

## 대칭면을 갖는 강체 진동계의 진동모드에 대한 기하학적 해석

단 병 주\* · 최 용 제\*\*  
(1999년 1월 21일 접수)

### The Geometrical Mode Analysis of an Elastically Suspended Rigid Body with Planes of Symmetry

Byung Ju Dan and Yong Je Choi

**Key Words:** Vibration Mode(진동모드), Stiffness Matrix(강성행렬), Congruence Transformation(합동변환), Center of Elasticity(탄성중심), Plane of Symmetry(대칭면)

#### Abstract

Vibration modes obtained from a modal analysis can be better explained from a screw theoretical standpoint. A vibration mode can be geometrically interpreted as a pure rotation about the vibration center in a plane and as the twisting motion on a screw in a three dimensional space. This paper presents the method to diagonalize a spatial stiffness matrix by use of a parallel axis congruence transformation. It also describes that the stiffness matrix diagonalized by a congruence transformation can have the planes of symmetry depending on the location of the center of elasticity. For a plane of symmetry, any vibration mode can be expressed by the axis of vibration. Analytical solutions for the axis of vibration has been derived.

#### 1. 서론

일반적으로 강체의 진동 문제는 미소한 변위의 반복운동이라는 측면에서 공간상의 강체의 운동과 같은 개념으로 이해할 수 있다. 진동해석의 고유치 문제로부터 얻는 고유벡터는, 기하학적 측면에서, 평면상에서는 진동중심으로, 공간상에서는 진동축으로 해석될 수 있다. 진동중심은 절(node)로, 그리고 진동축은 절선(nodal line)으로 각각 이해할 수 있으며, 이러한 기하적 해석 방법은 다자유도를 갖는 진동체의 진동 특성을 보다 정확하게 이해하는데 필수적이며, 나아가 진동문제를 개선시키기 위한 설계도구로 사용될 수

있는 장점을 갖는다.

Griffis<sup>(1)</sup> 등은 강성행렬을 기하적 방법에 의하여 얻을 수 있음을 설명하였고, 공간상에서의 강성행렬로부터 고유나선(eigenscrew)을 구하였다. Loncaric<sup>(2)</sup>은 강성행렬이 강체 변환(rigid body transformation)에 의하여 대각화가 될 수 없다는 것을 증명하였다. Lipkin<sup>(3)</sup> 등은 강성행렬을 고유웬치(eigenwrench)와 고유트위스트(eigen-twist)로 구성된 행렬의 합동변환(congruence transformation)으로 분해(decomposition) 하였으며, Ciblak<sup>(4)</sup> 등은 강성행렬의 특성을 나타내는 3가지의 중심, 즉 탄성중심(center of elasticity), 강성중심(center of stiffness), 순응중심(center of compliance)을 정의하고, 순응축(compliance axis)과 각 중심들과의 관계를 정립하였다. 3개의 중심이 일치하는 평면상에서 Blanchet<sup>(5)</sup> 등은 탄성적으로 지지되어 있는 단일 강체에 대해 진동중심을 구하는 해석적인 3차 방정식을 유도하였다. 단병주<sup>(6)</sup> 등은 가진점과

\* 연세대학교 대학원 기계공학과

\*\* 회원, 연세대학교 기계전자공학부

E-mail : yjchoi@bubble.yonsei.ac.kr

TEL : (02)361-2826 FAX : (02)362-2736

관측점에 따른 전달함수를 진동중심과의 기하학적인 관계로 도식화하여 표현함으로써 계의 동특성을 나타내고, 이러한 기하학적인 관계를 하드디스크 스윙암의 동적 안정화에 적용하기 위한 기법을 제시하였다.

본 논문에서는 공간상에서 탄성체로 지지되어 있으며 대칭면을 갖는 단일 강체에 대한 진동모드의 기하학적인 의미를 규명하였다. 먼저, 탄성중심으로의 평행축 합동변환(parallel axis congruence transformation)에 의하여 강성행렬을 대각화할 수 있는 조건을 구하였다. 또한, 이와 같이 대각화된 강성행렬을 갖는 진동계의 고유치 해석으로부터 대칭면에 따른 진동모드의 형태를 대칭면 수직 진동축과 대칭면 내부 진동축으로 구분하였다. 대칭면 수직 진동축에 대해서는 평면상의 진동중심 개념을 진동축으로 확장하였으며, 대칭면 내부 진동축에 대해서는 진동축에 대한 3차식을 유도하여 진동모드의 기하학적인 해석을 가능하게 하였다.

## 2. 강성행렬

### 2.1 강성행렬의 분해

공간상에서 탄성체에 의하여 지지되어 평형상태에 있는 단일 강체가 있다고 하자. 이 강체의 관성중심에서 힘과 변위의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = K_G \hat{X} \quad (1)$$

여기서,  $\hat{w} = [f^T \ m^T]^T$ 로서 힘  $f$ 와 기준점에 대한 모멘트  $m$ 로 표현되는 일반화된 힘인 렌치(wrench)를 나타내고,  $\hat{X} = [\delta^T \ \phi^T]^T$ 로서 미소 병진변위  $\delta$ 와 미소 각변위  $\phi$ 로 표현되는 일반화된 변위인 미소 변위트위스트(infinitesimal twist)를 나타낸다.<sup>(7)</sup>

한편, 관성중심에서 표현한  $6 \times 6$  강성행렬  $K_G$ 는 대칭행렬이며 다음의 식으로 표현된다.

$$K_G = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, 하첨자  $G$ 는 이 행렬을 관성중심에서 표현한 것을 의미하며,  $A$ ,  $B$  및  $D$ 는  $3 \times 3$  부분행렬(submatrix)이다. 수식의 간단한 표현을 위하여, 관성중심  $G$ 에서 표현하면, 하첨자  $G$ 를 생략하고, 그 이외의 점에서 표현이 될 경우에는 별도의 하첨자로 기준을 표현하였다.

일반적으로, 탄성 지지된 강체에 렌치를 가하면 미소 변위트위스트를 일으킨다. 그러나 만약, 가해진 렌치에 대한 변위가, 가해진 렌치의 힘  $f$  방향으로의 순수 병진변위  $\delta$ 를 일으킨다면,  $f = k_f \delta$ 인 관계와 식 (1)과 식 (2)로부터 다음의 표현을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} f \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_f^{-1} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

이제, 식 (3)을 전개하면 다음과 같다.

$$k_f f = A f \quad (4)$$

$$m = B^T k_f^{-1} f \quad (5)$$

마찬가지로 방법으로, 만약, 변위트위스트를 주었을 때에, 이에 대한 렌치가 순수 작힘이라면,  $m = k_\phi \phi$ 인 관계와 식 (1)과 식 (2)로부터 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k_\phi \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)을 전개하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta = -A^{-1} B \phi \quad (7)$$

$$k_\phi \phi = (D - B^T A^{-1} B) \phi \quad (8)$$

식 (4)와 식 (8)을 살펴보면,  $k_f$ 와  $k_\phi$ 는 각각 선형강성(linear stiffness) 및 회전강성(angular stiffness)의 불변값(stationary value), 즉, 행렬  $A$  및  $(D - B^T A^{-1} B)$ 의 고유치임을 알 수 있다. Ciblak<sup>(4)</sup> 등은 식 (3) 및 식 (6)으로 표현되는 렌치와 트위스트를 각각 고유렌치와 고유트위스트

로 정의하고, 식 (4)-(5) 및 식 (7)-(8)로부터 구한 고유벡터를 사용하여 다음과 같이 강성행렬  $K_G$  를 대각화 하였다.

$$K' = \begin{bmatrix} F & \Delta \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & \Delta \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} K_f & 0 \\ 0 & K_\phi \end{bmatrix}$$

여기서,  $F = [f_1 \ f_2 \ f_3]$ ,  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]$ 이며,  $f_i$  및  $\phi_i$ 는 각각, 식 (4) 및 식 (8)에서 구한 단위 고유벡터들이고,  $\Delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]$ 이며,  $\delta_i$ 는 식 (8)에서 구한 고유벡터를 식 (7)에 대입하여 얻은 벡터들이다. 또한,

$$K_f = F^T A F = \text{diag}(k_{f1} \ k_{f2} \ k_{f3}) \quad (10)$$

$$K_\phi = (\Delta^T A + \Phi^T B^T) \Delta + (\Delta^T B + \Phi^T D) \Phi \quad (11)$$

$$= \text{diag}(k_{\phi1} \ k_{\phi2} \ k_{\phi3})$$

이다. 한편, 행렬  $F$  와  $\Phi$  는 다음의 관계식을 만족한다.

$$F^T F = I, \quad \Phi^T \Phi = I \quad (12)$$

## 2.2 평행이동에 의한 강성행렬의 대각화

식 (9)는  $K' = T^T K_G T$ 의 형태로 표현되고 있는 합동변환이다. 본 논문에서는, 이러한 변환  $T$ 를 평행이동 변환의 형태로 구하기 위하여 다음의 정리를 유도하였다.

**정리 1:** 강성행렬의 분해식에서,  $F$  와  $\Phi$ 가 단위행렬이고,  $A^{-1} B$ 가 반대칭(skew symmetric) 행렬이면, 탄성중심까지의 평행축 합동변환으로 강성행렬을 대각화 할 수 있다.

**증명:** 먼저, 식 (10)으로부터  $A$ 는 대각행렬이어야 한다는 것을 알 수 있다.

탄성중심에서 표현된 강성행렬은  $A^{-1} B_E$ 가

대칭이 된다는 성질<sup>(8)</sup>과  $A^{-1} B$ 가 반대칭행렬이라는 가정으로부터, 관성중심에서 탄성중심까지의 위치벡터를  $h$ 라 하고, 이를 반대칭행렬의 형태로 표현한 것을  $H$ 라 하면 이는 다음의 식으로 표현된다.

$$H = -\frac{1}{2} [A^{-1} B - B^T A^{-1}] \quad (13)$$

$$= -A^{-1} B$$

이제, 다음의 평행축 합동행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$E_h = \begin{bmatrix} I_3 & H_3 \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 하첨자 3은  $3 \times 3$ 인 행렬을 나타낸다. 식 (14)의 변환행렬을 이용한 평행축 합동변환은 다음의 식으로 표현된다.

$$K_E = E_h^T K_G E_h \quad (15)$$

$$= \begin{bmatrix} A & B_E \\ B_E^T & D_E \end{bmatrix}$$

여기서

$$B_E = A H + B \quad (16)$$

$$D_E = (-H A + B^T) H - H B + D \quad (17)$$

이제, 식 (13)을 식 (16) 및 식 (17)에 대입하면,

$$B_E = A H + B = 0 \quad (18)$$

$$D_E = -B^T A^{-1} B + D \quad (19)$$

임을 알 수 있다. 또한, 식 (8)과 식 (19)를 이용하여,  $\Phi$ 가 단위행렬이라는 가정을 사용하면,  $D_E = K_\phi$ 임을 알 수 있다. 그러므로, 식 (15)로 표현된  $K_E$ 는 대각행렬이다. 증명 끝.

평행이동 변환에 의하여 탄성중심에서 대각행렬로 표현되는 강성행렬은  $k_{f1}$ 부터  $k_{\phi3}$ 까지의 6개 대각값을 갖는다.  $F$  와  $\Phi$ 가 단위행렬이므로  $k_{f1}$ ,  $k_{f2}$ ,  $k_{f3}$ 를  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ 로, 그리고,  $k_{\phi1}$ ,  $k_{\phi2}$ ,  $k_{\phi3}$ 를  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_r$ 로 치환하여

표현한 강성행렬을, 역으로, 관성중심까지 평행축 합동변환하면 다음의 식으로 표현된다.

$$K_G = E_{h'}^T K_E E_{h'} \quad (20)$$

여기서,  $h'$ 는 탄성중심에서 관성중심까지의 벡터를 의미한다. 즉,  $h' = -h$ 이다.

### 3. 고유치 해석

관성중심에서 표현된 운동 방정식은, 병진과 회전진동이 같은 주파수로 변위가 발생한다고 가정한 자유 진동에 대하여 다음의 식으로 표현할 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$(K_G - \Omega^2 M_G) \hat{X} = 0 \quad (21)$$

여기서  $\Omega$ 는 고유진동수이다. 식 (21)은 관성중심에서 표현된 식이므로, 좌표축들이 관성행렬의 주축들과 일치되어 있다고 하면, 관성행렬은 대각행렬로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_G = \text{diag}(m \ m \ m \ I_x \ I_y \ I_z) \quad (22)$$

이제, 식 (20)을 식 (21)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$(E_{h'}^T K_E E_{h'} - \Omega^2 M_G) \hat{X} = 0 \quad (23)$$

여기서  $\hat{X}$ 는 고유벡터로서 변위트위스트를 의미하며, 변위트위스트  $\hat{X} = [\delta^T \ \phi^T]^T$ 는  $\delta$ 방향의 병진변위와  $\phi$ 에 대한 각변위를 동시에 표현한 것으로,  $p = \delta \cdot \phi / \phi \cdot \phi$ 로 계산되는 피치를 갖는다. 기하학적 측면에서는, 단위 나선에 스칼라량  $\|\phi\|$ 을 곱하여 표현한 것과 같다.<sup>(7)</sup>

따라서, 식 (23)으로부터 얻을 수 있는 고유벡터  $\hat{X}$ 는 미소 변위트위스트를 반복하는 진동모드로 해석할 수 있는데, 이러한 변위트위스트를, 여기서는 진동나선이라 정의한다.

식 (23)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B}^T & \overline{D} \end{bmatrix} \hat{X} = 0 \quad (24)$$

여기서,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} k_x - m\Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_y - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_z - m\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & h_z k_x & -h_y k_x \\ -h_z k_y & 0 & h_x k_y \\ h_y k_z & -h_x k_z & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \overline{D}_{11} &= k_a + h_z^2 k_y + h_y^2 k_z - I_x \Omega^2 \\ \overline{D}_{12} &= -h_x h_y k_z \\ \overline{D}_{13} &= -h_x h_z k_y \\ \overline{D}_{22} &= k_\beta + h_z^2 k_x + h_x^2 k_z - I_y \Omega^2 \\ \overline{D}_{23} &= -h_y h_z k_x \\ \overline{D}_{33} &= k_\gamma + h_y^2 k_x + h_x^2 k_y - I_z \Omega^2 \\ \overline{D}_{ij} &= D_{ji} \end{aligned} \quad (27)$$

식 (25)-(27)로부터, 벡터  $h$ 의 성분 중 하나가 영이 되면, 진동모드는 3자유도씩 분리(decoupled)됨을 알 수 있다. 이는 Harris<sup>(9)</sup>가, 대칭면에 평행한 진동은 그 면에 수직한 진동현상을 발생시키지 못하며, 대칭면에 놓여 있는 축에 대한 회전은 대칭면에 평행한 진동변위를 일으키지 못한다는, 대칭면의 개념을 사용하여 진동계의 자유도를 분리시킨 결과와 동일하다.

그러므로, 탄성 중심의 위치에 따라서, 평행이동에 의하여 대각화된 강성행렬의 대칭면이 결정됨을 알 수 있다. 이제,  $h = [h_x \ h_y \ h_z]^T$ 의 성분 중의 한 개의 값, 예를 들어  $h_z = 0$ 이 되면,  $xy$  평면은 대칭면으로 정의되고, 모드는 3자유도씩 분리되며, 진동나선  $\hat{X}$ 는 다음의 두 가지 형태로 나타난다.

$$\hat{X}^{berp} = [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (28)$$

$$\hat{X}^{in} = [0 \ 0 \ \delta_z \ \phi_x \ \phi_y \ 0]^T \quad (29)$$

식 (28)과 식 (29)로 표현된 진동나선은 피치  $p=0$ 로서 나선(screw)의 특별한 경우에 해당하는 선벡터(line bound vector)임을 알 수 있으며, 따라서,  $\hat{X}^{perp}$ 는 대칭면에 수직인 회전축을, 그리고,  $\hat{X}^{in}$ 는 대칭면에 놓여 있는 회전축을 의미한다. 즉, 이러한 고유벡터는 공간상에서의 회전축을 의미한다. 그러므로 다음의 정리가 증명된다.

**정리 2:** 평행이동에 의하여 대각화된 강성행렬에 대칭구조를 갖는 평면이 존재하면, 진동나선은 선벡터(line bound vector)인 회전축이 된다.

여기서는,  $\hat{X}^{perp}$ 를 대칭면 수직 진동축,  $\hat{X}^{in}$ 는 대칭면 내부 진동축이라 정의한다. Fig. 1과 Fig. 2에 도시한 바와 같이,  $\hat{X}^{perp}$  및  $\hat{X}^{in}$ 는 각각 3개 발생한다.

### 4. 대칭면과 진동축

#### 4.1 대칭면 수직 진동축

진동나선을 구하기 위하여 식 (23)을 진동축상의 임의의 점으로 평행축 합동변환하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} E_v'^T & K_E & E_v \\ -\Omega^2 E_v & M_G & E_v \end{pmatrix} \hat{X}_v = 0 \quad (30)$$

여기서  $v'$  과  $v$  는 각각 탄성중심과 관성중심으로부터 진동축상의 임의의 점까지의 벡터를 나타낸다.  $\hat{X}_v$  에서 하첨자  $V$ 는 진동 나선을 진동축상에서 표현한다는 것을 의미한다.

만약,  $xy$  평면이 대칭면이면,  $\hat{X}_v^{perp}$ 에 대해서는  $xy$  평면과의 교점으로  $v'$  과  $v$  를 나타낼 수 있고, 따라서  $v'$  과  $v$  는  $xy$  평면상의 벡터가 된다.

Fig. 1에 도시한 바와 같이, 식 (28)로 표현된 진동나선의 축, 즉, 진동축은  $z$ 축에 평행한 직선이므로 다음과 같은 선벡터로 표현할 수 있다.

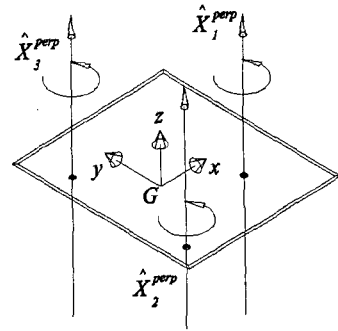


Fig. 1 The Axes of Vibration Perpendicular to the Plane of Symmetry

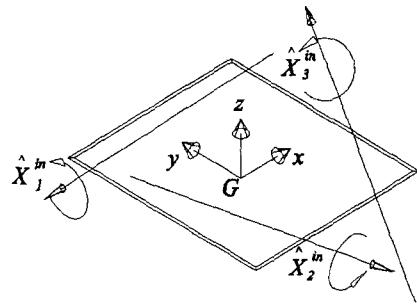


Fig. 2 The Axes of Vibration Lying in the Plane of Symmetry

$$\hat{X}_v^{perp} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (31)$$

이제, 식 (14)의 형태로 표현되는 평행이동 변환식을 벡터  $v'$  및  $v$  에 대한 식으로 표현하고, 이를 식 (31)과 함께 식 (30)에 대입하여 전개하면 다음과 같이  $v_x$ 에 대한 3차식을 얻을 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} & [k_y h_x m (k_y - k_x)] v_x^3 + [-m k_y (k_y h_x^2 + k_x h_y^2) \\ & + (k_x - k_y)(k_y h_x^2 m + k_y m - k_y I_z)] v_x^2 \\ & + h_x k_y [I_z (k_x - 2k_y) + (k_y + h_y^2 k_x + h_x^2 k_y) m] v_x \\ & + h_x^2 I_z k_y^2 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)로 표현된 3차식의 해로부터 진동축과  $xy$  평면의 교점을 구할 수 있다.

## 4.2 대칭면 내부 진동축

이 경우에는, Fig. 2에서 보는 바와 같이, 식 (29)로 표현된 진동나선의 축, 즉, 진동축은  $xy$  평면에 놓여 있는 직선이므로 다음과 같은 선벡터로 표현할 수 있다.

$$\widehat{X}_V^{in} = [0 \ 0 \ 0 \ \phi_x \ \phi_y \ 0]^T \quad (33)$$

여기서,  $\phi_x, \phi_y$ 는  $xy$  평면에 포함되는 진동축의 방향성분으로  $\phi_x^2 + \phi_y^2 = 1$ 을 만족하며, 특히,  $v_y = v_z = 0$ 라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} \quad (34)$$

$\delta = \mathbf{v} \times \phi$  인 관계로부터,<sup>(7)</sup> 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\delta = \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_x & 0 & 0 \\ \phi_x & \phi_y & 0 \end{bmatrix} = v_x \phi_y \mathbf{k} = \delta_z \mathbf{k} \quad (35)$$

식 (33) 및 식 (34)를 식 (30)에 대입하고,  $\frac{\phi_y}{\phi_x}$ 의 꼴로 정리하면 미지수  $\Omega, \phi_x, \phi_y$ 에 대한 다음의 3가지 식을 얻는다.

$$\frac{\phi_y}{\phi_x} = \frac{h_y k_z}{(h_x - v_x)k_z + v_x m \Omega^2} \quad (36)$$

$$\frac{\phi_y}{\phi_x} = \frac{k_\alpha + h_y^2 k_z - I_x \Omega^2}{(h_x - v_x) h_y k_z} \quad (37)$$

$$\frac{\phi_y}{\phi_x} = \frac{(h_x - v_x) h_y k_z}{k_\beta + (v_x - h_x)^2 k_z - (I_y + v_x^2 m) \Omega^2} \quad (38)$$

식 (36)과 식 (38)로부터  $\Omega^2$ 에 대한 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\Omega^2 = \frac{k_\beta}{I_y + h_x m v_x} \quad (39)$$

다시, 식 (36)과 식 (37)로부터  $\frac{\phi_y}{\phi_x}$ 를 소거하고, 식 (39)를 대입하여  $v_x$ 에 대하여 정리하면, 다음의 3차식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & h_x^2 k_\alpha k_z m^2 v_x^3 - h_x m [I_x k_\beta k_z - 2I_y k_\alpha k_z \\ & + (k_\alpha k_\beta + h_x^2 k_\alpha k_z + h_y^2 k_\beta k_z) m] v_x^2 + \\ & [I_y^2 k_\alpha k_z + I_x k_\beta (k_\beta + h_x^2 k_z) m - I_y (I_x k_\beta k_z \\ & + (k_\alpha k_\beta + 2 h_x^2 k_\alpha k_z + h_y^2 k_\beta k_z) m)] v_x \\ & + h_x I_y k_z (I_x k_\beta - I_y k_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

식 (40)으로부터 구한 3개의  $v_x$ 를 식 (39)에 대입하여 각각의  $\Omega^2$ 를 구하면, 식 (36)-(39)로부터 각각  $\frac{\phi_y}{\phi_x}$ 를 구할 수 있다. 이때에  $\frac{\phi_y}{\phi_x} = \tan[\theta]$ 인 관계로  $\phi_x, \phi_y$ 를 구할 수 있으며, 다시, 식 (35)로부터  $\delta_z$ 를 구할 수 있다. 따라서 진동축 상에서의 해석식으로부터 식 (29)로 판성 중심에서 표현된 진동축을 구할 수 있음을 보였다.

다음으로 만일  $\mathbf{v}$ 을  $y$  축상에 일치하도록 하면, 동일한 전개과정으로 첨자  $x$ 가  $y$ 로,  $\alpha$ 가  $\beta$ 로 대치되는 3차식을 구할 수 있다.

한편, 탄성체로 지지되어 있는 단일강체의 자유도를 대칭면 내부 진동축의 자유도인  $[z, \theta_x, \theta_y]$ 로 가정한 경우,  $xy$  평면이 대칭면이어야 한다는 전제 조건이 필요하다는 것을 알 수 있으며, 일반적인 진동이론에서의 고유치 해석에 있어서, 그 진동모드를 수직방향의 병진 모드와 회전모드에 의한 기울어짐(tiling) 모드로 해석하고 있으나,<sup>(11)</sup> 본 절에서 구한 고유벡터의 기하학적인 특징에 의하면, Fig. 2에 도시되어 있는 3개의 진동축으로 그 진동모드를 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 따라서 수직방향의 순수 병진모드는 존재할 수 없다는 것을 알 수 있다.

4.3 두 개의 대칭평면

$h$ 의 성분중 두 개를 영이 되도록 하면, 대칭평면을 2개 만들 수 있으며, 자유도 분리의 결과로, 대칭면이 교차하는 축방향으로 병진과 회전이 완전히 독립적이 된다는 것을 알 수 있으며 이는 Harris<sup>(9)</sup>의 결과와 일치하고, Blanchet<sup>(10)</sup>이 제시한 순병진모드(pure translational mode)와 순짜힘 모드(pure couple mode)를 나타내고 있다.

대칭면을  $xy$ ,  $zx$  두 개의 평면이라 하면,  $x$  축 방향으로 병진과 회전모드가 독립적으로 존재하고, 그때의 고유진동수는  $\sqrt{\frac{k_x}{m}}, \sqrt{\frac{k_a}{I_x}}$  이다.

한편, 나머지 진동모드는 분리된 결과로 대칭면 수직 진동축은  $z$  축방향으로 평행하면서  $x$  축과 교차하는 두개의 회전축으로 나타나며, 대칭면 내부 진동축은  $xy$  평면에 포함되고  $x$  축과 직교하는 두개의 회전축으로 나타난다. 따라서 이 경우의  $v'$  와  $v$  는  $x$  축 성분만이 존재한다.

4.3.1 대칭면 수직 진동축

식 (32)를 식 (31)에 대입하여,  $\Omega^2$ 에 대해서 정리하면 미지수  $\Omega, v_x$ 에 대한 다음의 두 개의 식을 구할 수 있다.

$$\Omega^2 = \frac{k_y}{m} \frac{v_x - h_x}{v_x} \quad (41)$$

$$\Omega^2 = \frac{k_y + (v_x - h_x)^2 k_y}{I_x + m v_x^2} \quad (42)$$

식 (41)과 식 (42)를 연립하여 전개하면,  $v_x$ 에 대한 2 차식을 식 (43)과 같이 구할 수 있다.

$$(m k_y h_x) v_x^2 + (I_x k_y - k_y m - h_x^2 k_y m) v_x - h_x I_x k_y = 0 \quad (43)$$

식 (43)의 해로부터, 두 개의 모드에 대한 진동축의 위치를 구할 수 있으며 이때의 고유진동수는 식 (41) 또는 식 (42)로부터 구할 수 있다.

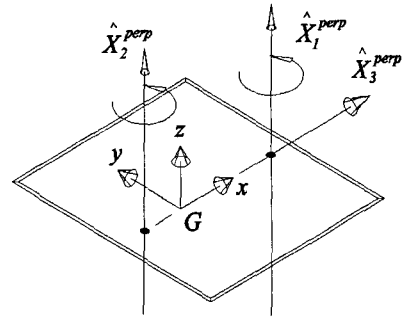


Fig. 3 The Axes of Vibration Perpendicular to the Two Planes of Symmetry with a Translation mode

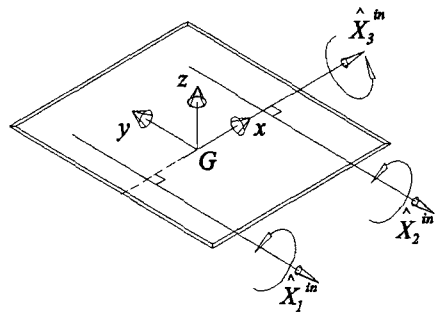


Fig. 4 The Axes of Vibration Lying in the Two Planes of Symmetry

4.3.2 대칭면 내부 진동축

진동축은 대칭면인  $xy$  평면에 포함되고  $x$  축과 수직으로 교차한다. 따라서 식 (33)으로 표현되었던 고유모드는 다음의 식으로 표현된다.

$$\hat{X}_V^{in} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (44)$$

식 (44)를 식 (30)에 대입하여,  $\Omega^2$ 에 대해서 정리하면 미지수  $\Omega, v_x$ 에 대한 다음의 두 개의 식을 얻는다.

$$\Omega^2 = \frac{(v_x - h_x) k_z}{v_x m} \quad (45)$$

$$\Omega^2 = \frac{k_\beta + k_z (v_x - h_x)^2}{I_y + m v_x^2} \quad (46)$$

식 (45)와 식 (46)을 연립하여 전개하면,  $v_x$ 에 대한 2차식을 식 (47)과 같이 구할 수 있다.

$$h_x k_z m v_x^2 + (I_y k_z - (k_\beta + h_x^2 k_z) m) v_x - h_x I_y k_z = 0 \quad (47)$$

이상의 결과를 도시하면 Fig. 3과 Fig. 4와 같다.

#### 4.4 세 개의 대칭평면

만일  $\mathbf{h}$ 의 성분이 모두 영이 된다면, 세개의 대칭면이 존재하는데, 이 경우는 탄성 중심이 관성 중심과 일치하고 있다는 것을 의미한다. 따라서 진동모드는 완전하게 분리되어 각 축 방향의 병진모드와 회전모드가 된다. 이 때의 고유진동수는 탄성중심에서 표현된 강성행렬의 대각값을 관성행렬로 나눈 값이 된다.

### 5. 결론

본 논문에서는, 공간상에서 탄성체로 지지되어 있는 단일 강체에 대하여 탄성중심으로의 평행축 합동변환에 의하여 강성행렬을 대각화할 수 있는 조건을 구하고, 탄성중심의 위치에 따라 진동모드의 자유도를 분리시키는 대칭면의 조건을 제시하였으며, 진동모드는 대칭면 수직 진동축, 또는, 대칭면 내부 진동축임을 나타내었다.

대칭면 수직 진동축에 대해서는, 평면상의 진동중심 개념을 진동축으로 확장하였으며 대칭면에 수직한 회전축임을 보였다.

대칭면 내부 진동축에 대해서는, 진동축에 대한 3차식을 해석적으로 제시하고, 대칭면에 포함된 회전축임을 나타내었다.

이러한 새로운 해석 방법에 의한 진동축의 도시는 진동문제를 개선하는데 편리한 설계도구로 사용될 수 있다.

### 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 정보저장기기 연구센터의 지원(1997G0102)을 받아 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Griffis, M and Duffy, J., 1991, "Kinesthetic Control : A Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 113. pp. 508-515.
- (2) Loncaric, J., 1985, *Geometrical Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics*, Ph.D, Dissertation, Harvard University.
- (3) Lipkin, H. and Patterson, T., 1992, "Geometrical Properties of Modeled Robot Elasticity: Part I-Decomposition," 1992 *ASME Design Technical Conference*, DE-vol. 45, pp. 179-185.
- (4) Ciblak, N., and Lipkin, H., 1994, "Centers of Stiffness, Compliance, and Elasticity in the Modeling of Robotic Systems," 1994 *ASME Design Technical Conference*, DE-vol. 72, pp. 185-195.
- (5) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1996, "Vibration Centers for Planar Motion," *Proc. of 1996 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference DETC/MECH-1165*.
- (6) 단병주, 최용제, 1999, "나선이론에 의한 진동 해석 및 정보저장기기 설계에의 응용," *대한기계학회논문집 A권*, 제23권 제2호, pp.155~165.
- (7) 최용제, 1991, "나선이론에 의한 로봇의 운동 및 역학적 해석," *대한기계학회지*, 제31권, 제7호, pp. 616-625.
- (8) Ciblak, N., 1998, *Analysis of Cartesian Stiffness and Compliance with Application*, Ph. D Dissertation, Georgia Institute of Technology.
- (9) Harris, C., 1997, *Shock and Vibration Handbook* 4th, McGraw Hill.
- (10) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1998, "Dual Properties for Vibration Analysis via Screw Theory," *Proc. of 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC/MECH-5868*.
- (11) 정진태, 1997, "CD-ROM 드라이브 피딩 시스템의 진동해석," *대한기계학회 동력학 및 제어 부문 춘계학술대회 논문집*, pp. 97~103.