

수학적 최적화기법을 이용한 결함인식 연구

서명원*·유준모**
(1999년 3월 23일 접수)

Crack Identification Using Optimization Technique

Myung-Won Suh and Jun-Mo Yu

Key Words: Crack Identification(균열 인식), Optimization Technique(최적화 방법), Inverse Analysis Method(역해석 방법), Structure Analysis(구조 해석)

Abstract

It has been established that a crack has an important effect on the dynamic behavior of a structure. This effect depends mainly on the location and depth of the crack. To identify the location and depth of a crack in a structure, Nikolakopoulos et al. used the intersection point of the superposed contours that correspond to the eigenfrequency caused by the crack presence. However the intersecting point of the superposed contours is not only difficult to find but also incorrect to calculate. A method is presented in this paper which uses optimization technique for the location and depth of the crack. The basic idea is to find parameters which use the structural eigenfrequencies on crack depth and location and optimization algorithm. With finite element model of the structure to calculate eigenfrequencies, it is possible to formulate the inverse problem in optimization format. Method of optimization is augmented lagrange multiplier method and search direction method is BFGS variable metric method and one dimensional search method is polynomial interpolation.

1. 서론

구조물의 결함진단은 노후정도 및 보수시기를 결정하는데 필수적이다. 이러한 결함진단을 위해서는 결함 유무, 결함 위치, 결함 정도를 파악해야하나 이는 매우 난해한 문제이다. 이를 해결하기 위해 현장실험을 통하여 얻는 계측자료와 수학적 모델을 이용하여 구조물의 결함 위치 및 결함 정도를 파악하는 기술인 역해석 방법(inverse analysis method)이 크게 대두되고 있다. 역해석 방법은 여러가지 다양한 문제의 해석에 적용되어 왔으며 그중 실제 구조물 내에 존재하는 결함, 특히 균열의 크기와 위치를 찾아내는 분야는 구조물의 건진성 확보 및 보수작업이 빠르게 이루어질 수 있으므로 매우 중요하다.

구조물내의 균열을 인식하는 연구는 다양한 방법으로 접근되어왔다. Chondros와 Dimarogonas^(2,3)는 균열을 전체 구조물의 탄성에 영향을 주는 국부 탄성체(스프링)로 간주하였고 균열의 깊이가 고유진동수의 감소와 관계한다고 주장했다. Gounaris와 Dimarogonas⁽⁴⁾는 특별히 균열이 있는 보를 유한요소모델로 구성하였다. Gounaris와 Papazoglou⁽⁵⁾는 균열이 있는 Timoshenko 보의 동적 거동을 연구하기 위하여 변형된 유한 경계 요소법을 사용하였다. 위의 연구 결과를 배경으로 Inagaki⁽⁶⁾ 등은 고유진동수를 측정하여 균열의 깊이와 위치를 알아내었고, Leung⁽⁷⁾과 Anifantis 등⁽⁸⁾은 굽힘에서의 동적거동을 측정하여 균열을 인식하는 방법을 제안하였다. Dimarogonas와 Massouros⁽⁹⁾는 균열이 있고 비틀림을 받는 축의 동적거동을 조사하였고 균열의 깊이와 위치를 알아내기 위해 nomographs를 제안했다. Nikolakopoulos, Katsareas, 그리고 Papadopoulos⁽¹⁰⁾는 균열에 의해 발생된 구

* 회원, 성균관대학교 기계공학부

E-mail : suhmw@yurim.skku.ac.kr

TEL : (0331)290-7447 FAX : (0331)290-5276

** 성균관대학교 대학원

조물의 고유진동수 변화율을 측정하여 균열의 깊이와 위치를 파악해 낼 수 있도록 고유진동수 변화율에 대한 균열의 위치관계를 보여주는 등고선을 제안했다. 이 이론의 기본적인 개념은 유한요소법과 더불어 균열의 위치와 크기에 따라 달라지는 구조물의 고유진동수 중 처음에 나타나는 세 개의 고유진동수를 이용하여 이 세 개의 고유진동수 변화율과 균열의 크기 및 위치를 서로 대응하게 하는 등고선을 그리는 방법을 제시했다. 그러므로 실제 구조물에 존재하는 균열으로 인해 발생하는 고유진동수의 변화율을 측정하여 이러한 등고선을 구성하면 등고선들의 교차점으로부터 균열의 크기와 위치를 알아낼 수 있었다. 하지만 등고선 작성 및 교차점들을 찾기 위해서는 많은 시간과 노력이 필요하기 때문에 이와 같은 방법은 효과적이라 할 수 없다.

그러므로 본 연구에서는 유한요소모델을 이용한 보 모델을 설립하고 균열을 인식하기 위한 역해석을 최적화 방법을 이용하여 계산함으로써 효과적으로 균열의 크기와 위치를 찾을 수 있었다.

2. 이론

2.1 역해석

일반적으로 매개변수의 결정방법은 기지의 변수를 이용하여 미지의 변수를 결정하는 역해석 방법이 많이 사용되어져 왔다. 해석에 관련된 미지의 매개변수(벡터)를 $x^* \in X$ 라하고 측정변수(벡터)를 $y^* \in Y$ 라 할 때, $\Psi: X \rightarrow Y$ 의 함수 관계가 성립한다고 하면, 실제 입력변수와 출력변수와의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = \Psi(x) + \epsilon \tag{1}$$

이 때, $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ 이고 ϵ_1 과 ϵ_2 는 각각 변수 y 를 측정할 때 발생하게 되는 측정 오차와 상태방정식을 이용하여 모델링을 세울 때 발생하게 되는 모델링 오차이다. Fig. 1에는 일반적인 계의 변수와 이와 관계된 해석영역 및 경계면을 나타내었다.⁽¹¹⁾

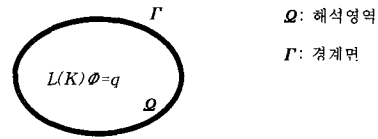


Fig. 1 Problems of field quantities

여기서, 일반적인 계의 모델 방정식은 식 (2)와 같다.

$$L(K)\phi = q \tag{2}$$

이 때, L, K, φ 그리고 q는 각각 미분 연산항, 재료의 고유 물성치, 영역변수, 그리고 가해진 외력 및 그 이외의 입력자료를 나타낸다. 식 (2)와 같은 일반적인 계의 모델 방정식의 매개변수를 결정하기 위한 역해석의 해석조건은 다음 5가지 범주로 나누어 볼 수 있다.

- (1) 계 Ω의 외·내부 경계면
- (2) 지배 방정식
- (3) 경계면 조건 및 해석 초기조건
- (4) 계 Ω에 가해진 힘 및 그 이외의 입력자료 q
- (5) 계 Ω의 지배 방정식과 관련된 재료 물성치 K

역해석 문제를 해결하기 위해서는 위 5가지 중 1가지 이상으로 정의되어야 해를 구할 수 있다. 또한 입력변수와 출력변수는 연속인 공간에 존재해야 하며 ($X \subseteq R^n, n \in N$ and $Y \subseteq R^m, m \in M$) 문제의 해가 유일하며 안정한가를 식별해야 해가 결정될 수 있다. 역해석 문제의 해를 구하는 방법은 다음의 두 가지 방법이 주로 사용된다. 첫 번째는 계의 상태 방정식을 푸는 것이고,⁽¹⁵⁾ 두 번째는 새로 구성한 특정 함수의 최소 및 최대 값을 구하여 매개변수를 얻는 것이다.⁽¹⁶⁾ 일반적으로 목적함수를 최소화하여 미지의 매개변수를 구하는 방법이 가장 널리 사용되어지고 있다. 식 (3)은 최적화 방법을 이용하여 역해석 해를 구하기 위한 문제정의를 나타낸다.

$$\min f(x) \tag{3}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m k_i (y_i^* - \Psi_i(x))^2$$

여기서, k_i 는 가중치(weighting factor)이고 이와 같이 구성된 식을 최소화하여 이에 대응되는 매개변수 x 의 값을 구할 수 있다.

본 연구에서는 이와 같은 방법을 적용하여 유한요소모델로부터 균열이 존재할 경우 처음 세 개의 고유진동수와 균열의 크기 및 위치와의 관계를 구하고 임의의 세 개의 고유진동수에 대한 균열의 크기와 위치를 인식하였다.

2.2 구조 해석

2.2.1 강성 및 질량 matrices

평면 구조물은 3개의 자유도 ($\delta_x, \delta_y, \theta_z$)를 가진 2차원 beam 요소를 이용하여 모델링할 수 있다. 이러한 평면 구조물에 대응되는 강성(stiffness)과 질량(mass)의 local matrix는 식 (4)와 식 (5)이다.⁽¹⁰⁾

$$[K_e] = \frac{EI_{zz}}{L^3} \begin{bmatrix} \beta L^2 & 0 & 0 & -\beta L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\beta L^2 & 0 & 0 & \beta L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[M_e] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서, $\beta = A/I_{zz}$, L 은 요소 e 의 길이, A 는 요소의 단면적, E 와 ρ 는 각각 재료의 탄성계수와 밀도를 의미한다. 그리고 I_{zz} 는 local z 축에 대한 2차 관성모멘트를 의미한다.

위에 제시된 구조물은 Euler-Bernoulli 이론으로부터 힘 평형 방정식과 변형의 기하학적 관계, 재료의 법칙을 이용하여 보 element의 한쪽 끝단의 상태벡터(하중, 변위)와 반대쪽 끝단의 상태벡터 관계를 나타내는 transfer matrix가 계산되어지며 식 (6)과 같다.

$$[T_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & \frac{L^3}{6EI_{zz}} & -\frac{L^2}{6EI_{zz}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{L^2}{2EI_{zz}} & -\frac{L}{6EI_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

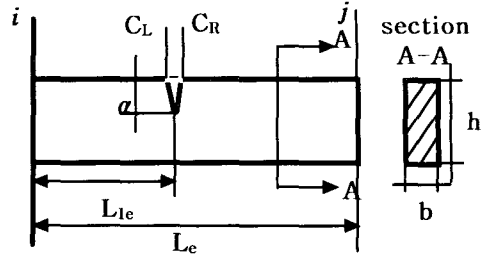


Fig. 2 A cracked beam finite element

Fig. 2는 끝단에서 거리 L_{1e} 만큼 떨어져 있고 깊이 α 인 위치에 crack를 가지고 있는 beam의 모습을 보여 주고 있다.

위치 i, C_L, C_R , 그리고 j 에서의 상태벡터는 식 (7a) ~ (7d)에 나타나 있다.

$$\{z_i\} = \{\delta_{x_i}, \delta_{y_i}, \theta_{z_i}, F_{x_i}, F_{y_i}, M_{z_i}\} \quad (7a)$$

$$\{z_L\} = \{\delta_{x_L}, \delta_{y_L}, \theta_{z_L}, F_{x_L}, F_{y_L}, M_{z_L}\} \quad (7b)$$

$$\{z_R\} = \{\delta_{x_R}, \delta_{y_R}, \theta_{z_R}, F_{x_R}, F_{y_R}, M_{z_R}\} \quad (7c)$$

$$\{z_j\} = \{\delta_{x_j}, \delta_{y_j}, \theta_{z_j}, F_{x_j}, F_{y_j}, M_{z_j}\} \quad (7d)$$

여기서 i, j 는 보 element의 양 끝단의 위치를 나타내며 R, L 은 균열의 좌우위치, z 는 각 지점의 상태벡터를 의미한다. 노드 i 와 j 사이에 어떠한 힘도 작용하지 않는다면 식 (8a) ~ (8c)가 성립된다.

$$\{z_L\} = [T_1]\{z_i\} \quad (8a)$$

$$\{z_R\} = [T_c]\{z_L\} \quad (8b)$$

$$\{z_j\} = [T_2]\{z_R\} \quad (8c)$$

$[T_1]$ 과 $[T_2]$ 는 노드 C_L-i 와 C_R-j 사이의 관계를 나타내는 transfer matrix이다. 그리고 $[T_c]$ 는 구조물내에 존재하는 crack의 두 점 C_L-C_R 의 관계를 나타내는 point transfer matrix 로써 식 (9)과 같다.

$$[T_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & 0 & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 밑첨자 1, 2 그리고 3은 인장, 전단, 그리고 굽힘을 의미한다. 예를 들어

c_{13} 과 c_{31} 항은 1과 3을 가지고 있으므로 인장과 굽힘이 작용되고 있다는 것을 의미한다.⁽⁴⁾ 여기서 c_{13} 과 c_{31} 항은 고려되지 않고 c_{11} , c_{22} 그리고 c_{33} 항이 고려된다. 식 (10a)~(10c)는 c_{11} , c_{22} 그리고 c_{33} 을 표현한 것이다.⁽¹²⁾

$$c_{11} = \frac{2\phi_1}{E(1-\nu^2)b} \quad (10a)$$

$$c_{22} = \frac{2k^2\phi_3}{E(1-\nu^2)b} \quad (10b)$$

$$c_{33} = \frac{72\phi_2}{E(1-\nu^2)bh^2} \quad (10c)$$

여기서, ν 는 Poisson' ratio, k 는 사각 단면 계수로 1.5이다. 그리고 ϕ_i 는 무차원 crack 깊이 $\frac{\alpha}{h}$ 에 대한 함수이다.⁽¹³⁾ Fig. 3은 순수 인장, 굽힘, 전단상태에서 시편에 하나의 edge notch가 존재하는 경우 응력 집중 계수 K_I 를 구하기 위해 Tada⁽¹⁴⁾에 의해 제안된 실험으로 구해진 그래프이다.

식 (8a) ~ (8c)부터 식 (11)이 얻어지고 식 (11)은 노드 i - j 사이의 관계를 나타내는 transfer matrix이다.

$$\{z_j\} = [T_c^e]\{z_i\} \quad (11)$$

균열이 발생된 요소의 transfer matrix는 식 (12)

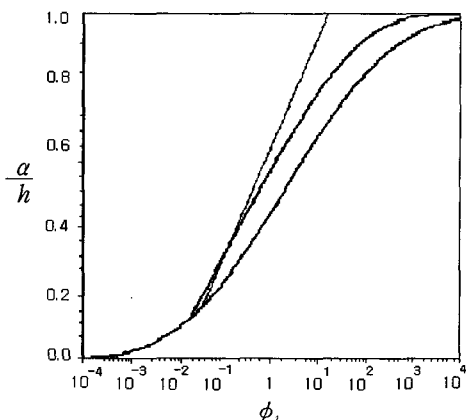


Fig. 3 ϕ_i vs $\frac{\alpha}{h}$ under pure tension and bending

과 같다.

$$[T_c^e] = [T_2][T_c][T_1] = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_3] & [A_4] \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서, $[A_i]$ 는 3×3 submatrices이다. 식 (13)은 균열이 포함된 요소의 강성 행렬(stiffness matrix)이다.⁽¹⁸⁾

$$[K_c^e] = \begin{bmatrix} -[A_2]^{-1}[A_1] & [A_2]^{-1} \\ [A_3] - [A_4][A_2]^{-1}[A_1] & [A_4][A_2]^{-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.2.2 문제의 정의

Fig. 4에는 길이 $L = 3m$ 이고 단면이 $B \times H = 0.2m \times 0.2m$ 끝단에서부터 길이 L_1 만큼 거리가 떨어져있고 깊이 α 인 지점에 균열을 포함하고 있는 clamped-free 보의 모습을 보여주고 있다. 이때, 재료 물성치는 $E = 2.07 \times 10^{11} Nm^{-2}$, $\nu = 0.3$ 그리고 $\rho = 7700 kgm^{-3}$ 이다.

Fig. 4에 나타나 있는 보 모델은 두 개의 노드를 가진 12개의 유한 요소로 나뉘어졌고 주어진 구조물에 대한 상태 방정식을 matrix형태로 나타내면 식 (14)같으므로 이를 이용하여 고유진동수를 구할 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$-\omega^2[M] + [K] = \{0\} \quad (14)$$

3. 최적화 방법의 적용 및 결과

식 (15)에 균열이 있는 경우의 강성행렬 식 (4)와 질량행렬 식 (6)을 적용하여 균열의 깊이와 위치를 알 경우 그 때의 고유진동수를 계산할 수

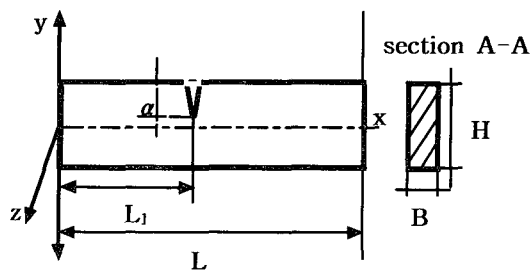


Fig. 4 Model of the cracked clamped-free beam

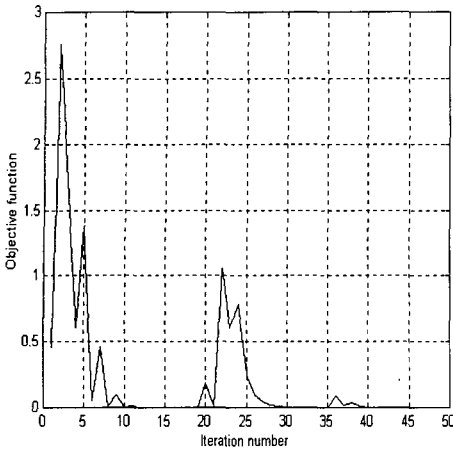


Fig. 5 Objective function of CASE I

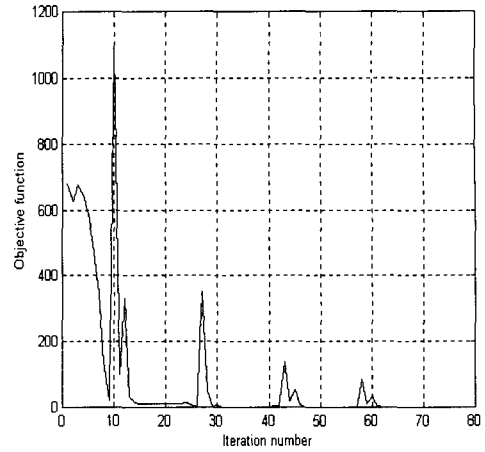


Fig. 6 Objective function of CASE II

있게 되었다. 이를 응용하여 최적화 기법을 균열의 깊이와 위치를 찾는 데 적용하였다. 최적화 문제를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Min } (f_1 - f_1^*)^2 + (f_2 - f_2^*)^2 + (f_3 - f_3^*)^2 \\ & \alpha, L_1 \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 우리가 구하고자 하는 설계변수는 α , L_1 즉 균열의 깊이와 위치이고, α, L_1 에 해당하는 세 개의 고유진동수인 f_1, f_2, f_3 과 측정된 값 f_1^*, f_2^*, f_3^* 들과의 차이의 제곱의 합을 목적함수로 설정하였다. 그러므로 측정된 고유진동수와 일치하는 고유진동수를 갖는 α 와 L_1 을 구하는 것이 목적이다.

최적화방법으로는 Augmented Lagrange Multiplier method를 사용하였다. 이 방법은 Sequential Unconstrained Minimization Technique 일종으로 원래의 목적함수를 Lagrange multiplier와 weighting factor를 가진 벌칙함수로 구성하여 최적화 작업시 효율성과 신뢰성을 높인 방법으로 알려져 있다. 또한 각 iteration마다 Lagrange Multiplier를 updating함으로써 최적화 속도를 빠르게 하는 특징을 갖고 있다. Search direction을 찾는 데는 Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno variable metric method를 사용했고 one dimensional search는 polynomial interpolation을 사용하였다.⁽¹⁷⁾

Table 1 Final analysis result

	CASE I		CASE II	
	Reference value	Result value	Reference value	Result value
α (m)	0.01	0.0095	0.03	0.0286
L_1 (m)	0.7	0.7183	2.3	2.2579
f_1 (rad/s)	114.49	114.52	114.65	114.65
f_2 (rad/s)	717.27	717.26	713.52	713.31
f_3 (rad/s)	2007.49	2007.50	1977.09	1977.10
Final obj value	-	0.0008	-	0.0519

해석 결과가 얼마나 정확한지를 알기 위해서 미리 알고 있는 두 균열의 깊이와 위치, 그리고 그 곳에서의 고유진동수를 가지고 최적화 기법을 적용하였다. 먼저 첫 번째 균열의 깊이와 위치는 각각 0.01m, 0.7m이며 이 때의 초기 세 개의 고유진동수 $f_1 = 114.49$ rad/s, $f_2 = 717.27$ rad/s, $f_3 = 2007.49$ rad/s이다. 두 번째 균열의 깊이와 위치는 0.03m, 2.3m이며 이 때의 초기 세 개의 고유진동수 $f_1 = 114.65$ rad/s, $f_2 = 713.53$ rad/s, $f_3 = 1977.09$ rad/s이다. 위의 Fig. 5와 Fig. 6은 첫 번째와 두 번째 균열에서의 Evaluation에 대한 목적함수의 변화를 나타내고 있다. Fig. 5와 Fig. 6에서 각각의 목적함수가 모

두 0에 수렴하는 것을 알 수 있었다. 이는 측정 한 값과 계산된 값이 거의 일치함으로써 최적화가 이루어졌음을 의미하며 동시에 오차가 0에 가깝게 되었음을 말해주고 있다. 최종 결과는 다음 Table 1과 같다.

4. 결론

본 논문에서는 구조물내의 균열의 크기와 위치를 알아내기 위해 유한요소법을 이용하여 균열의 크기 및 위치에 대한 처음 세 개의 고유진동수를 구하고 이를 역해석 문제로 정의하여 최적알고리즘을 적용하여 해를 구하였다. 이러한 접근 방법은 균열의 크기 및 위치에 대한 고유진동수의 등고선을 그려서 등고선들의 교점을 찾아내는 방법보다 정확하고 효과적이라 할 수 있다. 또한 실제 구조물의 결합진단을 위해 적용한다면 매우 유용한 도구가 될 것이다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Natke, H. G., 1988, " Application of System Identification in Engineering," CISM CAL-296.
- (2) Chondros, T. C. and Dimarogonas, A. D., 1979, "Identification of Cracks in Circular Plates Welded at the Contour," In: *ASME Design Engineering Technical Conference*, St. Louis.
- (3) Chondros, T. C. and Dimarogonas, A. D., 1980, "Identification of cracks in welded joints of complex structures," *Journal of Sound and Vibration* 69, pp. 531~538.
- (4) Gounaris, G. D. and Dimarogonas, A. D., 1988, "A finite element of a cracked prismatic beam in structural analysis," *Computer and Structure* 28, pp. 309~313.
- (5) Gounaris, G. D. and Papazoglou, V., 1992, "Three-dimensional effects on the natural vibration of cracked Timoshenko beams in water," *Computer and Structure* 42, pp. 769~779.
- (6) Inagaki, T., Kanki, H. and Shiraki, K., 1981, "Transverse vibrations of a general cracked rotor bearing system," *Journal of Mechanical Design* 104, pp. 1~11.
- (7) Leung, P. S., 1992, "The effects of a transverse Crack on the dynamics of a circular shaft," In: *Rotor dynamics '92. Int. Conf. on Rotating Machine Dynamics*. Venice.
- (8) Anifantis, N., Rizos P. and Dimarogonas, A. D., 1987, "Identification of cracks on beams by vibration analysis," In: *11th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Boston.
- (9) Dimarogonas, A. D. and Massouros, G., 1981, "Torsional vibrations of a shaft with a circumferential crack," *Engineering Fracture Mechanical*. 15, pp. 439~444.
- (10) Nikolakopoulos, H. G., Katsareas, D. E. and Papadopoulos, C. A., 1997, "Computer & Structures," Vol. 64, No. 1~4, pp. 389~406.
- (11) Furukawa, T. and Yagawa, G., 1995, "Computational Mechanics '95, Springer," pp. 122~127.
- (12) Ogawa, H. and Oja, E., 1986, "Projection Filter, Wiener Filter, and Karhunen-Loeve Subspaces in Digital Image Restoration," *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol.114, pp. 37~51.
- (13) Papadopoulos, C. A. and Dimarogonas, A. D., 1988, "Coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft," *Journal of Vibration Acoustic Stress Reliability Design* 110, pp. 1~8.
- (14) Tada, H., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation. PA.
- (15) Hasanov, A., 1994, "Computational aspects of an inverse diagnostic problem for an elastoplastic medium," WCCM III. 2-G10-3, pp. 982~983.
- (16) Tarantola, A., 1987, *Inverse problem theory*, Elsevier.
- (17) Vanderplaats, G. N., 1993, *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*, Mcgraw-hill international editions.
- (18) Dimarogonas, A. D., 1976, *Vibration Engineering*, West. St Paul, MN.