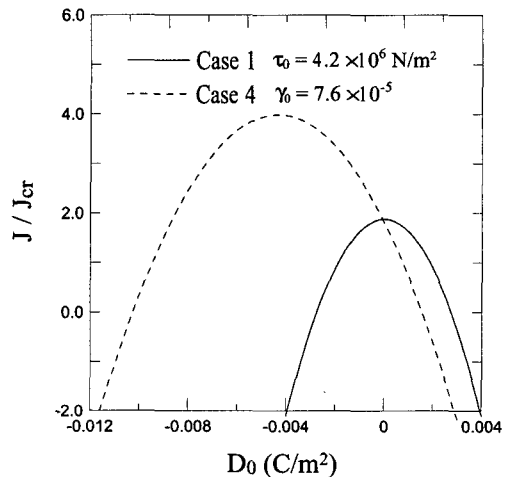


Fig. 3 Energy release rate of PZT-5H ($a=0.01m$, $a/h=1$)

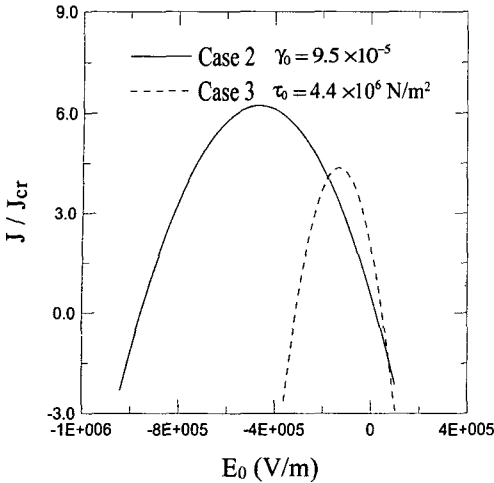


Fig. 4 Energy release rate of PZT-5H ($a = 0.01\text{ m}$, $a/h = 1$)

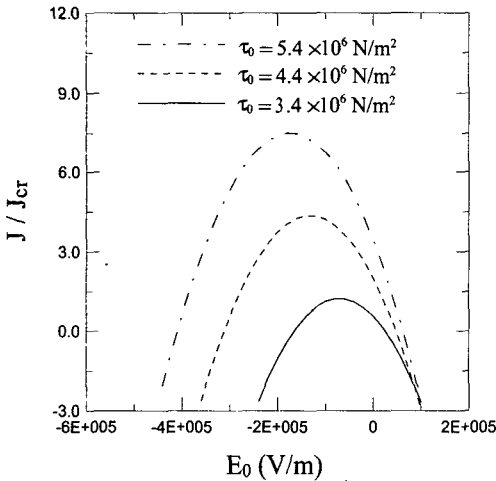


Fig. 5 Energy release rate of PZT-5H in Case 3 ($a = 0.01\text{ m}$, $a/h = 1$)

Fig. 2는 무차원 균열 길이(a/h)에 대한 무차원화된 응력세기계수($K_{III}/c_0\sqrt{\pi a}$)와 에너지 해방률(J/J_∞)의 변화를 보여준다. 응력세기계수와 에너지 해방률 모두 무차원 균열 길이가 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다.

Fig. 3과 4는 전기적 하중(D_0, E_0)에 대한 무차원 에너지 해방률(J/J_{cr})의 변화를 나타내었다. 전기적 하중의 음수(negative value)가 나타내는 것은 전기적 하중의 방향이 바뀌는 것을 의미하

며, 전기적 하중의 절대값이 0(zero)에서부터 증가하면 에너지 해방률은 전기적 하중의 방향에 따라 증가하거나 감소함을 알 수 있다. 그러나 에너지 해방률이 일단 최고값에 도달한 이후에는 전기적 하중이 더 증가한다 하더라도 에너지 해방률은 감소하게 됨을 보여준다.

Fig. 5는 기계적 하중의 변화가 에너지 해방률에 미치는 영향을 보여준다. 기계적 하중이 증가하면 에너지 해방률도 증가함을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 선형 압전 이론을 이용하여 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 압전 세라믹 무한 스트립에 존재하는 유한한 크기의 균열에 대하여 고려하였으며, 균열면의 전기적 절연 조건을 적용하여 각 세기 계수와 에너지 해방률을 결정하였다. 수치 해석을 이용한 결과는 해석 모델에 대한 응력세기계수와 에너지 해방률이 균열 길이의 증가와 함께 증가함을 보였으며, 전기적 하중의 크기와 방향의 영향에 따라 에너지 해방률은 증가하거나 감소하게 됨을 나타내었다. 또한 압전 재료에서도 에너지 해방률은 기계적 하중의 증가에 비례한다는 것을 확인하였다.

후 기

본 논문은 한국학술진흥재단 두뇌한국 21 사업과 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Parton, V. Z., 1976, "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Acta Astronautica*, Vol. 3, pp. 671 ~ 683.
- (2) Deeg, W. F., 1980, "The Analysis of Dislocation, Crack, and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids," Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA.
- (3) Pak, Y. E., 1990, "Crack Extension Force in a

- Piezoelectric Material," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (4) Park, S. B. and Sun, C. T., 1995, "Effect of Electric Field on Fracture of Piezoelectric Ceramics," *International Journal of Fracture*, Vol. 70, pp. 203~216.
- (5) Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 1999, "Analysis of Stress and Electric Fields in a Rectangular Piezoelectric Body with a Center Crack Under Anti-Plane Shear Loading," *International Journal of Solids and Structures*, in press.
- (6) Zhang, T. Y. and Hack, J. E., 1992, "Mode III Cracks in Piezoelectric Materials," *Journal of Applied Physics*, Vol. 71, pp. 5865~5870.
- (7) Hao, T. H. and Shen, Z. Y., 1994, "A New Electric Boundary Condition of Electric Fracture Mechanics and Its Applications," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, pp. 793~802.
- (8) Dunn, M. L., 1994, "The Effects of Crack Face Boundary Conditions on the Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48, pp. 25~39.
- (9) Sosa, H., 1992, "On the Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, pp. 2613~2622.
- (10) Pak, Y. E., 1992, "Linear Electroelastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *International Journal of Fracture*, Vol. 54, pp. 79~100.
- (11) Kumar, S. and Singh, R. N., 1997, "Influence of Applied Electric Field and Mechanical Boundary Condition on the Stress Distribution at the Crack Tip in Piezoelectric Materials," *Materials Science and Engineering*, A231, pp. 1~9.
- (12) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., 1996, "Electroelastic Intensification Near Anti-Plane Shear Crack in Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 25, pp. 65~71.
- (13) Shindo, Y., Tanaka, K. and Narita, F., 1997, "Singular Stress and Electric Fields of a Piezoelectric Ceramic Strip with a Finite Crack Under Longitudinal Shear," *Acta Mechanica*, Vol. 120, pp. 31~45.