

# EFGM 에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법

석병호\* · 송태한\* · 임장근\*\*  
(1999년 6월 28일 접수)

## Shape Function Modification for the Imposition of EFGM Essential Boundary Conditions

Byungho Seog, Taehan Song and Jangkeun Lim

**Key Words :** Meshless Method(무요소법), Element Free Galerkin Method(EFGM), Essential Boundary Conditions(필수경계조건), Interpolation Characteristics(보간특성), Shape Function(형상함수)

### Abstract

For the effective analysis of an engineering problem, meshless methods which require only positioning finite points without the element meshing recently have been proposed and being studied extensively. Meshless methods have difficulty in imposing essential boundary conditions directly, because non-interpolate shape functions originated from an approximation process are used. So some techniques, which are Lagrange multiplier method, modified variational principles and coupling with finite elements and so on, were introduced in order to impose essential boundary conditions. In spite of these methods, imposition of essential boundary conditions have still many problems like as non-positive definiteness, inaccuracy and negation of meshless characteristics. In this paper, we propose a new method which modifies shape function. Through numerical tests, convergence, accuracy and validity of this method are compared with the standard EFGM which uses Lagrange multiplier method or modified variational principles. According to this study, the proposed method shows the comparable accuracy and efficiency.

### 1. 서 론

공학적인 문제의 해결을 위한 효과적인 도구로 널리 쓰이는 유한요소법은 재료 자체의 변형이 큰 대변형 문제나 소성 문제에서 요소형상에 따른 오차가 크게 발생하여 신뢰성 있는 결과를 얻기가 어렵다.

위의 요소특성에 기인한 유한요소법의 문제점을 해결하기 위한 새로운 방법으로 적절한 절점의 배치만으로 해석이 가능한 무요소법(meshless method)<sup>(1-3)</sup>이 제안되고 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있으며 국내에서도 이에 관한 연구사

례<sup>(4-8)</sup>가 발표되고 있다.

그 중에서 DEM(diffuse element method)<sup>(9)</sup>을 개선한 EFGM(element free Galerkin method)이 Belytschko<sup>(10)</sup> 등에 의해 제안되었고 이를 고체역학적인 문제에 적용하여 무요소법이 유한요소법의 단점을 해결할 대안이 될 수 있음을 입증하고 있으며, 특히 균열진전거동의 해석에서 요소망의 재구성과 같은 번거로움 없이 매우 효율적으로 정확한 해석이 가능함을 보여주고 있다. 그러나 절점만을 사용하여 근사화를 행하는 무요소법의 기본 특성상 형상함수는 보간특성(interpolation characteristics)을 갖지 않아 필수경계조건(essential boundary conditions)의 처리를 위해 라그랑지 승수

\* 회원, 한양대학교 대학원

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : jklim@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0441 FAX : (02)2281-1869

법(Lagrange multiplier method),<sup>(10)</sup> 직접변환법(modified variational principles),<sup>(11)</sup> 유한요소와 혼용하는 방법<sup>(12-13)</sup> 그리고 특이가중함수(singular weight function) 등을 사용하는 방법<sup>(14)</sup> 등이 제안되고 있다. 라그랑지 승수법은 필수경계조건을 구속조건으로 취급하여 처리하는 방법으로 이로 인한 미지수의 증가로 행렬방정식의 크기가 커지며 행렬이 정치(positive definite)를 벗어나는 단점이 있다. 직접변환법은 라그랑지 승수를 물리량으로 직접 치환하는 방법으로 과정이 복잡하며 해의 정확도가 떨어지는 문제점이 있으며, 유한요소와 혼용하는 방법은 필수경계영역에 유한요소를 사용하고 그 외의 영역은 무요소법을 사용하는 방법으로 무요소법의 기본특성을 훼손하는 단점을 안고 있다. 특이가중함수를 사용하는 방법은 특이가중함수의 사용으로 형상함수가 보간특성을 갖지만 그 과정이 복잡하여 적용이 어려운 단점을 안고 있다.

본 연구에서는 필수경계조건을 처리를 위해 형상함수 수정법을 제안하였으며 이를 라그랑지 승수법 및 직접변환법과 비교하여 본 방법의 간단함과 정확성을 검토하고 효과적인 필수경계조건의 처리방법 임을 보이고자 한다.

## 2. 형상함수 수정법

EFGM을 비롯한 일반 무요소법의 큰 단점이라고 할 수 있는 것으로서 형상함수가 보간특성을 만족하지 못하기 때문에 공학적문제에서 요구되는 필수경계조건을 처리하기 어렵다는 것이다.

본 논문에서는 이를 간단히 처리하기 위한 한 가지 방법을 제안하고자 한다. 이를 위하여 우선 EFGM에서 형상함수를 구하는 과정을 검토하고 필수경계조건을 만족하도록 이의 수정방법을 수식화한다.

### 2.1 이동최소자승법

임의의 해석영역  $\Omega$ 에서 함수  $f(\mathbf{x})$ 의 근사치  $f^h(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 정의한다.<sup>(10)</sup>

$$f^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

식 (1)에서  $p_i(\mathbf{x})$ 는 1,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^2$ , ... 등과 같은  $i$ 번째 기저함수(basis functions)이고  $m$ 는 이들 기저함수의 전체갯수,  $a_i(\mathbf{x})$ 는 임의의 미정계수함

수이다. 식 (1)로 정의된 근사치  $f^h(\mathbf{x})$ 와 실제함수  $f(\mathbf{x})$ 사이의 오차(error)를 영역  $\Omega$  내에서 최소화시키기 위하여 가중함수  $w(\mathbf{x})$ 를 도입하여 다음과 같은 가중자승함수(weighted square function)  $L(\mathbf{x})$ 를 정의한다.

$$L(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x}) [f(\mathbf{x}) - f^h(\mathbf{x})]^2 d\Omega \quad (2)$$

식 (2)에 식 (1)을 대입하고  $L(\mathbf{x})$ 를 최소화하기 위한 계수  $a_j(\mathbf{x})$ 는  $\partial L(\mathbf{x})/\partial a_j = 0$ , ( $j=1, 2, \dots, m$ )으로 구할 수 있으며 다음식으로 표현할 수 있다.

$$\int_{\Omega} w(\mathbf{x}) \left[ f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m a_i(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) \right] p_j(\mathbf{x}) d\Omega = 0$$

for  $j=1, 2, \dots, m$  (3)

식 (3)의 연속형(continuous form)을 수치해석으로 처리하기 위하여 단위적분가중치(unit integral weight coefficients)를 갖는 분산형(discrete form)으로 표현하면 다음식이 된다.

$$\sum_{k=1}^{N_c} \left( \sum_{i=1}^m a_i(\mathbf{x}_k) p_i(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) - p_j(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) f(\mathbf{x}_k) \right) = 0$$

for  $j=1, 2, \dots, m$  (4)

식 (4)에서  $N_c$ 는 가중함수  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ 의 영향역(influence domain)내의 절점개수를 의미한다. 식 (4)를 행렬형태로 표현하면 다음 식이 된다.

$$[A(\mathbf{x})] \{a(\mathbf{x})\} = [B(\mathbf{x})] \{f\} \quad (5)$$

단,

$$[A(\mathbf{x})] = [\tilde{P}] [W(\bar{\mathbf{x}})] [\tilde{P}]^T \quad (6)$$

$$[B(\mathbf{x})] = [\tilde{P}] [W(\bar{\mathbf{x}})] \quad (7)$$

이들 식에서  $[\tilde{P}]$ 는 각 기저함수를 영향역내의

절점좌표로써 계산한  $m \times N_c$  의 상수행렬이고  $[W(\bar{\mathbf{x}})]$  는 가중함수를 임의의  $\mathbf{x}$  위치에서 각절점 좌표까지의 거리  $\bar{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$  의 값으로 계산한 대각행렬을 의미한다. 이제, 식 (5)에서 변상수계수  $\{a(\mathbf{x})\}$  를 구하고 이를 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 형상함수  $[N(\mathbf{x})]$  를 구할 수 있다.

$$f^h(\mathbf{x}) = [N(\mathbf{x})]\{f\} \quad (8)$$

단,

$$[N(\mathbf{x})] = \{P(\mathbf{x})\}^T [A(\mathbf{x})]^{-1} [B(\mathbf{x})] \quad (9)$$

식 (9)에서  $\{P(\mathbf{x})\}^T = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \dots]$  로써 기저함수의 벡터를 의미한다.

## 2.2 수정형상함수

식 (9)로 구한 형상함수(shape functions)는 보간 특성(interpolation characteristics)을 갖지 못하기 때문에 무요소법에서 원하는 변수의 절점치(nodal variables)는 식 (8)을 이용하여 다시 구하여야 하며 이 과정이 일반 유한요소법과 다르다. 즉, 식 (8)을 이용하여 해석계의 방정식을 구성하고 이를 풀어서  $\{f\}$  를 구하면 유한요소법에서는 형상함수가 보간특성을 갖기 때문에 이  $\{f\}$  를 변수의 절점치로 생각하지만 무요소법에서는 이를 근사절점치(approximate nodal variables)로 보고 다시 절점좌표를 식 (8)에 대입하여 변수의 절점치를 다음과 같이 구하게 된다.

$$\delta_k = [N(\mathbf{x}_k)]\{f\} \quad (10)$$

식 (10)에서  $\delta_k = f^h(\mathbf{x}_k)$  는 영향력내의 임의 절점  $k$  에서 원하는 변수의 절점치가 된다.

본 논문에서는 이와같은 무요소법의 특성을 이용하여 식 (9)의 형상함수가 변위경계에서 필수경계조건을 만족하도록 수정하는 방법을 제안하고자 한다. 우선, 식 (8)을 다음과 같이 변형하여 표현한다.

$$f^h(\mathbf{x}) = [N_I(\mathbf{x})]\{f_I\} + [N_B(\mathbf{x})]\{f_B\} \quad (11)$$

식 (11)은 근사절점벡터  $\{f\}$  중에서 필수경계상의 절점치  $\{f_B\}$  와 이를 제외한 나머지 영역내의 근사절점치  $\{f_I\}$  로 분할하고 형상함수  $[N(\mathbf{x})]$  도 이에 따라서 구분하여 표현한 것이다. 식 (11)에 필수경계상의 절점좌표  $\mathbf{x}_B$  를 대입하여  $\{f^h(\mathbf{x}_B)\} = \{\delta_B\}$  라고 정의하면 필수경계상에서 지정된 변위벡터  $\{\delta_B\}$  는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\delta_B\} = [N_I(\mathbf{x}_B)]\{f_I\} + [N_B(\mathbf{x}_B)]\{f_B\} \quad (12)$$

식 (12)에서

$$\{f_B\} = [N_B(\mathbf{x}_B)]^{-1} (\{\delta_B\} - [N_I(\mathbf{x}_B)]\{f_I\}) \quad (13)$$

가 되어 필수경계상의 근사절점치를 구할 수 있다. 식 (13)을 식 (11)에 대입하면

$$f^h(\mathbf{x}) = [\bar{N}_I(\mathbf{x})]\{f_I\} + [\bar{N}_B(\mathbf{x})]\{\delta_B\} \quad (14)$$

가 성립하여 필수경계상에서 지정된 변위  $\{\delta_B\}$  로써  $f^h(\mathbf{x})$  가 표현되기 때문에 필수경계조건을 만족하는 해  $f^h(\mathbf{x})$  를 구할 수 있다.

단

$$[\bar{N}_I(\mathbf{x})] = [N_I(\mathbf{x})] - [N_B(\mathbf{x})][N_B(\mathbf{x}_B)]^{-1}[N_I(\mathbf{x}_B)] \quad (15)$$

$$[\bar{N}_B(\mathbf{x})] = [N_B(\mathbf{x})][N_B(\mathbf{x}_B)]^{-1} \quad (16)$$

이다. 식 (16)으로 표현된 필수경계상에서 수정형상함수는  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_B$  에서 Kronecker delta 조건을 만족하기 때문에 보간특성을 보임을 알 수 있다.

수정형상함수를 이용한 갤러킨 정식화과정은 기존의 EFGM<sup>(10-11)</sup>의 정식화과정과 동일하며 본 연구에서 사용한 가중함수는 지수형 가중함수(exponential weight function)<sup>(6,15)</sup> 및 사차 스플라인 가중함수(quartic spline weight function)<sup>(13)</sup>를 사용하였고 두 가중함수에 대하여 해의 정확도를 비교하였다.

### 3. 수치예제 및 검토

본 논문의 수치예제에서는 이차원 문제에 적용하여 제안한 방법의 간편함과 정확함을 입증하고자 한다.

#### 3.1 외팔보 문제<sup>(10)</sup>

평면변형을 상태로 Fig. 2와 같은 절점배치방법에 대하여 각각 해석을 수행하였다. 이때 필수경계조건의 처리를 위해 해석방법 A에서는 라그랑지 승수법,<sup>(10)</sup> 해석방법 B에서는 직접변환법<sup>(11)</sup> 그리고 해석방법 C에서는 본 연구에서 제안한 형상함수 수정법을 각각 사용하여 해석을 수행하였다.

#### 3.1.1 수렴도 비교

본 연구에서 제안한 형상함수 수정법을 이용한 해석의 수렴도 특성을 확인하기 위하여 식 (17)의 변위오차의 크기(norm)와 식 (18)로 표현되는 에너지오차의 크기를 정의하고 이를 라그랑지 승수법의 결과와 비교하였다.

$$E_u \equiv \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\text{NUM}} - \mathbf{u}^{\text{EXACT}})^T (\mathbf{u}^{\text{NUM}} - \mathbf{u}^{\text{EXACT}}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (17)$$

$$E_\epsilon \equiv \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^{\text{NUM}} - \boldsymbol{\epsilon}^{\text{EXACT}})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\epsilon}^{\text{NUM}} - \boldsymbol{\epsilon}^{\text{EXACT}}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (18)$$

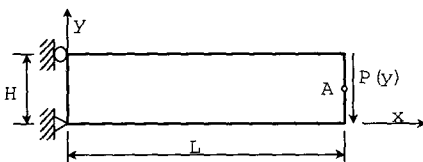
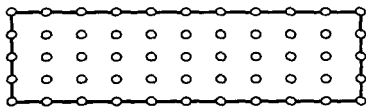
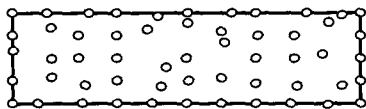


Fig. 1 Cantilever beam under end traction



(a) Regular node arrangement



(b) Irregular node arrangement

Fig. 2 Node arrangement for the cantilever beam

해석은 규칙적인 절점분포상태에서 길이방향의 분할수를 3 등분, 6 등분 그리고 9 등분으로 증가시켜 이에 따른 길이방향의 절점간의 거리(h)에 대한 변위 및 에너지의 크기를 도시하여 해석영역을 세분화 함에 따른 수렴도를 확인하였다. 사용한 가중함수는 사차 스플라인 가중함수(quartic spline weight function)이며 해석결과로부터 형상함수 수정법의 결과가 라그랑지 승수법의 결과<sup>(10,16)</sup>와 수렴도가 일치하는 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

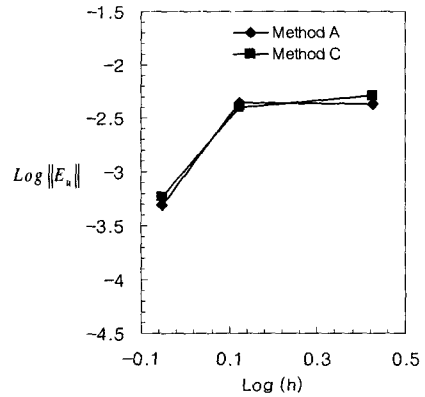


Fig. 3 Rate of convergence in the displacement error norm for the cantilever beam

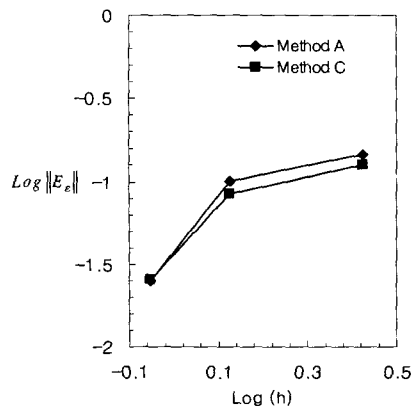


Fig. 4 Rate of convergence in the energy error norm for the cantilever beam

3.1.2 외팔보의 처짐 비교

Fig. 2와 같은 절점배치방법에 대하여 A 점에서의 처짐을 각각 비교하였다. 가중함수는 지수형 가중함수(exponential weight function)와 사차 스플라인 가중함수를 사용하였으며, 적분은  $x, y$  각 방향으로 각각 10 등분, 4 등분한 적분칸(cell)을 사용하였고 적분점은 각 방향에 대해 4 개를 사용하였다. 그 해석결과를 엄밀해로 정규화하여 나타내면 다음의 Table 1 과 같다. Table 1에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제안한 형상함수 수정법을 이용한 해석 결과(Method C)가 라그랑지 승수법을 이용한 결과와 비교하여 그 정확도가 우수하며 직접변환법을 통해 얻은 결과보다는 더 정확함을 알 수 있다. 이로써 라그랑지 승수법 및 직접변환법을 사용하는 어려움 없이 보다 간편하게 필수경계조건 처리가 가능하고 정확한 해를 얻을 수 있음을 보여주고 있다.

3.2 구멍을 갖는 무한평판문제

$x$  방향의 인장응력( $\sigma_{\infty}$ )을 받는 무한평판에 구멍이 존재하는 경우의 해석으로 대칭조건을 이용하여 Fig. 5와 같이 모델링하였고  $L=4, R=1$ 을 사용하였다. 이때 사차 스플라인 가중함수를 사용하여  $y$  축을 따라 나타나는  $x$  방향의 응력상태를 해석하였고 그 결과는 Fig. 6과 같다.

Table 1 Tip deflection ratio with respect to exact at point A

Node Arrange.	Weight Funct.	Method A	Method B	Method C
Regular	Expon.	1.02	0.92	0.99
	Quartic	1.05	0.95	1.02
Irregular	Expon.	0.87	0.86	0.92
	Quartic	0.91	0.87	0.94

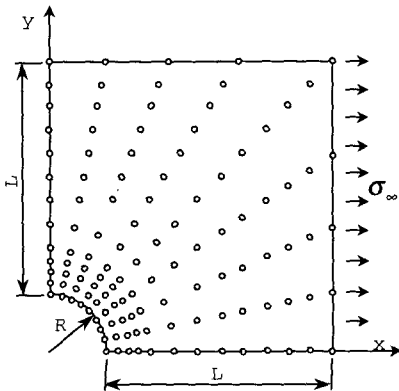


Fig. 5 Node arrangement for an infinite plate with hole

이때 해석방법은 앞의 외팔보의 경우와 같이 세가지의 해석방법을 사용하였다. 해석결과로부터 본 논문에서 제안한 형상함수 수정법의 결과가 직접변환법의 결과보다 우수하며 라그랑지 승수법을 이용한 해석결과에 근접함을 알 수 있었다.

3.3 이차원 균열문제<sup>(10)</sup>

Fig. 7와 같은 평판에 균열이 존재하는 경우에  $J$  적분을 통해 응력확대계수를 구하는 해석을 수행하였다. 해석모델은 대칭조건을 이용한 Fig. 8과 같고 지수형 가중함수 및 사차 스플라인 가중함수를 사용하여 해석하였다.

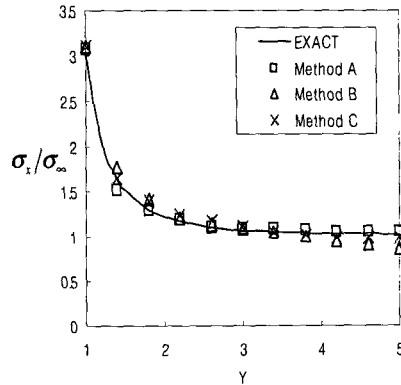


Fig. 6 Comparison the EFGM results with the exact solution

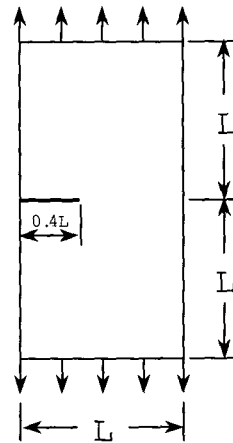


Fig. 7 Plate with an edge crack under uniaxial stress

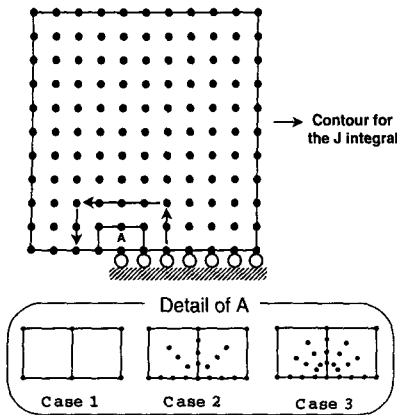


Fig. 8 Node arrangement and J-integral path for the crack problem

Table 2 Comparison of EFGM results with respect to exact solution

Node Arrange.	Weight Funct.	$K_I / K_{EXACT}$		
		Method A	Method B	Method C
Case 1	Expon.	0.86	0.92	0.92
	Quartic	0.82	0.97	0.97
Case 2	Expon.	0.87	1.27	0.94
	Quartic	1.01	1.28	0.98
Case 3	Expon.	1.01	1.26	0.99
	Quartic	0.99	1.26	0.99

이 때 적분을 위하여  $x, y$  각 방향으로 10 개의 적분칸을 사용하였다. 이때 적분점은 각방향으로 4 개를 사용하였다.

균열해석을 통하여 첫째 절점을 균열선단에 추가함에 따라 높은 정확도의 해를 얻을 수 있는 무요소법의 장점을 확인하였고, 둘째 본 연구에서 제안한 형상함수 수정법을 통한 해석의 결과가 기존 라그랑지 승수법의 해석결과와 비교하여 매우 정확함을 확인하였다.

#### 4. 결론

무요소법의 한가지 문제점으로 알려진 필수경계조건의 처리를 위해 형상함수 수정법을 제안하고 이차원의 외팔보, 원공을 갖는 무한평판문제 및 균열문제를 해석하고 그 결과를 검토하여 다음 결론을 얻었다.

- (1) 형상함수 수정법은 필수경계에서 Kronecker delta 조건을 만족시켜 변위경계조건을 유한요소법과 같이 직접 처리할 수 있다.
- (2) 형상함수 수정법의 수렴특성은 복잡하게 수

식화되고 프로그래밍에 어려움이 많은 기존의 라그랑지 승수법의 수렴특성과 잘 일치한다.

#### 후기

본 연구는 1998년도 한국과학재단의 핵심전문연구과제(과제번호: 981-1012-072-2)의 일부로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.
- (2) Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 237~262.
- (3) Babuska, I. and Melenk, J. M., 1997, "The Partition of Unity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 727~758.
- (4) 송태한, 임장근, 1998, "RKPM에서의 변위 경계조건 처리법," 대한기계학회 '98년도 춘계학술대회논문집, pp. 391~395.
- (5) 석병호, 임장근, 1998, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 대한기계학회 '98년도 춘계학술대회 논문집, pp. 396~401.
- (6) 석병호, 임장근, 1999, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 전산구조공학회는 문집, 제 12 권, 제 1 호, pp. 47~56.
- (7) 송태한, 임장근, 1999, "RKPM의 새로운 구성법," 대한기계학회 '99년도 춘계학술대회논문집, pp. 833~837.
- (8) 석병호, 임장근, 1999, "EFGM에서 필수경계조건을 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회 '99년도 춘계학술대회논문집, pp. 838~842.
- (9) Nayroles, B., Touzot, G. and Villon P., 1992, "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements," *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307~318.
- (10) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu L., 1994, "Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (11) Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Gu, L., 1994, "A New Implementation of the Element-Free Galerkin Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, pp. 397~414.
- (12) Belytschko, T., Organ, D. J. and Krongauz, Y., 1995, "A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method," *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 186~195.
- (13) Krongauz, Y. and Belytschko, T., 1996, "Enforcement of Essential Boundary Conditions in

- Meshless Approximations Using Finite Elements,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133~145.
- (14) Kaljevic, I. and Saigal, S., 1997, “An Improved Element-Free Galerkin Formulation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 2953~2974.
- (15) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., 1996, “Meshless Methods: An Overview and Recent Developments,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3~47.
- (16) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1998, “An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method,” *Computational Mechanics*, Vol. 5, No. 3, pp. 207~241.