

상태변수를 갖는 비탄성 구성식 적분법의 일반화

윤삼손* · 이순복** · 김종범*** · 이형연*** · 유 봉***
(1998년 4월 22일 접수)

Generalization of Integration Methods for Complex Inelastic Constitutive Equations with State Variables

SamsonYoun, Soon-Bok Lee, Jong-Bum Kim, Hyung-Yeon Lee and Bong Yoo

Key Words : Unified Viscoplastic Constitutive Equations (통합형 점소성 구성식), Implicit Integration(내연적 적분), FEM(유한요소법), Inelastic Analysis(비탄성 해석), Time Increment Control(시간증분조절)

Abstract

The prediction of the inelastic behavior of the structure is an essential part of reliability assessment procedure, because most of the failures are induced by the inelastic deformation, such as creep and plastic deformation. During decades, there has been much progress in understanding of the inelastic behavior of the materials and a lot of inelastic constitutive equations have been developed. These equations consist of the definition of inelastic strain and the evolution of the state variables introduced to quantify the irreversible processes occurred in the material. With respect to the definition of the inelastic strain, the inelastic constitutive models can be categorized into elastoplastic model, unified viscoplastic model and separated viscoplastic model and the different integration methods have been applied to each category. In the present investigation, the generalized integration method applicable for various types of constitutive equations is developed and implemented into ABAQUS by means of UMAT subroutine. The solution of the non-linear system of algebraic equations arising from time discretization with the generalized midpoint rule is determined using line-search technique in combination with Newton method. The strategy to control the time increment for the improvement of the accuracy of the numerical integration is proposed. Several numerical examples are considered to demonstrate the efficiency and applicability of the present method.

기호설명

ϵ_{eq}^p : 등가 소성변형률

- $\dot{\epsilon}_e$: 탄성 변형률 속도
- $\dot{\epsilon}_{th}$: 열 변형률 속도
- $\dot{\epsilon}_c$: 크리프 변형률 속도
- $\dot{\epsilon}_p$: 소성 변형률 속도
- $\dot{\epsilon}_{in}$: 비탄성 변형률 속도($\dot{\epsilon}_c + \dot{\epsilon}_p$)

1. 서론

발전소의 터빈 로터나 보일러, 항공기의 가스터빈, 액체 금속로의 압력 용기나 배관등과 같은 구조물들은 고온, 고압의 취약한 운전 조건에서 장시간 노출되어 크립 변형과 소성 변형과 같은 비탄성 변형이 발생하고 이들의 상호작용으로 인하여 구조물의 수명이 급격히 감소하게 된다. 이러한 고온 구조물의 안정성 평가를 수행하기 위해서는 재료의 거동을 정확히 예측할 수 있는 비탄성 구성식이 필수적으로 요구된다. Bodner,⁽¹⁾ Miller,⁽²⁾ Chaboche⁽³⁾ 등은 통합형 점소성 구성식을 제안하였으며, Inoue 등⁽⁴⁾ 은 다양한 구성식들의 비교 평가를 수행하였다

* 한국과학기술원
 ** 회원, 한국과학기술원
 E-mail : sblee@kaist.ac.kr
 TEL : (042)869-2008 FAX : (042)869-4710
 *** 회원, 한국원자력연구소

개발된 구성식을 수치적 방법을 이용하여 구조 해석에 적용하기 위한 연구 역시 활발하게 진행되고 있는데 Ortiz⁽⁵⁾는 탄성예측-소성보정법(elastic prediction-plastic correction method)을 이용한 해석코드를 개발하였으며 Hornberger,⁶⁾ Chaboche⁽⁷⁾는 GMR(general midpoint rule) 시간 적분법을 이용하여 구성식의 수치적 적분에 관한 연구를 수행한바 있다.

하지만 다양한 해석 기능을 보유한 유한요소해석 코드의 개발은 방대한 양의 작업이므로 설계과정에는 상용 유한해석 코드를 이용하여 비탄성 해석을 수행한다. 이러한 코드들은 이미 개발되어 있거나 새로 개발된 비탄성 구성식의 해석 기능을 충분히 보유하지 못하고 있어서 비탄성 해석 프로그램으로 부족한 면이 있다. 이러한 면을 보강하기 위하여 ABAQUS, MARC, ADINA 와 같은 범용 유한요소해석 코드에서는 사용자가 재료의 변형 거동을 정의할 수 있는 모듈을 제공하여 비탄성 해석 능력을 보완하고 있다

본 연구에서는 다양한 형태를 갖는 구성식의 적분법을 일반화시켜 ABAQUS 의 UMAT 루틴을 이용하여 유한요소 해석기법과 결합시키는 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램에서는 비탄성 변형률의 정의와 사용된 상태변수에 따라 다양한 형태를 갖는 탄소성 구성식, 분리형 점소성 구성식, 통합형 점소성 구성식의 적분을 수행하기 위하여 개발되었으며 GMR 시간 적분법을 이용하여 비탄성 구성식을 선형화시킨 후 선추적 기법을 결합시킨 Newton-Raphson 방법을 이용하여 비탄성 구성식의 해를 구하였다. 구조물의 강성행렬을 구성하기 위해 필요한 접선 행렬은 계산 과정과 일관되게 유도하였으며 계산의 효율성과 정확성을 위하여 다양한 상태변수에 적용가능한 시간증분조절법을 개발하였다.

프로그램의 검증을 위하여 단축 하중에 대한 해석과 주응력이 변하는 다축 하중에 대한 해석을 수행하였다. 또한 시간 의존성 변형에 대한 해석능력을 평가하기 위하여 노치가 있는 환봉 시편의 단축인장, 크리프 및 응력 회복에 대한 해석을 수행하였다.

2. 비탄성 구성식의 일반화

2.1 비탄성 구성식의 종류

비탄성 구성식은 시간 의존성의 유무에 따라 점소성 구성식과 탄소성 구성식으로 구분할 수 있다. 점소성 구성식은 다시 소성 변형률과 크리프

변형률을 분리하여 고려하는 분리형 모델과 크리프 변형과 소성 변형을 동일한 변형기구에서 발생하는 현상으로 간주하는 통합형 모델로 구분할 수 있다.

비탄성 구성식의 기본적인 가정은 변형률을 성분별로 분리할 수 있다는 것이다. 즉 전체 변형률을 식 (1)과 같이 탄성 변형률, 열변형률, 비탄성 변형률로 분리할 수 있다는 것이다.⁽⁶⁾

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} \quad (1)$$

여기서 기호 위의 “·”은 시간에 대한 미분을 의미한다. 탄성 변형률과 열 변형률은 일반적으로 식 (2)~(3)과 같은 선형식으로 정의된다.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] \mathbf{I} \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} = \gamma \dot{\mathbf{T}} \mathbf{I} \quad (3)$$

여기서 E 와 ν 는 각각 영계수와 포아송비이며, γ 와 \mathbf{I} 는 열팽창계수와 항등행렬을 의미한다. 식 (1)~(3)을 정리하면 응력 변화율에 관한 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & \mu \text{tr}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in}] \mathbf{I} + \lambda (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in}) \\ & - \gamma (\mu + 3\lambda) \dot{\mathbf{T}} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 λ 와 μ 는 Lamé 의 상수이며 비탄성 변형률의 정의에 따라서 탄소성, 분리형 점소성, 통합형 점소성 모델로 구분된다.

2.1.1 탄소성 구성식

크리프 변형이나 속도 의존성이 작은 경우에는 탄소성 구성식을 사용하여 재료의 거동을 기술한다. 탄소성 구성식은 탄성영역과 소성영역을 구분하는 항복함수가 정의되며 경화변수의 종류에 따라 등방성 경화 모델과 이동성 경화 모델로 구분된다.

소성 변형률은 식 (5)과 같은 항복함수에 의하여 간접적으로 정의된다.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}, T) = 0 \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\xi}$ 는 재료 내부의 비가역 반응을 모사하기 위해 도입한 내부 상태변수를 의미하며 대표적인 예로 등가 소성변형률(ε_{eq}^p)과 변형률 경화 응력이 있다. 여기서 주의할 점은 식 (4)에서 요구하는 소성 변형률의 변화율($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^p$)이 간접적으로 정의되어 있으므로 수치해석 과정에서는 이 값을 변수로 하여 계산해야 한다는 것이다.

2.1.2 통합형 점소성 구성식

통합형 점소성 구성식은 크립 변형과 소성 변형을 동일한 변형기구에서 발생하는 현상으로 간주하고 비탄성 변형률의 변화율은 상태변수의 함수로 정의한다. 4장에서 사용되는 Chaboche 점소성 구성식은 대표적인 통합형 점소성 구성식이다.

$$\dot{\epsilon}_{in} = f(\sigma, \xi, T) \quad (6)$$

식 (4)에 식 (6)를 대입시키면 응력의 변화율을 상태변수의 함수로 유도할 수 있다.

2.1.3 분리형 점소성 구성식

분리형 점소성 구성식은 비탄성 변형을 소성 변형과 점성 변형으로 분리하여 독립적으로 계산하는 계산 방법으로 탄소성 구성식과 통합형 점소성 구성식의 중간 형태라고 할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{in} = \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_c \quad (7)$$

소성 변형률은 식 (5)의 항복 함수와 일치 조건에 의하여 정의되며 크립 변형률 속도는 식 (6)과 같이 상태변수의 함수로 주어진다.

2.2 상태변수의 발전식

앞 절에서 언급한 비탄성 변화율과 더불어 구성식을 구성하는 요소는 상태변수의 정의이다. 상태변수는 하중 이력이나 온도 변화에 의한 재료 내부의 비가역적 변화를 정량적으로 기술하기 위하여 도입되었다. 대부분의 경우 상태변수는 식 (8)과 같은 형태로 정의가 되지만 탄소성 구성식에서 사용되는 상태변수인 등가 비탄성 변형률은 간접적으로 정의된다.

$$\dot{\xi} = H(\sigma, \xi, T) \quad (8)$$

따라서 식 (8)과 같은 형태로 정의되지 않는 상태변수를 ζ 를 이용하여 나타내기로 한다.

2.3 비탄성 구성식의 일반적 형태

앞서 서술한 다양한 구성식을 일반적인 형태로 정리하면 응력의 발전식, 상태변수의 발전식과 이 변수들에 부가되는 제한 조건으로 정리할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = G(\sigma, \xi, \zeta, T, \dot{\epsilon}, \dot{T}) \quad (9)$$

$$\dot{\xi} = H(\sigma, \xi, \zeta, T) \quad (10)$$

$$F(\sigma, \xi, \zeta, T) = 0 \quad (11)$$

식 (9) ~ (11)는 비탄성 구성식의 형태를 모두 포함할 수 있는 형태이며 다음 장에서 비탄성 구성식 적분법의 일반적인 해법을 유도하는데 사용된다.

3. GMR 적분법을 이용한 구성식의 적분

3.1 구성식의 선형화

비탄성 구성식은 여러 변수들이 복잡하게 얽혀 있는 다원 일차 미분방정식의 형태를 갖는다. 이것을 수학적으로 간략히 표현하면 식 (12)와 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (12)$$

$$g(t, y) = 0 \quad (13)$$

평형 방정식의 계산에 내연적 방법을 사용하는 ABAQUS 와 같은 유한요소 해석 코드의 경우 접선 강성 행렬이 필요하게 되는데 이 행렬은 적분 계산과정과 일관되게 구해야 한다. 이러한 이유로 비탄성 구성식의 적분은 오일러 법과 같은 선형화 방법을 사용한다.

일반적으로 구성식의 적분에 사용되는 선형화 방법으로는 일반 Trapezoidal 법(General Trapezoidal Rule: 이하 GTR)과 일반 중간점법(General Midpoint Rule: 이하 GMR)이 있다. 식 (12) 형태의 미분방정식에 GTR 을 적용한 경우 변수의 증분은 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$\Delta y = [(1 - \theta)f(y_i, t) + \theta f(y_{i+\Delta t}, t + \Delta t)]\Delta t \quad (14)$$

마찬가지로 식 (12)을 GMR 을 이용하여 선형화하면 다음과 같다.

$$\Delta y = f(y_\theta, t + \theta\Delta t)\Delta t \quad (15)$$

여기서 θ 는 0 에서 1 사이의 임의의 수이며 $y_\theta = y_i + \theta\Delta y$ 이다. GTR 은 초기 상태의 변화율과 나중 상태의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산하는 방법이고 GMR 은 중간점에서의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산하는 방법이다. 이 두 방법은 θ 가 0 인 경우 외연적 오일러법, θ 이 1 인 경우 내연적 오일러법이 되어 서로 일치한다. 두 방법 모두 식 (12)의 형태의 미분방정식의 적분에 사용할 수 있지만 GTR 은 식 (13)의 제한조건을 부가할 변수가 명확하게 규정되지 않게 된다. 하지만 GMR 은 모든 식이 일관되게 중간점에서의 변수값에 의존하므로 이러한 모호성이 발생하지 않는다.

$$g(t + \theta\Delta t, y_\theta) = 0 \quad (16)$$

GMR 은 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 인 경우 무조건 안정하며⁽⁶⁾ 탄소성 구성식은 물론 통합형 점소성 구성식까지 적용할 수 있다. GMR 을 이용하여 식 (9) ~ (11) 을 선형화 시키면 다음과 같다.

$$\Delta\sigma = \Delta t \mathbf{G}(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, \varepsilon_\theta, T_\theta) \quad (17)$$

$$\Delta\xi = \Delta t \mathbf{H}(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, T_\theta) \quad (18)$$

$$\mathbf{F}(\sigma_\theta, \xi_\theta, \varsigma_\theta, T_\theta) = 0 \quad (19)$$

여기서 $\sigma_\theta = \sigma_t + \theta\Delta\sigma$ 이고 ξ_θ 도 같은 방법으로 정의된다. 중간점의 변형률과 온도는 주어진 변형률 증분($\Delta\varepsilon$)과 온도 증분(ΔT)에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_t + \theta\Delta\varepsilon \quad (20)$$

$$T_\theta = T_t + \theta\Delta T \quad (21)$$

결과적으로 선형화된 식 (17)~(19)에서 미지수는 σ_θ , ξ_θ , ς_θ 가 되어 비선형방정식이 연립된 형태로 전환된다.

비선형 연립방정식의 해법은 다양하게 제시되어 있으나 본 연구의 목적상 임의의 비탄성 구성식의 적분을 수행할 수 있는 범용성을 갖는 뉴턴 방법을 사용하였으며 초기값이 해와 차이가 클 경우에 발산하는 뉴턴 방법의 단점을 보완하기 위하여 선 추적 기법(Line search)을 결합시켜 초기값에 무관하게 해에 접근하는 방법을 사용하였다. 이에 대한 자세한 설명은 참고문헌⁽⁹⁾에 잘 정리되어 있다.

3.2 접선 강성 행렬의 유도

접선 강성 행렬은 뉴턴 방법을 사용하여 평형 방정식의 해를 구할 때 2 차 수렴도를 유지하기 위하여 필요한 성분이며 적분 과정과 일치하는 방법으로 결정되어야 한다.⁽⁶⁾ 접선 강성 행렬을 유도하기 위하여 먼저 식 (17)~(19)을 각 변수에 대하여 편미분을 취하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} d\sigma_{t+\Delta t} - \Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \varsigma_{t+\Delta t}} d\varsigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \varepsilon_{t+\Delta t}} d\varepsilon_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} d\xi_{t+\Delta t} - \Delta t \left[\frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \varsigma_{t+\Delta t}} d\varsigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} d\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \xi_{t+\Delta t}} d\xi_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varsigma_{t+\Delta t}} d\varsigma_{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial T_{t+\Delta t}} dT_{t+\Delta t} = 0 \quad (24)$$

함수 \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{F} 는 모두 중간점 변수를 인자로 갖는데 이를 최종점 변수로 미분하기 위해서 식 (25)

의 관계를 이용하였다.

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} = \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \sigma_{t+\Delta t}} = \theta \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} \quad (25)$$

식 (22)~(24)를 행렬식으로 정리하여 간단한 행렬연산을 수행하면 응력과 상태변수를 온도와 변형률의 선형화식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{t+\Delta t} \\ d\xi_{t+\Delta t} \\ d\varsigma_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \theta \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \varsigma_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & \mathbf{I} - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial \varsigma_\theta} \\ -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \sigma_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \xi_\theta} & -\theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \varsigma_\theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial \varepsilon_\theta} & \frac{\partial \mathbf{G}_\theta}{\partial T_\theta} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{H}_\theta}{\partial T_\theta} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial T_\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{t+\Delta t} \\ dT_{t+\Delta t} \end{pmatrix} \quad (26)$$

식 (26)의 행렬 연산을 통하여 구한 응력 증분의 변형률 증분의 선형 관계가 접선강성행렬이며 비선형 시스템의 강성행렬을 구성한다. 또한 응력 증분과 온도 증분의 선형관계는 열전달 해석과 응력해석이 결합된 경우에 사용되는 성분이다.

3.3 시간증분 조절법

비선형 유한 요소 코드의 효율성은 시간 증분의 크기를 조절하는 방법에 크게 좌우된다. 시간 증분을 조절하기 위한 기준은 평형 방정식을 만족시키기 위한 반복 계산에서의 수렴도과 구성 방정식의 수치적 적분의 정확성이다. 본 연구에서는 구성식의 수치적 적분에 대한 연구에 중점을 두고 있으므로 평형 방정식의 수렴도에 대해서는 다루지 않았다.

구성식 적분의 정확성만을 고려할 경우, GMR의 정확성은 미분 방정식을 테일러 전개시킨 것과 비교하여 나타낼 수 있다. 식 (12)와 같은 미분방정식의 경우 절삭오차(truncation error)는 다음과 같다.

$$e = \Delta t \left\| A \|\mathbf{f}^{t+\Delta t}\| + B \|\mathbf{f}^{t+\theta\Delta t}\| + C \|\mathbf{f}^t\| \right\| \quad (27)$$

$$A = \frac{2-3\theta}{4(1-\theta)}, B = \frac{1-6\theta(1-\theta)}{4\theta(1-\theta)}, C = \frac{3\theta-1}{4\theta}$$

여기서 $\|\mathbf{f}\|$ 는 벡터 Norm 을 의미한다.

내부 변수는 종류에 따라 응력 차원, 변형률 차원 또는 무차원 등의 다양한 차원(dimension)을 갖게 된다. 차원이 다른 내부 변수가 사용되는 경우 응력 차원을 갖는 내부변수는 변형률 차원이거나 무차원 변수는 상대적으로 매우 큰 오차를 발생시키게 된다. 따라서 모든 변수를 무차원화시켜 오차의 크기를 대등하게 해주어야 한다. 식 (12)에서

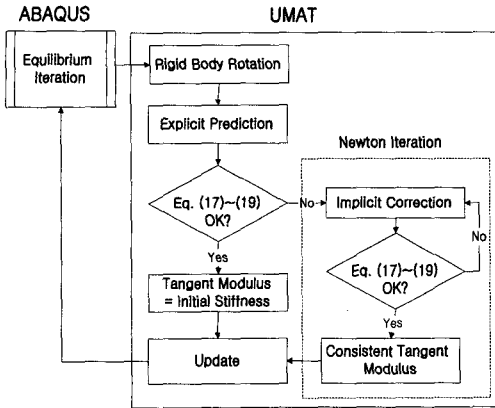


Fig. 1 Program Flowchart

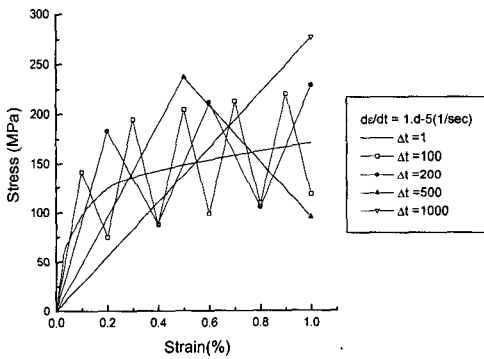


Fig. 2 Stress-strain curve of the simple tension analysis

주어진 함수 f 의 i 번째 성분이 발생시키는 오차를 e_i 라고 하면

$$e_i^* = \frac{e_i}{\Delta y_i} \quad (28)$$

로 무차원시켜 e_i^* 의 최대값을 오차의 대표값으로 정하였다.

식 (13)의 제한 조건은 함수 g 가 항상 0 을 만족하여야 하지만 선형화 과정에 의하여 중간점에서만 0 을 만족시킨다. 따라서 최종점에서의 함수 값 ($g^{t+\Delta t}$) 의 값이 바로 오차가 되며 함수값의 차원이 응력이면 미세스 응력으로 나누고 변형률 차원인 경우 등가 소성 변형률로 나누어 무차원화를 시킨다.

$$\max(e_i^*) \leq ETOL, \quad g^{t+\Delta t} \leq CTOL \quad (29)$$

$$\max(e_i^*) > ETOLU, \quad g^{t+\Delta t} > CTOLU \quad (30)$$

Table 1 List of the error criterion

Parameter	Value	Parameter	Value
ETOL	0.001	ETOLU	0.01
CTOL	0.005	CTOLU	0.05

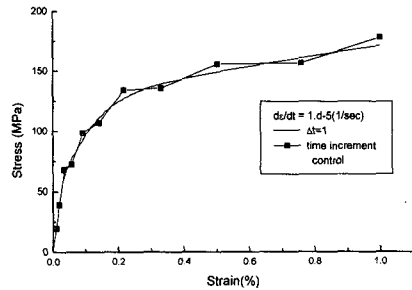


Fig. 3 Simple tension analysis using time increment control strategy

4 장의 수치해석을 수행할 때 사용한 값은 Table 1 에 정리되어 있다. 예측 오차가 식 (29)를 만족시킬 경우에는 시간 증분을 2 배로 증가시키고 식 (30)을 만족시킬 경우에는 시간 증분을 1/4 배로 감소시켜 계산을 다시 수행하였으며, 두 경우에 해당하지 않는 경우에는 시간 증분을 그대로 유지하였다.

3.4 ABAQUS 와의 연결

Fig. 1 은 작성된 프로그램과 ABAQUS 와의 관계와 작성 코드의 계산 절차를 나타낸 것이다. UMAT 모듈에 의하여 비탄성 구성식의 계산이 이루어지고 ABAQUS 에서 평형 방정식을 계산하게 된다. 작성된 프로그램은 변형률 증분, 온도 증분, 변형경사행렬(deformation gradient tensor)등을 ABAQUS 에서 넘겨 받은 후 이에 해당하는 응력 및 상태변수의 변화와 접선 강성 행렬을 계산하여 ABAQUS 에 넘겨주는 역할을 수행한다. 계산 과정은 Fig.1 과 같이 대변형을 고려하기 위하여 Jaumann Rate 를 이용하여 상태 변수들의 강제 회전(Rigid Body Rotation)를 고려한다.⁽¹⁰⁾ 그리고 외연적 방법으로 예측을 수행하여 이 값으로부터 중간점($t+\theta\Delta t$)에서 식 (17)과 식 (18)이 만족되는지 점검한다. 만약 만족하지 않으면 내연적 방법을 통한 보정 계산을 수행하여 식 (17)과 식 (18)을 만족시키는 소성변형량을 결정한다. 그리고 이를 이용하여 접선 강성 텐서와 최종점($t+\Delta t$)에서의 상태 변수의 값을 계산한다.

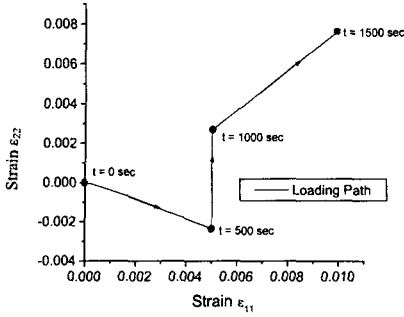


Fig. 4 Loading path of the non-proportional multiaxial deformation

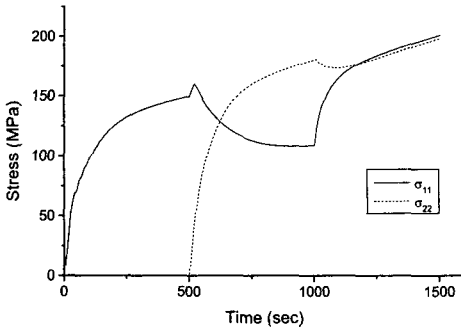


Fig. 5 Stress history of the non-proportional multiaxial deformation ($\Delta t=10$ sec)

4. 수치 해석

4.1 시간 증분 조절법의 적용

본 연구에서 구축한 프로그램의 수치적 정확도를 검증하기 위하여 단축 인장 하중에 대한 해석과 주응력 방향이 변하는 하중에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 비탄성 구성식은 Chaboche⁽³⁾가 제안한 통합형 점소성 모델로 구성식에 대한 설명은 Table 3에 정리하였으며 316 스테인레스강의 재료상수는 Schwertel⁽¹¹⁾의 논문에서 인용하였으며 Table 4에 수록하였다.

4.1.1 단축경화해석

1개의 3차원 요소를 사용하여 일정한 변형률 속도로 인장 하중을 작용시키는 단축 경화 해석을 수행하였다. Fig. 2은 시간 증분의 변화에 따른 구성식의 적분 결과를 나타낸 것이다. 여기서 θ 는 0.5로, 변형률 속도는 1×10^{-5} (1/sec)로 고정하였으며 시간증분을 각각 100초, 200초, 500초, 1000초로 고정된 경우를 시간 증분을 1sec로 고정된 정

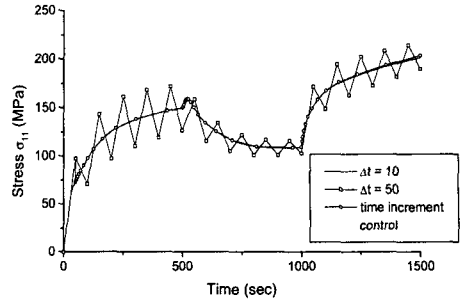


Fig. 6 Application of time increment control strategy

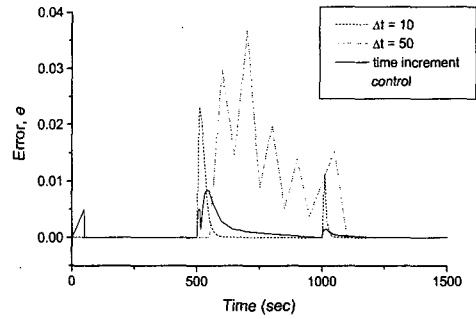


Fig. 7 Error history of the non-proportional multiaxial deformation

밀해와 비교하였다. 모든 경우에 대하여 각 증분의 중간점 ($t + \theta \Delta t$)에서는 정밀해와 정확히 일치하고 있지만 시간 증분이 커질수록 결과의 떨림 현상이 커지게 되는데 이러한 오차는 해가 발산하는 원인이 되기도 하기 때문에 적절한 시간 증분 조절법이 요구됨을 알 수 있다.

θ 값이 계산의 정밀도에 미치는 영향을 관찰하기 위하여 시간 증분을 고정하고 θ 를 변화시키는 해석을 수행한 결과 θ 가 0에 근접한 경우에 초기 강성에 의한 과도예측(Overshoot)으로 큰 진동을 보이게 되며 θ 가 1에 근접한 경우에는 실제 해와 거의 일치하는 경향을 보인다. 하지만 구조 해석에서 많은 수의 요소가 각기 다른 강성을 갖게 되는 경우에는 θ 가 0.5로 규정하는 것이 가장 높은 수렴도를 보인다.⁽⁶⁾

Fig. 3은 본 논문에서 제안한 시간증분조절법을 적용하여 해석을 수행한 결과를 나타낸 것으로 시간 증분을 제외한 모든 조건은 Fig. 1의 것과 동일하다. 첫 시간 증분을 10초로 하여 계산을 수행하였으며 11개의 시간 증분이 사용되었으므로 증분 수로는 그리 큰 차이가 없지만 정확도는 Fig. 2에 나타난 시간증분을 100초로 고정된 경우에 비

Table 2 Results of the multiaxial analysis

Case	No. of time increment	No. of iteration	CPU time
$\Delta t = 10$	150	153	45.05
$\Delta t = 50$	30	59	25.64
증분 조절	47	63	32.97

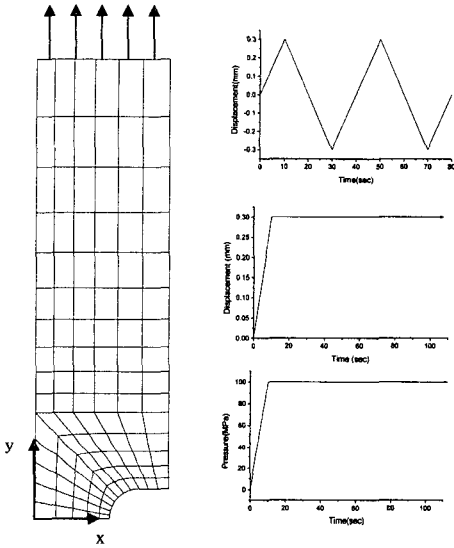


Fig. 8 Finite element model and the loading histories

해 월등히 개선되었다.

4.1.2 주응력방향이 변하는 하중의 해석

앞 절에서 단축 경화 해석에 대한 본 프로그램의 해석 능력을 검증하였으며 시간 증분 조절법의 적용으로 해석 결과의 정확도가 개선됨을 확인하였다. 본 절에서는 다축 거동에 대한 해석 능력과 시간증분 조절법의 적용성을 평가하기 위하여 주응력 방향이 변하는 다축 하중에 대한 해석을 수행하였다. ϵ_{11} 와 ϵ_{22} 를 Fig. 4 와 같이 변화시켜 주응력 방향이 바뀌는 하중을 부가하였다. Fig. 5 는 시간 증분을 10 초로 고정하였을 경우의 응력 이력을 나타내고 있으며 σ_{11} 과 σ_{22} 을 제외한 나머지 성분은 모두 0 이거나 0 에 근접한 값이므로 생략하였다.

시간 증분 조절의 영향을 비교하기 위하여 시간증분을 50 초로 고정한 해석과 시간증분조절법을 적용한 해석을 수행하였으며 Fig. 6 에서 각각의 경우를 σ_{11} 성분에 대해 비교하였다. 시간 증분이 50 초인 경우 해의 떨림이 발생하지만 시간 조절 증분법에 의하여 정확도가 상당히 향상되었음을 알 수 있는데 이것은 식 (28)에서 정의된 오차

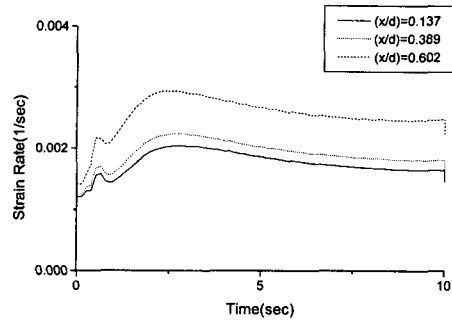


Fig. 9 Strain rate history of tension stroke

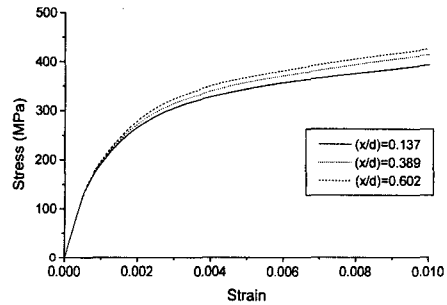


Fig. 10 Stress-strain curve of tension stroke

의 양상을 보면 더욱 확실해 진다. Fig. 7 에서 알 수 있듯이 시간 증분 조절을 수행하여 해석된 결과가 시간 증분이 10 초로 고정한 경우보다 더 작은 오차가 발생하고 있는 것을 알 수 있다.

정확도와 함께 고려하여야 할 것은 계산 시간 이므로 각 경우에 대하여 총 시간 증분의 수와 평형 반복 계산, 그리고 총 계산 시간을 Table 2 에서 비교하였다. 시간증분을 10 초로 고정한 경우가 가장 긴 계산 시간을, 시간증분을 50 초로 고정한 경우가 가장 작은 계산 시간이 들었으나 시간 증분 조절에 의한 결과는 계산 시간의 증가가 크지 않다. 이를 통하여 시간 증분의 효과적인 조절을 통하여 계산 시간과 정확도 면에서 가장 우수한 결과를 도출할 수 있음을 확인할 수 있었다.

4.2 노치가 있는 환봉 시편의 응력 해석

본 절에서는 작성된 프로그램의 시간 의존성 다축 거동 해석에의 적용성을 평가하기 위하여 등근 노치가 있는 환봉 시편에 대하여 단순 인장 해석, 크리프 해석, 응력 회복 해석을 수행하였다. 축대칭 요소를 사용하였으며 시편의 형상과 하중 조건은 Fig. 8 에 나타나 있다. 해석에서 θ 는 0.5 로 고정하였으며 시간 증분 조절법은 본 연구에서 제안한 방법을 적용하였다. 시편의 중심을 기준으

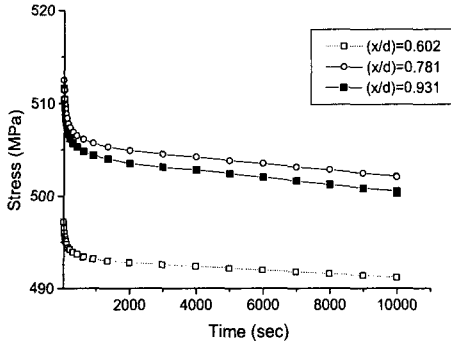


Fig. 11 Stress history of the recovery test

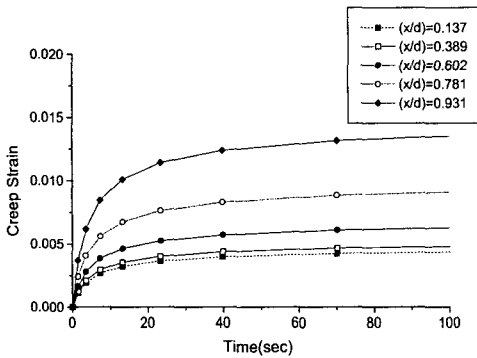


Fig. 12 Strain history of the creep test

로 하여 반경 방향 좌표를 x 로 하였으며 노치부의 최소 반경이 d 이다.

4.2.1 단순 인장 해석

시편 윗면의 변위를 일정한 속도로 인장하면 노치부의 형상으로 인하여 변형률 속도의 차이가 발생하며 속도의존성을 보이는 재료의 경우 변형률 속도가 빠를수록 작용 응력도 역시 증가한다. 작성된 프로그램은 탄소성 구성식은 물론 점소성 구성식 까지 동일한 방법을 사용하여 계산을 수행하였지만 점소성 재료의 속도 의존성을 모사할 수 있어야 한다.

Fig. 9 는 위치에 따른 변형률 속도의 이력을 나타내고 있으며 시편의 중심에서 벗어날수록 변형률 속도가 증가함을 알 수 있다. Fig. 10 은 Fig. 9 와 동일한 위치의 응력-변형률 관계를 나타낸 것으로 중심축에서 멀어질수록 작용 응력이 증가하는데 이로써 변형률 속도가 증가하면 작용 응력이 증가하는 점소성 재료의 속도 의존성을 작성된 프로그램이 모사하고 있음을 알 수 있다.

4.2.2 응력 회복 해석

시편 윗면의 변위를 일정한 속도로 인장한 후 변위를 고정하면 점소성 재료의 시간의존성 변형

Table 3 Description of the Chaboche's Viscoplastic Model⁽³⁾

Flow rule	$\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \left(\frac{J(s-\alpha) - \kappa - \sigma_y}{K_0 + \alpha_K \kappa} \right)^n \frac{s-\alpha}{J(s-\alpha)}$
Kinematic hardening	$\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2$
	$\dot{\alpha}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\epsilon}_p - \gamma_i(p) \alpha_i \dot{p} - h_i [J(X)]^{m_i} \alpha_i$
	$\gamma_i = \gamma_i^0 [a_0 + (1-a_0)e^{-bp}]$
Isotropic hardening	$\dot{\kappa} = b(Q - \kappa) \dot{p}$

Table 4 Material Parameters of Chaboche's Viscoplastic Model⁽¹¹⁾

Symbol	Material Constant	Symbol	Material constant
E	152 GPa	m ₁	2.45
ν	0.3	h ₁	3.98*e-8 /s
K	939 MPa	C ₂	4820 MPa
α _K	0	γ ₂	30.7
n	1.89	m ₂	1.49
σ _y	59.4 MPa	h ₂	7.83*e-6 /s
C ₁	9.2*e4 MPa	b	14.6
γ ₁	1390	Q	51.1 MPa

에 의하여 작용응력이 서서히 이완된다. 작성된 프로그램에서는 이러한 응력회복을 시편의 강성행렬을 변화시켜 추가의 변형이 부가되지 않더라도 작용 응력이 서서히 감소하게 된다

Fig. 11 은 변위 고정 하중을 가했을 때 발생하는 응력 이완 현상을 나타내는데, 여기서는 초기에 변형률 속도의 급격한 감소로 인한 천이 효과를 제거하기 위하여 20 초이후부터 응력 이완을 나타내었으며 충분한 긴 시간 이후 뒤에서 계속적으로 응력 이완 효과가 잘 나타나고 있음을 알 수 있다. 이로써 일반화된 계산방법으로 변형률 고정된 경우에 발생하는 재료의 시간의존적 변형을 정확히 모사할 수 있음을 확인하였다.

4.2.3 크리프 해석

크리프 해석은 작용 하중을 고정한 경우에 발생하는 시간 의존성 변형을 정확히 모사하고 있는지 확인하기 위하여 수행하였다. 시편에 일정한 속도로 하중을 증가시킨 후 고정시키면 평형 방정식에서 작용힘이 상수가 되므로 이때 발생하는 변형은 강성행렬의 변화에만 의존하게 된다. 본 연구에서는 일반화된 방법으로 유도한 점선강성행렬

을 이용하여 시간의존적 변형에 의한 강성행렬의 변화를 모사하였다.

Fig. 12 은 응력 고정 하중이 작용하는 경우 시편의 여러 위치에서의 크리프 변형의 결과를 보여 주고 있다. 모든 결과와 일차 크리프과 이차 크리프의 전형적인 형태를 잘 나타내고 있으며 이로써 작성된 프로그램이 시간 의존적 거동을 강성행렬의 변화를 통하여 모사하고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

비탄성 변형률의 정의와 상태변수의 발전식에 따라 다양한 형태를 갖는 비탄성 구성식의 적분방법을 일반화시키고 ABAQUS 의 UMAT 루틴으로 구현하였다. 비탄성 구성식을 GMR 시간 적분법을 사용하여 선형화하고 뉴턴 방법을 이용하여 비선형 방정식의 해를 계산하고 해의 발산을 막기 위하여 선추적 기법을 도입하였다. 적분법과 일관된 방법으로 접선 강성 행렬을 유도하였으며 해의 정확성을 개선하기 위하여 새로운 시간중분 조절 법을 제시하였다. 개발된 적분법을 대표적 비탄성 구성식인 Chaboche 점소성 모델에 적용한 프로그램을 사용하여 시간 중분조절법의 유효성을 확인하였으며 환봉 시편에 대한 반복 경화 해석, 크립 해석, 응력 이완 해석을 수행하여 작성된 프로그램이 점소성 구성식의 특징적인 변형 기구를 잘 모사하고 비탄성 해석에 유용하게 사용될 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

(1) Bodner, S. R. and Partom, Y., 1975, "Constitutive Equations for Elasto -Viscoplasticity Strain Hardening Materials." *J. Appl. Mech.*, Vol. 42, p. 235.

(2) Miller, A. K. , 1976, "An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic and Creep Deformation: Part 1, Equations, Development and Analytical Procedures," *J. Engng. Mat. Tech.*, Vol.98, p.97.

(3) Chaboche, J. L., and Nouaihas, D., 1989, "A Unifed Constitutive Model for Cyclic Viscoplasticity and Its Application to Various Stainless Steels," *J. Pres. Vessel. Tech.* , Vol.111, p.424.

(4) Inoue, T., Yoshida, F., Ohno, N., Kawai, M., Niitsu, Y., and Imatani, S.,1991, "Evaluation of Inelastic Constitutive Models under Plastic-Creep Interaction in Multiaxial Stress State," *Nuclear Engng. Design*, Vol.126, p.1.

(5) Orits, M., and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.23, p.353.

(6) Honberger, K., and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithms with a Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.28, p.2397.

(7) Chaboche, J. L. and Cailletaud, G., 1996, "Integration Methods for Complex Plastic Constitutive Equations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, p.125.

(8) ABAQUS, *User's manual*, Version 5.4, 1995, HKS, USA.

(9) *Numerical recipes in Fortran*, 1992, Cambridge Press.

(10) Nemat-Nasser, S and Li, Y.F. ,1992, "A New Explicit Algorithm for Finite-Deformation Elastoplasticity and Elastoviscoplasticity: Performance Evaluation ," *Computer and Structures*, Vol,44, No.5, p.937.

(11) Schwertel, J., and Schinke, B., 1996, "Automated Evaluation of Material Parameters of Viscoplastic Constitutive Equations," *J. Eng. Mat. Tech.* , Vol.118. p. 273.