

D-Optimal 반응표면모델에 의한 새시 프레임 최적설계

이태희* · 이광기** · 구자겸**

(1999년 5월 19일 접수)

Optimization of Chassis Frame by Using D-Optimal Response Surface Model

Tae Hee Lee, Kwang Ki Lee and Jakyum Koo

Key Words : Response Surface Model (반응표면모델), Design of Experiments (실험계획법), Sensitivity Analysis (민감도해석), D-optimal Design (D-optimal 계획법), Optimization (최적화), Optimum Design of Chassis (새시 최적설계)

Abstract

Optimization of chassis frame is performed according to the minimization of eleven responses representing one total frame weight, three natural frequencies and seven strength limits of chassis frame that are analyzed by using each response surface model from D-optimal design of experiments. After each response surface model is constructed from D-optimal design and random orthogonal array, the main effect and sensitivity analyses are successfully carried out by using this approximated regression model and the optimal solutions are obtained by using a nonlinear programming method. The response surface models and the optimization algorithms are used together to obtain the optimal design of chassis frame. The eleven-polynomial response surface models of the thirteen frame members (design factors) are constructed by using D-optimal Design and the multi-disciplinary design optimization is also performed by applying dual response analysis.

기호설명

- Y : 응답변수 (출력)
- X : 설계변수 (입력)
- β : 반응표면모델 반응계수
- R^2 : 결정계수
- R^2_{adj} : 수정결정계수
- SST : 총변동
- SSE : 잔차 제곱합
- SSR : 회귀 제곱합

1. 서론

차량의 새시 프레임 설계는 NVH (noise, vibration and harshness) 관점에서 프레임의 고유진동수 영역

의 확보와 동시에 강도 관점에서 프레임의 최대 응력을 감소시키면서 프레임 총 중량을 최소화해야 하는 2가지의 목적이 있다. 프레임의 무게를 최소화하기 위해 사용하는 일반적인 최적화 방법은 NASTRAN 과 ANSYS 등과 같은 범용 유한요소 해석 프로그램에 내장된 비선형 최적화 알고리즘을 배운 해석모델에 적용하여 최적 값을 구할 수 있다. 하지만 이러한 최적 설계는 초기 설계 시작 위치에서 가까운 국부 최적 해를 찾을 수는 있지만 최적화 과정 중에 발생하는 많은 유용한 정보들을 설계자에게 제공할 수 없다는 문제점을 가지고 있으며, 또한 목적함수가 NVH 측면 및 강도 측면과 같이 서로 다른 여러 가지 해석 영역의 값들을 만족시켜야 할 때는 기존의 범용 구조해석 프로그램을 적용하여 최적 해를 구하기에는 많은 어려운 문제점들이 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위하여 최근에는 최적화를 구조해석 모델에 바로 적용하는 것보다는 오히려 설계자가 설계를 수행할 경우에 중요한 설계 정보를 확보할 수 있도록 해주는 설계민감도 해석 기법들이 많이 개발되어 사용되고있다.⁽¹⁾ 또한 컴퓨터 응용해석에 의한 설계보다는 실험 및 공정 설계에 많이 사용되어왔던 통계적인 방법인 실험계획법 (design of experiments)^(2,3) CAE

* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : thlee@email.hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0449 FAX: (02) 2298-4634

** 엔브이에이치코리아㈜

(computer aided engineering)에 적용하여 통합 최적 설계와 다중목적함수 최적설계와 같이 기존의 최적화 프로그램으로는 해석하기가 어려운 복잡한 다분야 연성문제 등에서 좋은 결과를 얻고있다. 일반적으로 다구찌 방법으로 더 잘 알려진 강건설계(robust design) 기법도 역시 CAE에 성공적으로 응용되어 설계자에게 유용한 설계민감도 정보 및 최적설계의 해를 제공하고있다.

CAE의 통합 최적 설계에 전역 근사최적화 기법인 반응표면기법(response surface method: RSM)을 적용한 적용 사례를 살펴보면은 NASA에서는 유한요소모델과 전산유체 동역학의 통합최적 설계에 반응표면모델을 효과적으로 적용하여 통합최적 설계를 수행하고 있으며⁽⁴⁾ 미국의 Engineous 사에서는 직교배열과 반응표면모델을 선박 설계와 같은 복잡한 대형 구조물에 적용하여 역시 좋은 결과를 얻고 있다.⁽⁵⁾ 또한 미국의 GM 사에서도 CAD와 CAE를 통합한 구조해석, 충돌해석, 공기역학, 차량 동역학, 내구해석 등의 통합최적설계에 반응표면기법을 적용을 하고 있다.⁽⁶⁾

따라서 본 연구에서는 NVH 측면과 강도 측면을 동시에 고려하여야 하는 차량의 새시 프레임 최적설계를 반응표면기법을 적용하여 수행한다. 새시의 구조강도와 고유진동수를 범용 유한요소 해석 프로그램인 NASTRAN 해석을 D-optimal 계획법에 따라 수행하여 위에서 언급한 반응표면모델을 구성한 후에 이 반응표면모델을 사용하여 설계 영역인 반응표면 영역에서 설계민감도 해석과 통합최적설계를 수행한다.

2. 반응표면모델

2.1 새시 프레임 모델링

차량 새시 프레임의 side member와 cross-member를 Fig. 1과 같이 범용 유한요소 해석 프로그램인 NASTRAN을 사용하여 side member 5개, cross-member 8개의 총 13개의 빔 요소로 모델링하였다. 여기서 변환된 빔 요소의 기하학적 특성치를 설계변수로 고려하였다.⁽⁷⁾ 특히 설계변수로 사용되는 side member와 cross-member의 관성력은 면적 변화율의 3 제곱 항으로 근사화 하여 해석하였다.

새시 프레임 최적설계를 수행하기 위하여 Fig. 1과 같이 13개의 빔 요소로 변환된 설계변수 side member와 cross-member의 단면적 변화에 따른 NASTRAN 출력 중에서 NVH 측면과 강도 측면을 동시에 고려하기 위하여 다음 Table 1과 같이 1개의 새시 프레임 총 중량, 3개의 고유 진동수와 7개의 강도 해석에 관련된 11개 응답을 목적함수로 선택하였다. Table 1의 13개 응답 중에서 y_1

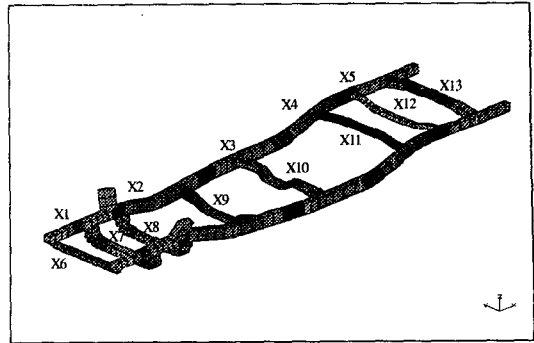


Fig. 1 Chassis frame model

Table 1 Design variables and responses

Design Variables		Responses	
x_1	1 st side member	y_1	Total weight
x_2	2 nd side member	y_2	1 st normal mode
x_3	3 rd side member	y_3	2 nd normal mode
x_4	4 th side member	y_4	3 rd normal mode
x_5	5 th side member	y_5	Front impact
x_6	1 st cross-member	y_6	Towing load
x_7	2 nd cross-member	y_7	Jacking load
x_8	3 rd cross-member	y_8	Diagonal load
x_9	4 th cross-member	y_9	Pothole brake
x_{10}	5 th cross-member	y_{10}	Kerb strike
x_{11}	6 th cross-member	y_{11}	Bumping load
x_{12}	7 th cross-member		
x_{13}	8 th cross-member		

은 NASTRAN에서 계산된 총 중량을 나타내고 y_2 부터 y_4 는 새시의 고유진동수를 나타낸다. y_5 부터 y_{11} 까지는 새시 프레임이 만족해야 할 구조 강도를 나타낸다.

2.2 D-optimal 계획법에 의한 반응 표면 모델

Fig. 1과 Table 1의 새시 프레임 모델과 같이 설계변수가 13개이고 NASTRAN 출력이 11개인 경우에 대하여 전산 실험계획을 수행하고 반응표면모델을 추정한다.⁽⁸⁾ 이때 설계변수는 다음 식(1)을 이용하여 [-1, 1]의 영역으로 정규화 하여 사용한다.

$$X_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{c_i}, c_i = const. \quad (1)$$

여기서 \bar{x}_i 는 설계변수 x_i 의 평균값을 의미한다. 13가지 설계변수에 대한 11가지 응답들의 상관관계인 반응표면모델은 식 (2)와 같은 다항식의 반응표면모델로 구성할 수 있다.

$$Y = X^T \beta + \varepsilon \quad (2)$$

여기서 $Y = [Y_i]$, $X = [X_i(X_j)]$ 이며, 식 (2)의 반응 표면모델의 미지 계수 항인 $\beta = [\beta_i]$ 는 최소자승법(least square method)을 적용하여 다음과 같이 구한다.

$$L = \sum \varepsilon^2 = \sum (Y - X^T \beta)^T (Y - X^T \beta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

따라서 식 (2)는 다음과 같다.

$$Y = X^T \beta + \varepsilon = X^T [(X^T X)^{-1} X^T Y_{obj}] \quad (3)$$

여기서 Y_{obj} 는 Table 1의 11가지 NASTRAN 응답을 나타낸다.

식 (3)을 사용하여 2차 항의 반응표면모델을 만들기 위한 NASTRAN 해석 횟수는 13개의 설계 변수가 3 수준인 경우를 살펴보면 다원배치법(full factorial)인 경우는 $3^{13} = 1,594,323$ 회가 된다. 1차 항의 선형설계를 수행한 후 2차 항으로의 확장이 가능하여 순차적인 설계를 수행할 수 있어 가장 많이 사용되는 중심합성법 (central composite methods)도 $2^{13} + 2 \cdot 13 + 1 = 8,219$ 회의 많은 NASTRAN 해석을 수행해야만 반응표면모델을 만들 수 있다. 그러므로 일반적인 반응표면기법을 실제로 NASTRAN 해석에 적용하기는 불가능하다. 따라서 설계 변수가 10개 이상을 넘어 해석 횟수가 크게 증가하는 경우에는 식 (4)와 같은 Fedorov의 교환 알고리즘을 적용한 D-optimal 기법을 적용하여 전산해석의 횟수를 줄여주는 것이 바람직하다.⁽⁹⁾

$$Max \quad |X^T X| \quad (4)$$

$$subj \ to \ x_i^L < x_i < x_i^U, \ i=1,2,\dots,n$$

여기서 상첨자 L과 U는 각각 설계 변수의 하한값과 상한값을 나타낸다. 하지만 많은 설계 변수를 가진 전산해석인 경우에는 $[-1, 0, 1]$ 의 3수준 인자만을 가지고 2차 항의 반응표면모델에 D-optimal 계획법을 적용하는 것보다는 Owen이 제시한 난수직교배열을 적용하여 많은 수의 인자를 사용한 반응표면모델을 구성하는 것이 훨씬 D-optimal 계획법에 의한 반응표면모델의 정확도를 향상시킬 수 있다.⁽¹⁰⁾ 따라서 본 연구에서는 11수준의 인자를 적용한 난수직교배열을 발생시켜 (4)식의 D-optimal 계획법을 적용하였다.

새시 프레임 최적설계를 위한 2차 항의 반응표

Table 2 Analysis of variance

	S	R ²	Ø	V	F ₀	F _{0.01}
REG	SSR	SSR	k	MSR	MSR	F(Ø _{REG} , Ø _{RES} ; a)
RES	SSE	/SST	n-k-1	MSE	/MSE	
	SST		n-1			

면모델의 미지변수는 105개가 되며, 일반적으로 D-optimal 계획법에 의한 해석 회수는 미지변수의 1.5 배부터 2.5 배를 적용한다. 미지변수의 2배인 210회의 NASTRAN 해석은 다분야통합최적설계 프로그램인 iSIGHT를⁽⁸⁾ 사용하여 자동적으로 수행하였다.

식 (3)에서 구한 반응표면모델의 통계적인 정확도를 검증하기 위해 사용되는 방법들은 여러 가지가 있으나 일반적으로 Table 2와 식(5)와 같이 분산분석표 (analysis of variance: ANOVA)에 의한 F-검정, 잔차 평균제곱 MSE, 결정계수 R²에 의한 검정 등을 많이 사용하고 있다.⁽³⁾ Table 2의 S는 변동, Ø는 자유도, V는 평균제곱, REG는 회귀 (regression), RES는 잔차(residual)를 의미한다.

$$SST = Y_o^T Y_o - n(\bar{Y}_o)^2$$

$$SSR = Y^T Y - n(\bar{Y}_o)^2$$

$$MSR = \frac{SSR}{k}$$

$$SSE = SST - SSR$$

$$= Y_o^T Y_o - \beta^T X^T Y_o \quad (5)$$

$$MSR = \frac{SSE}{n - k - 1}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE / (n - k - 1)}{SST / (n - 1)}$$

여기서 $Y_o = Y_{obj}$ 이며, Table 2와 (5)식에서 k는 설계 변수의 수, n은 전체 해석의 횟수를 나타내며 $F_0 \gg F_{0.01}$ 이면 반응표면모델이 유효하다고 판정한다. 하지만 최근에는 F-검정에 의한 평가보다는 (5)식과 같이 수정 결정계수 R^2_{adj} 을 결정계수 R^2 과 같이 병행하여 사용하고 있다

식 (3)에서 구한 반응표면모델의 계수를 Fig. 2에 표시하였다. Table 2의 분산분석을 수행한 11개의 결과 중에서 2차 고유진동수 y_3 에 대한 결정계수 R^2 과 수정 결정계수 R^2_{adj} 를 살펴보면 모두 0.999 이상으로서 총변동 중에서 회귀방정식에 의하여 최소 99.9%의 변동이 설명되고있어 반응표면모델의 신뢰도가 99.9%임을 입증한다. Table 1

의 다른 10 가지 응답의 결정계수도 모두 93% 이상의 변동이 설명되어 반응표면모델의 신뢰도가 입증됐다.

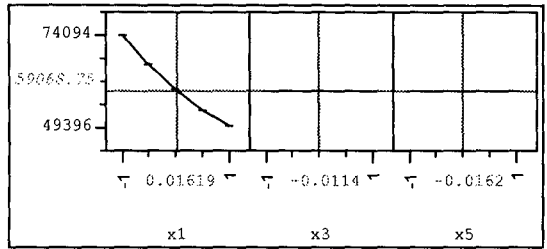
2.3 순차적 회귀에 의한 변수 선택⁽³⁾

만약 2.2 절의 Fig. 2 와 같은 반응표면모델 중에서 중요하지않은 변수들을 찾아내서 반응표면모델의 구성에서 제거할 수가 있다면 반응표면모델의 오차 (bias error)를 줄여주어 모델의 정확도를 향상시킬 수 있다. 또한 변수 선택에 의해 불필요한 변수들이 제거된 최적에 근접한 모델을 얻을 수 있으며 이 최적에 근접한 모델들을 설계민감도 해석 및 3 절의 통합최적설계에 적용하면 좀 더 전역 최적 값에 가까운 해를 얻을 수 있는 장점도 아울러 얻을 수 있다.

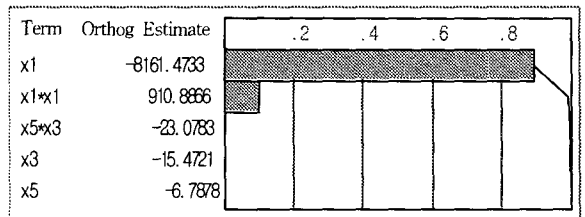
불필요한 변수를 제거하는 변수 선택법 중에서 순차적회귀에 의한 방법이 많이 사용되고 있으며 순차적회귀는 전방선택법과 후방소거법을 결합하여 부분 F 검정, t 검정, Mallow 의 C_p 검정 등을 사용하여 불필요한 변수를 소거하는 방법이다.⁽²⁾ 순차적회귀에 의한 2차 고유진동수 y_3 의 변수 선택의 결과는 2.2 절의 Fig. 2 와 비교해보면 미지 변수가 총 56 개로 초기 미지 변수 105 개와 비교하여 47% 감소했으며 결정계수 R^2 과 수정 결정계수 R^2_{adj} 값도 0.998, 0.997로 초기 값과 동일한 모델의 신뢰도를 준다는 것을 보여준다. 다음 Fig. 3 은 11 개의 응답 중에서 순차적회귀에 의한 전방 충격강도 모델 y_5 의 주효과와 설계민감도를 나타내며 (a)의 주효과 분석을 통하여 가장 큰 영향을 주는 설계 변수가 x_1 임을 알 수 있으며 (b)의 기여도 분석(x 축 상단이 기여도 %를 의미)을 통하여 가장 큰 영향을 주는 설계 변수 x_1 이 전방 충격강도에 90%이상의 민감도(기여도)를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 또한 전방 충격강도 모델인 경우에는 순차적 회귀에 의해 초기 미지변수 105 개가 아닌 총 5 개의 미지변수 만을 포함한 반응표면모델을 구성하여도 결정계수 R^2 과 수정 결

정계수 R^2_{adj} 값도 0.999 및 0.999로 초기 값과 동일한 모델의 신뢰도를 준다는 것을 알 수 있다.

또한 반응표면모델을 사용하면 설계자가 관심 있는 설계변수에 대한 2차원이나 3차원 형상 혹은 등고선(contour curve)을 보면서 설계 값에 대한 민감도 및 변경시킨 값이 어떻게 변화하는지도 눈으로 확인할 수 있다는 장점도 가지고 있다. 다음 Fig. 4 는 전체 무게를 최소화하는 경우에 민감도 결과를 통해서 가장 큰 영향을 주는 x_3, x_5 설계 변수의 변화에 따른 무게 변화를 3차원 및 등고선으로 보여주며 이때 다른 설계변수 들은 모두 현재의 설계 값을 갖도록 한 경우이다.



(a) Main effects of y_5



(b) Pareto plot of y_5

Fig. 3 Sensitivity analysis of y_5

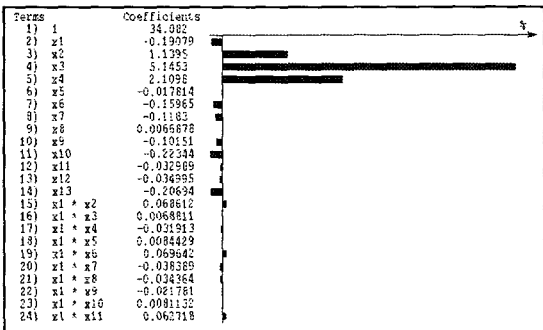


Fig. 2 Response surface model of y_3

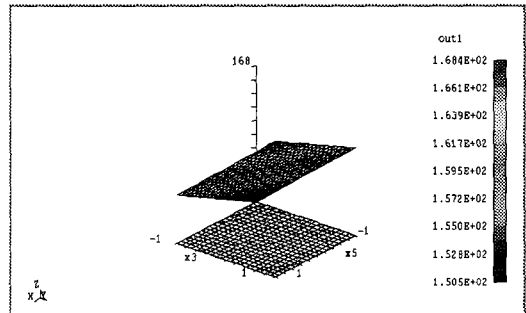


Fig. 4 3-D and contour plot of y_5

3. 통합최적설계

여러 가지 통합최적설계 방법 중에서 식 (6)과 같이 상부 시스템과 하부 시스템으로 이원화하여 최적화하는 방법을^(11,12) 적용하여 최적설계를 수행하고자 한다. 만약에 다중목적함수 최적설계 문제라면 식 (6)의 y_p 는 최소화 혹은 최대화를 하고자 하는 상부 시스템의 목적함수를 나타내고 y_s 는 상부 시스템의 목적함수를 제외한 하부 시스템의 목적함수 들을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} \text{Min/Max} \quad & y_p(x) \\ \text{subj. to} \quad & y_s(x) \leq y_{\text{allowable}} \end{aligned} \quad (6)$$

새시 프레임 최적 설계와 같이 제한조건 및 입력 변수가 많은 경우에는 일반적인 최적화 기법을 가지고 NASTRAN 과 같은 범용 유한요소 프로그램에 바로 적용하려면 긴 해석시간을 요구하며 특히 해석 영역이 다른 고유 진동수에 대한 제한 조건과 강도 측면에 대한 제한 조건을 동시에 고려하여 최적 설계를 수행하기가 상당히 어렵다. 하지만 2.2 절에 언급한대로 구조강도와 고유진동수에 대한 반응표면모델을 만들어준다면 다중목적함수와 여러 제한조건이 존재하는 통합설계나 다중목적 최적설계 문제들을 NASTRAN 에 바로 적용하여 해결할 필요가 없다. 즉 D-optimal 계획법에 의해 구한 반응표면모델에 식 (7)과 같이 여러 가지 제한 조건들을 설계자가 임의로 바꾸어 가면서 언제든지 손쉽게 최적 해를 찾을 수가 있다. 식 (7)은 고유진동수는 현재의 고유진동수 값들을 유지하고 구조강도는 현재 설계 값보다 작아지도록 제한조건을 수식화 한 것을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & y_1 \\ \text{sub. to} \quad & y_2, \dots, y_4 = f_{\text{current}} \\ & y_5, \dots, y_{11} \leq \sigma_{\text{current}} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)과 같이 13 개의 입력 변수를 가진 새시 프레임의 반응표면 모델에 고유진동수와 구조 강도를 동시에 고려하여 최적화를 수행한 결과는 다음 Fig. 5 와 같다. Fig. 5 는 초기 설계 값과 최적 값과의 차이를 백분율(%)로 보여주며 고유진동수를 현재 상태와 동일하게 제한한 경우인데도 프레임의 전체 무게 y_1 은 현재 상태보다도 약 5 kg 이 감소하였으며 x_5, x_7, x_{10}, x_{13} 변수는 단면적을 줄여주는 것이 좋으며 x_6, x_9, x_{11} 은 단면적을 늘여주는 것이 좋다.

Fig. 6 은 반응표면모델에 의해 계산된 최적 해

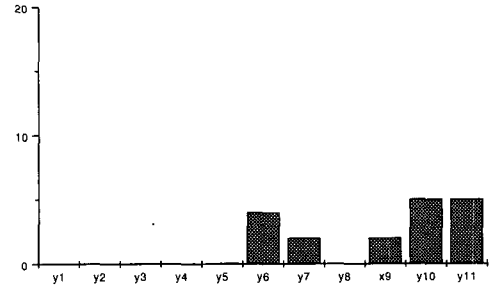


Fig. 5 Comparison of optimal design with current design.

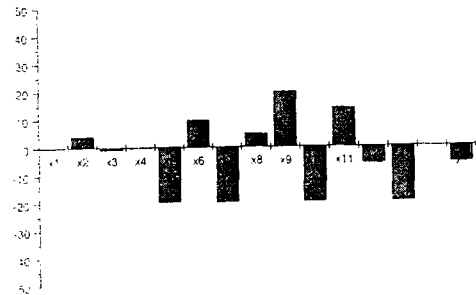


Fig. 6 Comparison of the responses due to RSM with those due to NASTRAN

를 검증하기위해 NASTRAN 으로 해석을 수행한 결과를 나타낸다. 구조강도해석 결과인 경우에 y_{10} 과 y_{11} 의 2가지 경우가 최대, 5% 정도의 NASTRAN 과 반응표면모델 해석 결과 차이를 보이며 기타 다른 값들은 NASTRAN 결과나 반응표면모델에 의한 결과나 차이가 없다는 것을 보여주어 반응표면모델에 의한 최적설계의 정확성을 입증해준다.

다음 Fig. 7 은 11 개의 출력 중에서 2 차 고유진동수 y_3 의 최적 값을 적용한 NASTRAN 해석 결과를 보여주며 Fig. 8 은 전방 충격 강도 y_5 의 최적 값을 적용한 NASTRAN 해석 결과를 보여준다. Fig. 7 과 Fig. 8 에서 2 차 고유진동수 y_3 과 전방 충격 강도 y_5 는 초기 강도 값과 유사한 결과를 보여준다. 하지만 Fig. 7 과 Fig. 8 은 새시 프레임의 3 차까지의 고유 진동수를 (7)식과 같이 등가 제한 조건으로 제한했기 때문에 무게 감소에 큰 변화를 보이지 못한 것이며 만약 고유진동수 제한조건을 완화한다면 좋은 결과를 얻을 수 있다.

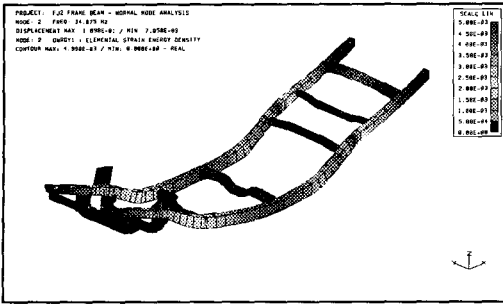


Fig. 7 NASTRAN result of y_3

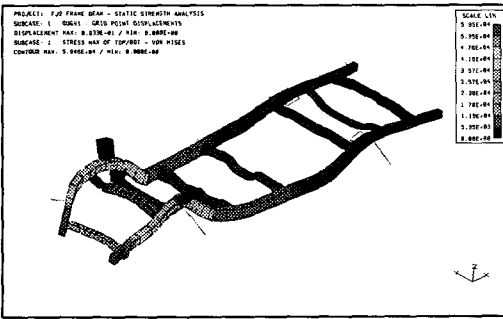


Fig. 8 NASTRAN result of y_5

4. 결론

고유진동수 뿐만 아니라 여러 가지 구조강도를 동시에 고려하여 설계를 해야 하는 차량의 새시 프레임 최적설계에 D-optimal 계획법에 의한 반응표면모델을 적용하여 최적설계를 구하였다. 입력(설계변수)과 출력(응답변수)과의 관계를 나타내는 반응표면모델을 제한조건 및 목적함수가 많은 프레임 설계와 같은 문제에 적용하면 NASTRAN과 같은 범용 유한요소해석 프로그램에서는 구하기가 어려운 최적 해를 다항식으로 근사화 된 반응표면모델로 변환하여 최적화 알고리즘을 적용하여 손쉽게 구할 수가 있었으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 반응표면모델을 구성함으로써 각 응답에 대한 설계민감도 해석 및 변수 선택을 효율적으로 수행할 수 있다.
- (2) 다항식으로 반응표면모델을 구성하였기 때문에 통합최적설계를 수행하는 과정에서 많은 시간과 노력을 줄일 수 있다.

- (3) 많은 설계변수와 목적함수 들을 고려해야 하는 통합최적설계 문제에 근사화 된 반응표면모델을 적용하면 좋은 최적 해를 얻을 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) 이태희, 윤광수, 1998, "NASTRAN 을 이용한 고유치문제의 설계민감도해석 외부 모듈 개발," 대한기계학회논문집 A, 22, 909~920.
- (2) Myers, Montgomery, 1995, *Response Surface Methodology - Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, New York.
- (3) 박성현, 1998, 회귀분석, 민영사.
- (4) Dudley, 1995, "Multidisciplinary Optimization of the High-Speed Civil Transport," *AIAA-95-0124*.
- (5) Srinivas Kodiyalam, 1998, "Design of Experiments based Response Surface Models for Design Optimization," *39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, AIAA-98-2030, 2718~2727.
- (6) Bennet, et. al., 1998, "Issues in Industrial Multidisciplinary Optimization," *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on MDO*, AIAA-98-4727, 12~22.
- (7) MSC, 1999, *NASTRAN User's Manual*.
- (8) Engineous Software Inc., 1999, *iSIGHT User's Guide*.
- (9) Nguyen, N. K., and Miller, F. L., 1992, "A Review of Some Exchange Algorithms for Constructing Discrete D-optimal Design," *Computational Statistics & Data Analysis*, 14, 489~498, North-Holland.
- (10) Owen, A. B., 1994, "Orthogonal Arrays for Computer Experiments, Integration and visualization," *Statistica Sinica*, 2, 439~452.
- (11) Del Castelli, E., and Montgomery, D.C., 1993, "A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem," *Journal of Quality Technology*, 25, 199~204.
- (12) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill.