

이방성비가 큰 직교이방성체의 반 무한 균열에 대한 동적 응력확대계수에 관한 연구

백운철* · 황재석**
(1999년 7월 20일 접수)

Dynamic Stress Intensity Factors of the Half Infinite Crack in the Orthotropic Material Strip with a Large Anisotropic Ratio

Un-Cheol Baek and Jai-Sug Hawong

Key Words: Orthotropic Material(직교이방성체), Strip(띠형 부재), Shear Wave Velocity(전단파 속도), Fourier Transformation(푸리에 변환), Wiener-Hopf Technique(Wiener-Hopf 법), Dynamic Stress Intensity Factor(동적 응력확대계수), Normal Impact Load(수직 충격하중), Crack Surface(균열표면), Anisotropic Ratio(이방성비), Half Infinite Crack(반무한 균열).

Abstract

When the half infinite crack in the orthotropic material strip with a large anisotropic ratio($E_{11} \gg E_{22}$) propagates with constant velocity, dynamic stress component σ_y , occurred along the x axis is derived by using the Fourier transformation and Wiener-Hopf technique, and the dynamic stress intensity factor is derived. The dynamic stress intensity factor depends on a crack velocity, mechanical properties and specimen height. The normalized dynamic stress intensity factors approach the maximum values when normalized time(= C_S/a) is about 2. They have the constant values when the normalized time is greater than or equal to about 2, and decrease with increasing a/h (h : specimen height, a : crack length) and the normalized crack propagation velocity(= c/C_S , C_S : shear wave velocity, c : crack propagation velocity).

1. 서론

유한 경계조건의 영향을 받는 복합체의 동적 균열문제는 아직도 많이 해결되지 않았다. 단지 몇몇의 개구모드의 경우만 해결되었다. 그리고 Kevlar나 Graphite 섬유 등과 같이 강한 방향성을 갖는 섬유로 구성된 구조물의 동적 특성을 알기 위해서 구조물의 균열첨단에서의 동적 응력확대계수에 대한 지식이 반드시 필요하다. Chen과

Sih⁽¹⁾가 등방성체의 반 무한 균열 문제를 연구한 이후로 많은 연구자들이 반 무한 균열의 동적 문제를 연구하여 왔다.

Nilsson⁽²⁾은 모드 I 하중을 받는 등방성체의 띠형 부재에 대한 동적 파괴 문제에 대하여 이론적으로 연구하였고, Chen과 Sih⁽¹⁾와 Nilsson⁽²⁾은 충격하중에 지배를 받는 반 무한 균열을 포함하는 유한판에서의 응력확대계수는 균열전파속도에 의존한다고 주장하였다. 그리고 Freund⁽³⁾은 반 무한 균열을 갖는 등방성체의 균열표면에 수직 충격하중이 작용하는 경우의 응력확대계수를 이론적으로 연구하였고, Kim⁽⁴⁾은 그것을 실험적으로 연구하였다. Yu와 Chen⁽⁵⁾은 비평면 충격하중하에서 균열이 내재된 압전기의 띠형 부재의 동적 응력확대계수를 연구하였고, 그리고 Wellmar, Fellers,

* 영남대학교 대학원 기계공학과
** 회원, 영남대학교 기계공학부
E-mail : jshawong@yeungnam.ac.kr
TEL : (053)810-2445 FAX : (053)813-3703

Nilsson, 그리고 Delhage⁽⁶⁾는 반 무한 균열을 가진 종이(paper)의 띠형 부재에 파괴역학을 적용하였다. Georgiadis와 Rigatos⁽⁷⁾는 적분변환 이론을 사용하여 균열 표면에 집중 충격하중이 작용하는 반 무한 균열이 내제된 점탄성체의 띠형 부재에 대한 천이 응력확대계수를 연구하였다. Yu와 Chen⁽⁵⁾과 Georgiadis와 Rigatos⁽⁷⁾의 연구에 따르면 등방성체의 무차원화한 동적 응력확대계수(dynamic stress intensity factor)는 무차원화한 시간이 약 2.2일 때 절정에 이른다라고 주장하였다.

Nilsson,⁽²⁾ Baker,⁽⁸⁾ Georgiadis와 Charalambakis,⁽⁹⁾ 그리고 Parton과 Boriskovsky⁽¹⁰⁾ 등은 적분 변환 기술과 Wiener-Hopf 법(technique)⁽¹¹⁾을 사용하여, 등방성체 무한판의 균열표면에 수직 충격하중이 갑자기 작용할 때 발생하는, 동적 응력확대계수를 연구하였다. 지금까지의 연구 문헌에 의하면, 모드 I 하중의 지배를 받고 그리고 반 무한 균열을 갖는 등방성체에 대한 동적 응력은 띠형 부재를 사용하여 유효하게 구할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 이방성비가 큰 복합체의 띠형 부재(strip)에 대하여 Wiener-Hopf 법을 적용하여 동적 응력확대계수를 구한 경우는 없다.

본 연구에서는 푸리에변환에 의한 점근선적인 특성과 Wiener-Hopf 법을 사용하여 동적 모드 I (Mode I) 하중을 받는 이방성비가 큰 직교이방성체의 띠형 부재(strip)의 반무한 균열에 대한 동적 응력확대계수를 구하였다. 그리고 무차원 균열전파속도(c/C_s)와 무차원 시간($C_s t/a$)과 시편의 높이(h)에 대한 동적 응력확대계수의 관계를 제시하였다.

2. 기본이론

2.1 지배방정식

본 연구는 Fig. 1과 같이 충격하중을 받고, 시편의 높이가 $2h$ 인, 복합체의 긴 띠의 수평 중심선에 반 무한 균열이 존재하는 직교이방성체의 평면문제에 대한 것이다. Fig. 1의 고정 직교좌표(X, Y)의 원점은 시간 $t=0$ 일 때 균열첨단이다. 균열첨단의 보조 직교좌표(x, y)는 균열첨단을 원점으로 하는 이동 직교좌표이다. 이동 보조 직교좌표축을 고정 직교좌표축으로 나타내면 $x = X - ct$, $y = Y$ 가 된다. 직교좌표축 X, Y 는 탄성

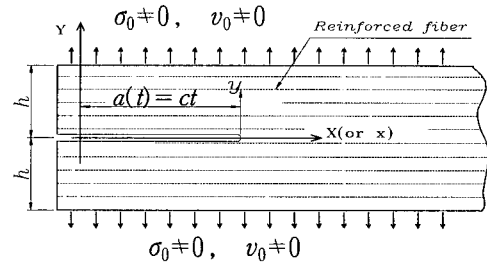


Fig. 1 The orthotropic material strip with a half infinite crack at time t

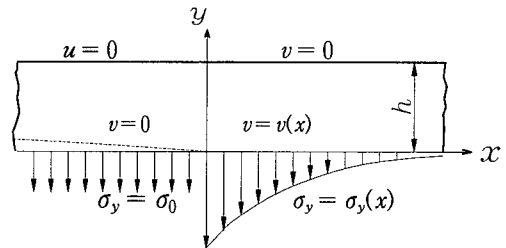


Fig. 2 Boundary condition by the principle of superposition

주축과 일치하고, 균열길이는 $a(t) = ct$ 이고 $y = \pm 0$ 인 X 축 방향으로 전파된다고 가정한다. 이때 c 는 균열전파속도, t 는 시간이다. Fig. 1과 같이 시편의 가장자리에 균일한 충격하중 σ_0 가 작용하는 경우의 경계조건은 중첩의 원리⁽¹²⁾에 의하여 Fig. 2와 같은 시편의 균열표면에 균일한 충격하중 σ_0 가 작용하는 경우의 경계조건으로 변환할 수 있다. 균열은 등속도 c 로 X 축 방향으로 전파하고 있다고 가정한다. $t > 0$ 일 때에 중첩에 의한 경계조건은 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y, t) &= \sigma_y(x), v(x, y, t) = 0, x > 0, y = 0 \\ \sigma_y(x, y, t) &= \sigma_0, v(x, y, t) = v(x), x < 0, y = 0 \\ v(x, y, t) &= 0, |x| < \infty, y = \pm h \end{aligned} \quad (1)$$

물체력이 없고 재료가 연속이라면 Fig. 1의 $X-Y$ 평면에서 변위 $u(X, Y, t)$ 와 $v(X, Y, t)$ 는 식 (2)와 같은 운동방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_X}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

재료의 좌표축 X, Y 에 대한 응력과 변형률관계는 평면응력하에서 식 (3)과 같고, 그리고 식 (3)의 계수 $c_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 는 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_X &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial X} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \sigma_Y &= c_{12} \frac{\partial u}{\partial X} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \tau_{XY} &= c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E_{11}}{\left[1 - \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12}^2 \right]}, \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{E_{11}} c_{11} \\ c_{12} &= \nu_{12} c_{22} = \nu_{21} c_{11}, \quad c_{66} = \mu_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 μ_{12} =전단탄성계수, E_{11} 과 E_{22} 는 각각 탄성주축 X, Y 방향의 탄성계수, ν_{12} 와 ν_{21} 은 푸아송의 비이고, 탄성계수는 맥스웰(Maxwell)의 관계식 $\nu_{ij}/E_{ij} = \nu_{ji}/E_{ji} (i, j=1, 2)$ 를 만족한다. 한편, 직교이방성체의 평면응력의 변형률과 응력관계는 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} e_X &= \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{1}{E_{11}} (\sigma_X - \nu_{12} \sigma_Y) \\ e_Y &= \frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{1}{E_{22}} (\sigma_Y - \nu_{21} \sigma_X) \\ \gamma_{XY} &= \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) = \frac{1}{\mu_{12}} \tau_{XY} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (1)과 Fig. 2와 같은 경계조건과 하중을 받는 복합체가 $E_{11} \gg E_{22}$ 이면, 변형률은 $e_X \ll e_Y$ 로 가정할 수 있다. 즉, 이방성비(E_{11}/E_{22})가 큰 복합체의 경우는 식 (6)을 가정할 수가 있다.

$$e_X = \frac{\partial u}{\partial X} \approx 0 \quad (6)$$

식 (6)의 가정은 큰 이방성비를 갖는 복합체의 X (또는 x)방향의 변위 u 에 의한 변위 운동방정식은 의미가 없다는 것을 나타낸다. 따라서 큰 이방성비를 갖는 복합체의 변위 운동방정식은 y 방향의 변위 v 에 의한 운동방정식만을 고려해도 된다. 그러므로 식 (5)와 (6)으로부터 응력과 변형률관계는 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \nu_{12} \sigma_Y, \quad \sigma_Y = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \tau_{XY} &= \mu_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 식 (2)에 적용하면 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{E_{22}}{\mu_{12}(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = \frac{\rho}{\mu_{12}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8)$$

고정 직교좌표축에 대한 변위 $u(X, Y, t)$ 와 $v(X, Y, t)$ 는 균열첨단의 보조 직교좌표축에 의한 새로운 함수로 나타내어도 운동방정식은 만족한다. 즉, $f(x, y, t) = f(X - ct, Y, t)$ 이므로 지배방정식을 얻기 위하여 함수 f 를 각각의 변수에 대하여 편미분하면, $\partial f/\partial X = \partial f/\partial x$, $\partial f/\partial Y = \partial f/\partial y$, $\partial f/\partial t = -c(\partial f/\partial x)$ 이 된다. 그러므로 식 (8)을 이동 보조직교좌표에 의한 변위 운동방정식으로 나타내면은 식 (9)와 같이 된다.

$$\left(1 - \frac{c^2}{C_S^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_{22}}{\mu_{12}(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

여기서 C_S 는 전단파 속도(shear wave velocity, $\sqrt{\mu_{12}/\rho}$)이다. 또한 식 (7)의 σ_Y 를 균열첨단에서의 보조 직교좌표를 사용하면, y 방향의 수직응력 σ_y 는 식 (10)과 같다.

$$\sigma_y = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10)$$

2.2 지배방정식의 푸리에변환

편미분 방정식을 변환하기 위하여 푸리에변환(fourier transformation)작이 사용된다. 어떤 함수 $\phi(x, y)$ 에 대한 푸리에변환 짝은 식 (11. a)와 (11. b)처럼 푸리에변환과 역푸리에변환(inverse fourier transformation)으로 구성된다.

$$\hat{\psi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{isx} dx = \Psi_+(s) + \Psi_-(s) \quad (11.a)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(s) e^{-isx} dx \quad (11.b)$$

여기서 s 는 복소수, $i=\sqrt{-1}$, 기호 $\hat{(\)}$ 은 푸리에변환을 의미하고, $\Psi_+(s)=\int_0^\infty \psi(x)e^{isx}dx$, $\Psi_-(s)=\int_{-\infty}^0 \psi(x)e^{isx}dx$ 이다. 따라서 식 (9)에 푸리에변환을 적용하면 식 (12)가 얻어진다.

$$(1 - \frac{c^2}{C_s^2})s^2 \hat{v} - \frac{E_{22}}{\mu_{12}(1 - \nu_{21}\nu_{12})} \frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} = 0 \quad (12)$$

y 에 대한 2계 미분방정식인 식 (12)로부터 식 (13)과 같은 \hat{v} 에 대한 해를 얻을 수 있다.

$$\hat{v}(s, y) = A_1(s)e^{\xi sy} + A_2(s)e^{-\xi sy} \quad (13)$$

여기서 $\xi = \{[\mu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})/E_{22}] \times (1 - c^2/C_s^2)\}^{1/2}$ 이고, 함수 $A_1(s)$ 와 $A_2(s)$ 는 s 의 함수이다. 식 (10)의 푸리에 변환은 식 (14)와 같다.

$$\hat{\sigma}_y = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \quad (14)$$

2.3 Wiener-Hopf 법에 의한 동적 응력확대계수

동적하중을 받는 직교이방성체에 대한 동적 응력성분을 구하기 Wiener-Hopf 법^(11,13)을 사용한다. Wiener-Hopf 법은 특별한 형태의 적분방정식을 풀기 위하여 1931년경에 제안되었다. 편미분 방정식에 푸리에변환을 적용하여 얻어지는 복소변수 방정식은 Wiener-Hopf 법을 사용함으로써 쉽게 풀려진다. 그러므로 본 연구에서는 Wiener-Hopf 법을 사용하기 위하여 경계조건에 푸리에변환을 적용한다. 경계조건에 푸리에변환을 적용하여 응력과 변위관계를 따라 결합하면 식 (13)의 $A_1(s)$ 와 $A_2(s)$ 가 소거된다. 해를 얻기 위하여 경계조건 식 (1)을 푸리에변환하면 각각의 응력과 변위에 대한 변환방정식을 얻을 수 있다. 식 (1)로부터 $y=0, -\infty < x < \infty$ 에서 y 방향의 수직응력 σ_y 를 푸리에변환하여 정리하면 식 (15)와 같다.

$$\hat{\sigma}_{y|y=0} = \frac{\sigma_0}{is} + \Sigma_+(s) \quad (15)$$

여기서 $\Sigma_+(s) = \int_0^\infty \sigma_y(x) e^{isx} dx$ 이다.

$y=0, -\infty < x < \infty$ 에 대한 식 (1)의 변위 v 를 푸리에변환하면 식 (16)과 같다.

$$\hat{v} = \int_{-\infty}^\infty v e^{isx} dx = V_-(s) \quad (16)$$

여기서 $V_-(s) = \int_{-\infty}^0 v(x) e^{isx} dx$ 이다.

식 (13)과 식 (1)로부터 $y=h$ 에서 $\hat{v}=0$ 이 되므로 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$A_1(s) = -A_2(s)e^{-2\xi sh} \quad (17)$$

식 (13)의 $\hat{v}(s, y)$ 을 식 (14)에 대입시키면 식 (18)과 같이 된다.

$$\hat{\sigma}_y = \frac{E_{22}\xi s}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} [A_1(s)e^{\xi sy} - A_2(s)e^{-\xi sy}] \quad (18)$$

$\hat{\sigma}_y$ 에 대하여 $y=0$ 일 때 식 (15)와 식 (18)로부터 식 (19)을 얻는다.

$$\frac{\sigma_0}{is} + \Sigma_+(s) = \frac{E_{22}\xi s}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [A_1(s) - A_2(s)] \quad (19)$$

그리고, $y=0$ 일 때에 \hat{v} 에 대하여, 식 (13)과 식 (16)으로부터 식 (20)을 얻을 수 있다.

$$A_1(s) + A_2(s) = V_-(s) \quad (20)$$

식 (17)을 식 (20)에 대입하여 A_2 를 구하고, 구한 A_2 를 식 (17)에 대입하여 A_1 을 구하면 식 (21)과 같다.

$$A_1(s) = -\frac{e^{-2\xi sh}}{1 - e^{-2\xi sh}} V_-(s) \quad (21)$$

$$A_2(s) = \frac{V_-(s)}{1 - e^{-2\xi sh}}$$

식 (21)의 A_1 과 A_2 을 식 (19)에 대입하여 정리하면 식 (22)와 식 (23)과 같다.

$$\frac{\sigma_0}{is} + \Sigma_+(s) = \frac{E_{22}\zeta}{1-\nu_{12}\nu_{21}} K(s) V_-(s) \quad (22)$$

$$K(s) = - \left[\frac{e^{-2\zeta sh} + 1}{1 - e^{-2\zeta sh}} \right] s \quad (23)$$

식 (22)는 Wiener-Hopf 법의 전형적인 예로서 $V_-(s)$ 와 $\Sigma_+(s)$ 만의 함수이다. 식 (23)의 $K(s)$ 의 점근선적인 특성은 식 (24) 및 식 (25)와 같다.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K(s)}{s} = m, \quad (m = -1) \quad (24)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} K(s) = -\frac{1}{\zeta h} \quad (25)$$

코시의 적분이론에 의하면 $\ln K(s)$ 는 다음과 같다.

$$f(s) = \ln K(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\infty}^{i\infty+\infty} \frac{\ln K(z)}{z-s} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\infty}^{i\infty+\infty} \frac{\ln K(z)}{z-s} dz = f_+(s) + f_-(s)$$

즉, $K_+(s) = e^{f_+(s)}$, $K_-(s) = e^{f_-(s)}$ 가 되고, $\ln K(s) = \ln K_+(s) + \ln K_-(s) = \ln[K_+(s)K_-(s)]$ 이다. 그러므로 $K(s)$ 는 식 (26)과 같이 된다.

$$K(s) = K_-(s) K_+(s) \quad (26)$$

식 (26)을 식 (22)에 대입하면 식 (27)을 얻는다.

$$\frac{\sigma_0}{isK_+(s)} + \frac{\Sigma_+(s)}{K_+(s)} = \frac{E_{22}\zeta}{1-\nu_{12}\nu_{21}} K_-(s) V_-(s) \quad (27)$$

여기서 $D(s) = \sigma_0/[isK_+(s)]$ 으로 두면, ^(2,11) $D(s)$ 는 식 (29)를 사용하면 식 (28)과 같이 된다.

$$D(s) = D_-(s) + D_+(s) \quad (28)$$

$$D_+(s) = \frac{\sigma_0}{is} \left(\frac{1}{K_+(s)} - \frac{1}{K_+(0)} \right) \quad (29)$$

$$D_-(s) = \frac{\sigma_0}{is} \frac{1}{K_+(0)}$$

식 (28)을 식 (27)에 대입하면 식 (30)과 같은 Wiener-Hopf 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\Sigma_+(s)}{K_+(s)} + D_+(s) = \frac{E_{22}\zeta}{1-\nu_{12}\nu_{21}} K_-(s) V_-(s) - D_-(s) = W(s) \quad (30)$$

식 (30)은 $\delta_- < \delta < \delta_+$ 에서 정의되었다. 그러나 식 (30)의 첫 번째 부분은 $\delta > \delta_-$ 에서 정칙이고, 두 번째 부분은 $\delta < \delta_+$ 에서 정칙이다. 그러므로 $W(s)$ 는 s 평면 전체에서 정칙이다. 그러므로 Lionville 이론⁽¹¹⁾에 의하면 $W(s)=0$ 이 된다. 따라서 식 (29)와 식 (30)으로부터 식 (31)과 식 (32)를 얻을 수 있다.

$$\Sigma_+(s) = \frac{\sigma_0}{is} \left(\frac{K_+(s)}{K_+(0)} - 1 \right) \quad (31)$$

$$V_-(s) = \frac{1-\nu_{21}\nu_{12}}{E_{22}\zeta} \frac{\sigma_0}{is} \frac{1}{K_-(s)} \frac{1}{K_+(0)} \quad (32)$$

식 (31)과 식 (32)에서 $K_-(s)$ 와 $K_+(s)$ 가 알려진다면 Wiener-Hopf해는 구하여진다. 균열침단의 동적 응력확대계수를 얻기 위해서는 $\Sigma_+(s)$ 를 풀어야 한다. $\Sigma_+(s)$ 를 풀기 위해서는 식 (24)와 식 (25)와 같은 점근선해를 사용하여 $K_+(s)$ 와 $K_+(0)$ 를 구하여야 한다. 따라서 식 (24)을 이용하면 식 (33)을 얻을 수 있다.

$$L(s) = \frac{K(s)}{m} (s-id)^{-1/2} (s+id)^{-1/2} \quad (33)$$

여기서 $m=-1$ 은 식 (24)의 $K(s)/s$ 의 극한값이고, $s \rightarrow \infty$ 일 때 $(s-id)^{-1/2} (s+id)^{-1/2} = s^{-1}$ 이므로 $s \rightarrow \infty$ 일 때 $L(s) \rightarrow 1$ 이다. 한편 식 (33)은 우함수이고, 식 (34)와 같이 분해할 수 있다.^(2,12)

$$L(s) = L_+(s) L_-(s) \quad (34)$$

따라서 식 (33)을 이용하면 $K(s)$ 에 대한 분해는 식 (35)와 (36)과 같게 된다.

$$K_+(s) = (-1)^{1/2} (s+id)^{1/2} L_+(s) \quad (35)$$

$$K_-(s) = (-1)^{1/2} (s-id)^{1/2} L_-(s) \quad (36)$$

$\ln L(s)$ 는 코시의 적분식으로부터 식 (37)과 같다.

$$\begin{aligned} \ln L(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\infty}^{i\infty+\infty} \frac{\ln L(z)}{z-s} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-\infty}^{-i\infty+\infty} \frac{\ln L(z)}{z-s} dz \\ &= \ln L_+(s) + \ln L_-(s) \end{aligned} \quad (37)$$

식 (37)에서 s 가 실수이면, 연결선은 실수축으로 취할 수가 있다. 그리고 $L(s)$ 가 우함수이므로 $L_-(0) = L_+(0)$ 가 되고, $L(0) = L_+(0)L_-(0) = [L_+(0)]^2 = [L_-(0)]^2$ 이 얻어진다. 따라서 식 (25)와 (35)로부터 식 (38)를 얻을 수 있다.

$$K_+(0) = (-1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\xi h} (-1)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

식 (37)로부터 $\lim_{s \rightarrow \infty} \ln L(s) = 0$ 이므로 $L_+(\infty) = 1, L_-(\infty) = 1$ 이 된다. 그러므로 식 (31), (35), 그리고 (38)로부터 식 (39)와 같은 $\Sigma_+(s)$ 의 극한을 구할 수 있다.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma_+(s) = \frac{\sigma_0}{i} [\xi h]^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{4}} s^{-\frac{1}{2}} \quad (39)$$

동적 응력을 구하기 위하여 푸리에 역변환 식 (11. b)를 참고하여 식 (39)을 역변환하고, $x \rightarrow 0^+$ 의 개념⁽¹⁾을 이용하면 식 (40)과 같은 동적 응력 성분을 얻는다.

$$\sigma_y(x) = \frac{\sigma_0 h^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_{22}} \left(1 - \frac{c^2}{C_S^2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} \quad (40)$$

식 (40)은 $x \rightarrow 0^+$ 일 때에 푸리에적분의 점근선적인 특성을 사용하여, 본 연구에서 구한 y 방향의 응력성분이다. 균열전파 문제에서 중요한 균열첨단 근방의 x 축상의 동적 응력 σ_y 를 얻기 위해서는 균열첨단의 동적 응력확대계수를 구하여야 한다. 동적 응력확대계수는 식 (41)에 의하여 구하여진다.^(9,14)

$$K_D(c) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma_y(x) \sqrt{2\pi x} \quad (41)$$

식 (40)을 식 (41)에 대입하여 정리하면 모드 I 하중에 대한 동적 응력확대계수는 식 (42)와 같다.

$$K_D(c) = \sqrt{2} \sigma_0 \left[\frac{\mu_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_{22}} \left(1 - \frac{c^2}{C_S^2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

식 (42)에서 $\sigma_0 = c_{22}(v_0/h)$ 이다. 이때 h 는 시편의 높이, v_0 는 변위이기 때문에 v_0/h 는 σ_0 에 의하여 발생되는 변형률이 된다.

3. 동적 응력확대계수에 대한 고찰

Wiener-Hopf 법을 사용하여 구한 동적 응력확대계수, 즉 큰 이방성비를 갖는 직교이방성체 띠형 부재의 반무한 균열에 대하여 구한 동적 응력확대계수에 대한 균열전파 속도, 탄성파의 속도, 재료의 이방성비, 그리고 시편의 높이의 영향을 알아보기 위하여 고찰하였다. $c \rightarrow 0$ 일 때 식 (42)의 극한은 정적인 상태가 되고,⁽¹⁾ 이 개념을 이용하여 본 연구에서 구한 정적 응력확대계수는 식 (43)과 같다.

$$K_{D(0)} = \frac{\sqrt{2} v_0 E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\mu_{12}}{E_{22}} \right)^{\frac{1}{4}} h^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

식 (42)를 식 (43)으로 나누면 무차원화한 동적 응력확대계수는 식 (44)와 같이 된다.

$$\frac{K_D(c)}{K_{D(0)}} = \left[1 - \frac{c^2}{C_S^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (44)$$

식 (44)에서 c/C_S 는 무차원화된 균열전파 속도이다. 식 (44)로부터 동적 응력확대계수는 정적 응력확대계수를 포함한다는 것을 알 수 있다. 이것은 등방성체에서 동적 응력확대계수는 정적 응력확대계수를 포함한다는 것을 제시한 Freund⁽¹⁵⁾의 연구결과와 일치한다. 식 (44)를 사용한 Fig. 3은 무차원화한 균열전파 속도에 대한 무차원화한 동적 응력확대계수 $[K_D(c)/K_{D(0)}]$ 의 변화를 나타낸다. Fig. 3으로부터 모드 I 하중에 의한 동적

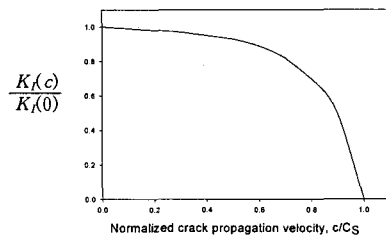


Fig. 3 Normalized dynamic stress intensity factor with normalized crack propagation velocity

응력 확대계수는 균열전파 속도에 의존한다는 것을 알 수 있다. 동적 응력확대계수는 $c=0$ 에서 최대값을 갖고, $c=C_S$ 가 될 때까지 감소한다. 그리고 $c=C_S$ 가 되면 동적 응력확대계수는 0이 된다. 이것은 등방성체 반무한 균열에 대하여 연구한 Chen과 Sih⁽¹⁾와 Nilsson⁽²⁾의 연구결과와 유사한 경향을 나타낸다.

임의의 시간 t 에서 균열길이는 $a=ct$ 이므로 식 (42)의 양변을 $K_0=\sigma_0\sqrt{a}$ 으로 나누고, 정리하면 식 (45)을 얻을 수 있다.

$$\frac{K_D(c)}{\sigma_0\sqrt{a}} = \left[\frac{2\mu_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_{22}} \left(1 - \frac{1}{T^2}\right) \right]^{1/4} \left(\frac{a}{h}\right)^{-1/2} \quad (45)$$

식 (45)에서 $T=C_S t/a$ 는 무차원화된 시간이다. 식 (45)을 사용한 Fig. 4는 시편의 높이에 대한 균열길이 비(a/h), 무차원화한 시간, 그리고 무차원화한 동적 응력확대계수($K_D(c)/(\sigma_0\sqrt{a})$)의 관계를 나타내고 있다.

Fig. 4에서 무차원화한 동적 응력확대계수는 무차원화된 시간 T 가 약 2가 될 때까지 증가한다. T 가 약 2보다 크게 되면 동적 응력확대계수는 각각 어떤 값에 수렴하는 것을 보여 준다. 그리고 a/h 의 값이 0.5, 1.0, 1.5, 2.0로 변할 때, $T=6$ 에 대한 $K_D(c)/(\sigma_0\sqrt{a})$ 의 값은 각각 1.70, 1.21, 0.99, 0.86로 된다. 한편, 정적 상태($c=0$)에서 $a/h(=0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ 의 각각의 값에 대하여 $K_D(c)/(\sigma_0\sqrt{a})$ 의 값은 1.73, 1.22, 1.0, 0.86이 된다. 이것은 유한 높이(h)의 등방성체 띠형 부재에 대하여 a/h 가 어떤 값 이상되면 T 에 대한

응력확대계수는 최대값에 이른 후 약간의 변화를 하면서 정적인 값에 이른다고 주장한 Chen과 Sih⁽¹⁾의 연구결과와 유사한 경향을 나타낸다. 또한 위의 결과는 반 무한 균열의 표면에 집중하중이 갑자기 작용하는 경우를 연구한 Goorgiadis와 Rigatos⁽⁷⁾의 결과와도 유사하다. 그리고 Fig. 4에서 보는 것처럼 a/h 가 증가할 때에 무차원화된 동적 응력확대계수는 감소하고 있다. 이것은 등방성체에서 a/h 가 증가할 때에 무차원화된 동적 응력확대계수는 감소한다는 것을 밝힌 Chen과 Sih⁽¹⁾의 결과와 일치한다. 그러므로 시편의 높이에 대한 균열길이 비(a/h)와 무차원화된 시간 T 그리고 무차원화된 동적 응력확대계수 [$K_D(c)/(\sigma_0\sqrt{a})$] 등에 대한 고찰로부터 본 연구에서 구한 동적 응력확대계수 식 (42)는 유효하다는 것을 알 수 있다.

한편, 재료는 등방성체이고 $c \rightarrow 0$ 일 때, 경계조건 식 (1)과 식 (6)의 조건을 적용하여 구한 식은 식 (46)과 같이 된다.

$$K_I^{iso}(0) = \frac{v_0 E}{h(1-\nu^2)} h^{1/2} \quad (46)$$

식 (46)의 윗첨자 iso 는 등방성체를 의미한다. 식 (43)과 (46)에 각각 동일한 등방성체의 물성치 ($E_{11}=E_{22}=E$)와 동적 균열전파속도가 0인 경우를 적용하면, $K_D(0)/[K_I^{iso}(0)]=1.09$ 를 얻을 수 있다. 그러므로 위에서 본 바와 같이 본 연구에서 구한 동적 응력확대계수는 유효함을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는, Kevlar나 Graphite 섬유 등과 같이 강한 방향성을 갖는 섬유를 포함하는 이방성 비(E_{11}/E_{22})가 큰 복합체의 동적 특성을 알기 위하여, 직교이방성체의 평면응력 조건하에서, 푸리에변환에 의한 점근선적인 특성과 Wiener-Hopf 법을 사용하여, Fig. 1과 같이 시편의 외부 가장 자리에 수직 충격하중이 작용할 때 등속으로 전파하는 균열 문제에 대한 결과를 다음과 같이 얻었다.

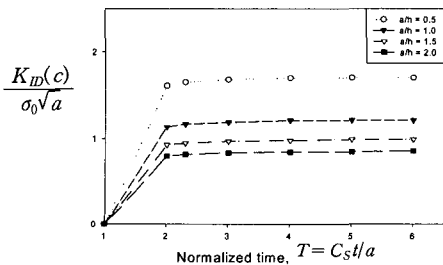


Fig. 4 Normalized dynamic stress intensity factor with normalized time and with various a/h for normal impact loading

(1) 식 (40)은 Fig. 1과 같은 충격하중이 작용하고 시편의 높이가 $2h$ 인 복합체의 긴 띠의 수평 중심선에 반 무한 균열이 등속으로 전파될 때 균열 근방 x 축상의 응력성분 σ_y 를 나타내고, 식 (42)는 그 경우의 동적 응력확대계수를 나타낸다.

(2) 동적 응력확대계수는 식 (42)에서 보듯이 탄성파의 속도, 재료의 물성치, 균열전파속도, 그리고 시편의 높이에 관계된다는 것을 알 수 있다.

(3) 식 (44)와 Fig. 3에서 보듯이 정적인 상태의 응력확대계수로 무차원화한 동적 응력확대계수는 균열전파속도에 의존하고, 균열전파속도(c)가 전단파의 속도(C_s)가 되면 동적 응력확대계수는 0이된다. 이것은 등방성체의 연구결과와 일치한다.

(4) Fig. 4에서 보듯이 동적 응력확대계수와 시편의 높이(h), ω 의 관계는 무차원화한 시간이 2이면 동적 응력확대계수는 최대값이 되고, 무차원화한 시간이 약 2 보다 크면 무차원화된 동적 응력확대계수는 일정한 값을 갖는다.

(5) 동적 응력확대계수는 a/h 가 증가할 때에 무차원화된 동적 응력확대계수는 감소한다. 이것은 등방성체의 연구결과와 일치한다.

참고문헌

- (1) Chen, E. P. and Sih, G. C., 1977, "Semi-Infinite Crack Motion Maintained by Displacement Boundary Conditions," in *Mechanics of Fracture*, Vol. 4, Elastodynamic Crack Problems, ed. by Sih, G. C., pp. 1~82.
- (2) Nilsson, F., 1972, "Dynamic Stress Intensity Factors for Finite Strip Problems," *International Journal of Fracture*, Vol. 8, pp. 403~411.
- (3) Freund, L. B., 1974, "The Stress Intensity Factor due to Normal Impact Loading of the Faces of a Crack," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 12, No. 2, pp. 179~189.
- (4) Kim, K. S., 1985, "Dynamic Fracture under Normal Impact Loading of the Crack Faces," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 585~592.
- (5) Yu, S. W. and Chen, E. T., 1998, "Transient Response of a Cracked Infinite Piezoelectric Strip under Anti-plane Impact," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 21, pp. 1381~1388.
- (6) Wellmar, P., Fellers, C., Nilsson, F., and Delhage, L., 1997, "Crack-Tip Characterization in Paper," *Journal of Pulp and Paper Science*, Vol. 23, No. 6, pp. J269~J275.
- (7) Goorgiadis, H. G. and Rigator, A. P., 1996, "Transient SIF Results for a Cracked Viscoelastic Strip under Concentrated Impact Loading-An Integral-Transform/Function-Theoretic Approach," *Wave Motion*, Vol. 24, pp. 41~57.
- (8) Baker, B. R., 1962, "Dynamic Stresses Created by a Moving Crack," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, pp. 449~458.
- (9) Goorgiadis, H. G. and Charalambakis, N. 1994, "An Analytical/Numerical Approach for Cracked Elastic Strips under Concentrated Loads-Transient Response," *International Journal of Fracture*, Vol. 65, pp. 49~61.
- (10) Parton, V. Z. and Boriskovsky, V. G., 1989, *Dynamic Fracture Mechanics*, Vol. 1 and Vol. 2, Hemisphere Publishing Corporation.
- (11) Noble, B., 1958, *Methods based on Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon Press, London.
- (12) Anderson, T. L., 1995, "Principle of Superposition," in Chapter 2. Linear Elastic Fracture Mechanics, *Fracture Mechanics*, Second Edition, CRC Press. Inc., pp. 64~66.
- (13) Copson, E. T., 1950, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, London: Oxford Univ. Press.
- (14) Freund, L. B., 1972, "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading: Pt.1, Constant Rate of Propagation," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 20, No. 3, pp. 129~140.
- (15) Freund, L. B., 1990, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.