

# 균질화법에 의한 다결정 형상기억합금의 기계적 거동 모델링

구 병 춘\*, 조 진\*\*  
(1999년 9월 29일 접수)

## Modeling of the Mechanical Behavior of Polycrystalline Shape-Memory Alloys by a Homogenization Method

Byeong-Choon Goo and Jin Cho

**Key Words :** Micromechanics(미시역학), Shape-Memory Alloy(형상기억합금), Phase Transformation(상변환), Pseudoelasticity(초탄성), Reorientation(리오리엔테이션), Homogenization(균질화)

### Abstract

We obtain a micromechanics-based Helmholtz free energy and then in the framework of irreversible thermodynamics, a kinetic relation, a martensitic nucleation criterion and the reorientation criterion of martensitic variants are obtained. These relations are valid for a three-dimensional proportional and non-proportional loadings and for a combination of mechanical and thermal loading. From the simulated pseudoelastic stress-strain relation of a single crystal with loading rate effect, polycrystalline behavior in case of proportional and non-proportional loading is predicted by a homogenization method. The obtained results are compared quantitatively with experimental results.

### 1. 서론

마르텐사이트 상변환은 재료과학, 기계공학의 영역에서 많은 흥미를 불러 일으키고 있다. 마르텐사이트 상변환에 기인하는 형상기억합금의 여러 현상들은 이론적 연구와 더불어 실용화도 활발히 진행되고 있다. 형상기억합금의 기계적 거동에 관한 모델로는 Erickson,<sup>(1)</sup> Falk,<sup>(2)</sup> Niezgodka 와 Sprekels,<sup>(3)</sup> Müller 와 Xu,<sup>(4)</sup> Abeyaratne 와 Knowles<sup>(5)</sup> 등이 가정된 자유에너지로부터 초탄성과 히스테르시스 현상을 설명하였고, Bondaryev 와 Wayman,<sup>(6)</sup> Graesser 와 Cozzarelli,<sup>(7)</sup> Raniecki 와 Lexcellent,<sup>(8)</sup>은 비가역 열역학에 근거한 현상학적인 모델로부터 초탄성 등을 모델링하였다. 한편 Patoor 등<sup>(9)</sup>과, Sun 과 Hwang<sup>(10,11)</sup>은 미시역학적 접근을 시도하였다. 실험결과에 의하면 형상기억합금의 초탄성은 하중이 가해지는 속도와 시편의 열전달 속도에 크게 의존한다. Leo 등<sup>(12)</sup>은 많은 가정을 설정하여 NiTi 다결정의 작용하중의 속도를

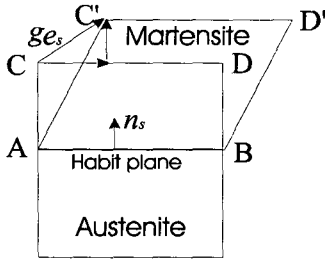
고려한 초탄성거동을 모델링하였다.

본 연구에서는 우선 미시역학과 비가역열역학으로부터 단결정의 구성방정식과 마르텐사이트 상변환의 판별기준 등이 유도된다. 이들 관계들은 임의의 하중조건에서 성립하며 초탄성, 기억효과 그리고 마르텐사이트 바리안트(variant)의 리오리엔테이션(reorientation)을 모델링 할 수 있다. 단결정에 대한 시뮬레이션으로부터 다결정의 기계적거동이 균질화(homogenization)법에 의해 모델링된다.

### 2. 상변환의 미시역학적 거동

일반적으로 형상기억합금의 상변환에서 낮은 온도의 상은 마르텐사이트라 불리며 높은 온도의 상은 오스테나이트라 불린다. 모델의 단순화를 위해 두 상이 같은 크기의 탄성계수  $E$ , 푸아송비  $\nu$  그리고 밀도  $\rho$ 를 갖는다고 가정한다. Wechsler 등<sup>(13)</sup>의 현상학적인 이론에 의하면 마르텐사이트 상변환은 변형과 회전 없이 하비트 평면(habit plane)에서 이 평면에 수직성분과 이 평면에 평행한 성분으로 구성되며 이 때의 변형률  $\epsilon_S^p$ 은 식 (1)과

\* 회원, 한국철도기술연구원  
E-mail : bsgoo@krii.re.kr  
TEL : (0343)384-6684(163) FAX : (0343)381-8752  
\*\* 회원, 아주대학교 기계공학과



**Fig. 1** Simple shear on the habit plane plus an extension in the direction of the habit plane normal. The austenite ABCD is transformed into the martensite ABC'D'

같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\epsilon}_s^p = g \mathbf{R}_s = \frac{1}{2} g (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{n}_s + \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{e}_s) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{e}_s$  는 상변환의 변위방향의 단위벡터이고  $\mathbf{n}_s$  는 하비트 평면에 수직인 단위벡터이다.  $g$  는 변형의 크기를 나타내는 재료상수이다 (Fig. 1).

$\mathbf{R}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{n}_s + \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{e}_s)$  는 바리안트  $s$  의 방향 텐서이고 기호  $\otimes$  는 다이아딕곱(dyadic product)을 나타낸다. 모든 벡터와 텐서는 굵은 문자로 표현되며 시험실에 고정된 동일한 기준좌표계에 대해 기술된다. 바리안트  $s$  는 동일한  $\mathbf{e}$  와  $\mathbf{n}$  를 갖는 마르텐사이트 전체로 정의된다. 따라서 하나의 바리안트는 한개 혹은 많은 수의 마르텐사이트 판들로 이루어 질 수 있다. 각 마르텐사이트 바리안트의 부피비  $f_s = V_s/V$  ( $s=1, \dots, n$ )가 모델의 내부상태변수 (internal state variables)로 사용될 것이다. 여기서  $V_s$  는 마르텐사이트 바리안트  $s$  의 부피이고  $V$  는 해석대상인 시편의 전체부피이다. 해석영역은 하나의 바리안트에 비해 충분히 크다고 가정되어 무한체에서 얻어진 해가 사용될 것이다.

미소변형의 가정하에서 해석대상인 시편의 전체변형률(global strain)  $\mathbf{E}$  는 탄성변형률  $\mathbf{E}^e$  와 상변환에 의한 변형률  $\mathbf{E}^p$  로 나누어진다. 전체변형률  $\mathbf{E}$  는 모든 바리안트에 대한 국부변형률  $\boldsymbol{\epsilon}$  의 평균값으로부터 얻어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p = \langle \boldsymbol{\epsilon}^e \rangle_V + \langle \boldsymbol{\epsilon}^p \rangle_V \\ &= \mathbf{M} : \boldsymbol{\Sigma} + f \langle \boldsymbol{\epsilon}^p \rangle_{V_M} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\Sigma} + g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\langle \rangle$ ,  $\mathbf{M}$  그리고  $f = V_M/V$  는 각각 부피

평균, 탄성 컴플라이언스 텐서 그리고 시편에 대한 전체 마르텐사이트의 부피비이다. 두 텐서 사이의 기호  $:$  는 텐서의 콘트랙트곱(contracted product)을 나타낸다.

### 3. Helmholtz 자유에너지

무한체로 가정되는 오스테나이트에 타원체 형상으로 가정되는 하나의 마르텐사이트가 생성되면 오스테나이트와 타원체 사이에는 변형의 차이에 의해 내부응력이 생성된다. 이 타원체에 생성되는 응력은 잘 알려진 Eshelby 의 해<sup>(14)</sup>로 주어진다. 그러나 타원체의 수가 많거나 여러 종류의 타원체가 있는 경우 Eshelby 의 해를 직접 이용할 수 없다. 무한체내에 동일한 형상의 타원체가 무작위로 흩어져 있는 경우 평균내부응력은 Mori 와 Tanaka<sup>(15)</sup>에 의해 얻어졌다. 여기서는 K.B.W. (Kröner,<sup>(16)</sup> Budiansky and Wu<sup>(17)</sup>)의 균질화 개념으로 평균응력과 평균변형률을 구한다. 동일한 바리안트를 구성하는 마르텐사이트판들은 타원체로서 두 주반경이 같고 나머지 주반경은 두 주반경에 비해 매우 작다고 가정한다 ( $a_1 = a_2$ ,  $a_3/a_1 \ll 1$ ). 두 주반경  $a_1$ ,  $a_2$  는 하비트평면상에 있고  $a_3$  는 하비트평면에 수직으로  $\mathbf{n}$  의 방향과 일치한다. K.B.W.의 균질화 개념에 의하면 상변환에 의한 타원체의 변형률은 Eshelby 문제에서의 고유변형률 (eigenstrain)에 해당하므로 바리안트  $s$  에 작용하는 국부내부응력  $\boldsymbol{\sigma}_s$  는 Eshelby 의 해에 의해 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_s &= \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : (\boldsymbol{\epsilon}_s^p - \mathbf{E}^p) \\ &= \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : (\boldsymbol{\epsilon}_s^p - \sum_{i=1}^N f_i \boldsymbol{\epsilon}_i^p) \\ &= \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\epsilon}_s^p - \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \sum_{i=1}^N f_i \boldsymbol{\epsilon}_i^p \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{L}$  은 탄성 스티프니스 텐서이고  $\mathbf{S}_s$  는 바리안트  $s$  에 대한 Eshelby 텐서이며  $\mathbf{I}$  는 단위텐서이다. 하나의 바리안트  $s$  만이 있는 경우 바리안트  $s$  의 내부응력  $\boldsymbol{\sigma}_s$  는 식 (4)로 주어지며 Mori 와 Tanaka<sup>(15)</sup>에 의해 얻어진 해와 일치함을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}_s = (1 - f_s) \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\epsilon}_s^p \quad (4)$$

내부응력  $\boldsymbol{\sigma}_s$  에 의해 시편의 단위질량당 저장된 에너지  $W^{int}$  는 아래와 같이 주어진다.<sup>(18)</sup>

$$\begin{aligned}
 W^{int} &= -\frac{1}{2\rho V} \int_V \sum_{s=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_s^p : \boldsymbol{\sigma}_s dV \\
 &= -\frac{1}{2\rho} \sum_{s=1}^N f_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^p : \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}_s^p \\
 &\quad + \frac{1}{2\rho} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N f_s f_t \boldsymbol{\varepsilon}_s^p : \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}_t^p \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서, 식 (5)를 간략히 표현하기 위해

$$W_s = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_s^p : \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}_s^p \quad (6)$$

$$W_{st} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_s^p : \mathbf{L} : (\mathbf{S}_s - \mathbf{I}) : \boldsymbol{\varepsilon}_t^p \quad (7)$$

라 하면 식 (5)는 아래 식 (8)과 같이 표현된다.

$$W^{int} = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^N f_s (1-f_s) W_s - \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^N \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N f_s f_t W_{st} \quad (8)$$

식 (8)의 첫번째 항은 바리안트  $s$  에 의해 저장된 에너지이며 두번째 항은 바리안트들 사이의 간섭에 의한 에너지이다. 한편, Colonetti 의 정리<sup>(18)</sup>에 의하면 외력에 의한 에너지  $W^{ext}$  와 내부응력에 의한 에너지  $W^{int}$  사이에는 간섭이 없으므로  $W^{ext}$  는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 W^{ext} &= \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}^e : \mathbf{L} : \mathbf{E}^e \\
 &= \frac{1}{2\rho} \left[ \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s - \alpha(T - T_r) \mathbf{J} \right] : \\
 &\quad \mathbf{L} : \left[ \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s - \alpha(T - T_r) \mathbf{J} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

일정부피에서의 비열  $c$  는 아래와 같이 정의된다.

$$c = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = -T \frac{\partial^2 \Psi^T}{\partial T^2} \quad (10)$$

두 상의 비열  $c$  가 일정하다고 가정하면, 온도에 의존하는 에너지는 식 (10)을 적분하여 얻을 수 있다. 오스테나이트의 비열을  $C_A$ 라 하면 오스테나이트의 온도에 의존하는 단위질량당의 에너지  $\Psi_A^T$  는

$$\Psi_A^T = -c_A T \log(T) + C_1^A T + C_2^A \quad (11)$$

여기서  $C_1^A$  와  $C_2^A$  는 상수이다. 마르텐사이트의 비열을  $C_M$ 이라 하면 마르텐사이트의 온도에 의존하는 단위질량당의 에너지  $\Psi_M^T$  는 아래와 같이 표현된다.

$$\Psi_M^T = -c_M T \log(T) + C_1^M T + C_2^M \quad (12)$$

여기서  $C_1^M$  와  $C_2^M$  은 상수이다. 따라서 오스테나이트와 마르텐사이트로 구성된 시편의 경우 온도에 의존하는 에너지  $\Psi^T$  는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \Psi^T &= (1-f) \Psi_A^T + f \Psi_M^T \\
 &= -c_A T \log(T) + C_1^A T + C_2^A + f C^* (T - T_0) \\
 &\quad + f(c_M - c_A) [T_0 \log(T_0) - T \log(T)] \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서  $T_0$  는  $\Psi_A^T(T_0) = \Psi_M^T(T_0)$  로 정의되는 온도에 의한 내부에너지의 평형온도이고  $C^* = (C_1^M - C_1^A)$  이다. 따라서 시편의 Helmholtz 자유에너지는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \Psi &= W^{ext} + W^{int} + \Psi^T \\
 &= \frac{1}{2\rho} \left[ \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s - \alpha(T - T_r) \mathbf{J} \right] : \\
 &\quad \mathbf{L} : \left[ \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s - \alpha(T - T_r) \mathbf{J} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^N f_s (1-f_s) W_s - \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^N \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N f_s f_t W_{st} \\
 &\quad - c_A T \log(T) + C_1^A T + C_2^A + f C^* (T - T_0) \\
 &\quad + f(c_M - c_A) [T_0 \log(T_0) - T \log(T)] \quad (14)
 \end{aligned}$$

식을 간단히 하기 위하여 모든 바리안트의 모든 마르텐사이트의  $\beta = a_3 / a_1$  가 동일하다고 가정하면  $W_s$  는 상수가 된다. 더하여 지금부터 두 상은 같은 비열을 갖는다고 가정한다( $c = c_A = c_M$ ).

Helmholtz 자유에너지로부터 글로발 응력은 다음과 같이 주어진다.<sup>(19)</sup>

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{L} : \left( \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s \right) \quad (15)$$

상태변수  $f_s$  에 대응하는 변수  $F_s$  는 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 F_s &= -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial f_s} \\
 &= g \mathbf{R}_s : \mathbf{L} : \left[ \mathbf{E} - g \sum_{s=1}^N f_s \mathbf{R}_s - \alpha (T - T_r) \mathbf{J} \right] \\
 &\quad - (1 - 2f_s) W_s + 2 \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N f_t W_{st}^* \\
 &\quad - \rho C^* (T - T_0)
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서  $W_{st}^* = \frac{1}{2}(W_{st} + W_{ts})$ 는  $s$ 와  $t$ 에 대해 대칭이다.

Clausius-Duhem 부등식은<sup>(19)</sup> 아래와 같다.

$$\sum_{s=1}^N F_s \dot{f}_s - \frac{\mathbf{q}}{T} \text{grad} T \geq 0 \tag{17}$$

여기서  $\mathbf{q}$ 는 열흐름벡터로 고려된 점에서 밖으로 흐를 때 양이다. 변수의 위에 있는 점은 시간에 대한 미분을 나타낸다. 식 (17)의 각 항이 부등식을 만족한다고 가정하면 Clausius-Duhem 부등식은 아래와 같이 표현된다.

$$\sum_{s=1}^N F_s \dot{f}_s \geq 0; \quad -\frac{\mathbf{q}}{T} \text{grad} T \geq 0 \tag{18}$$

열방정식은 아래 식 (19)로 기술된다.<sup>(19)</sup>

$$\rho c \dot{T} - k \nabla^2 T = \sum_{s=1}^N F_s \dot{f}_s + T \left[ \frac{\partial \Sigma}{\partial T} : \dot{\mathbf{E}} - \sum_{s=1}^N \frac{\partial F_s}{\partial T} \dot{f}_s \right] \tag{19}$$

여기서  $k$ 는 열전달계수이고  $\nabla^2$ 는 라플라스 연산자이다. 식 (19)를 정리하면 다음과 같다.

$$\rho c \dot{T} - k \nabla^2 T = \sum_{s=1}^N F_s \dot{f}_s + \rho T C^* \left( \sum_{s=1}^N \dot{f}_s \right) \tag{20}$$

#### 4. 단결정의 구성방정식

상태변수  $f_s$ 의 변화는 바리안트  $s$ 의 상변환 그 자체와 다른 마르텐사이트 바리안트로부터 바리안트  $s$ 로의 리오리엔테이션에 기인하므로 아래와 같이 표현될 수 있다.<sup>(20)</sup>

$$\dot{f}_s = \dot{f}_{s0} + \dot{f}_{s,1} + \dots + \dot{f}_{s,s-1} + \dot{f}_{s,s+1} + \dots + \dot{f}_{s,N}, \quad s=1, \dots, N \tag{21}$$

여기서  $\dot{f}_{s0}$  상변환에 의한 변화율로  $\dot{f}_{s0} > 0$ 는 정방향상변환(오스테나이트→마르텐사이트)을 나

타내고,  $\dot{f}_{s0} < 0$ 는 역방향상변환(마르텐사이트→오스테나이트)을 나타낸다.  $\dot{f}_{s,t}$ 는 마르텐사이트 바리안트  $t$  ( $t \neq s$ )와  $s$  사이의 변화율로  $\dot{f}_{s,t} > 0$ 이면 바리안트  $t$ 가 바리안트  $s$ 로 리오리엔테이션되는 것을 나타내고  $< 0$ 이면 그 반대이다. 따라서 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\dot{f}_{s,t} = -\dot{f}_{t,s} \tag{22}$$

상변환에 있어 손실은 두 상의 경계면에서의 마찰, 결합의 생성, 소성변형, 음향방출, 열손실 등이다. 리오리엔테이션 과정에서 손실은 유사한 원인으로 생기나 잠열에 의한 열손실은 무시된다. 상변환의 기계적 손실을  $\dot{W}_d^{re}$ 은 아래와 같은 간단한 지수형으로 가정된다.

$$\dot{W}_d^{re} = \pm \dot{h}_0 \sum_{s=1}^N F_s \left( \pm (F_s - D_r^{(i)})^n \right) \tag{23}$$

여기서  $\dot{h}_0$ 와  $n$ 는 상수이고,  $i=1$  정방향상변환을,  $i=2$ 는 역방향의 상변환을 표시한다.  $\pm$ 의  $+$ 는 정방향을  $-$ 는 역방향을 나타낸다. 어떤 바리안트의 손실은 다른 바리안트와는 독립적이라 가정되었다. 함수  $\langle H(x) \rangle$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$H(x) \geq 0, \langle H(x) \rangle = H(x); \quad H(x) < 0, \langle H(x) \rangle = 0 \tag{24}$$

$D_r^{(i)}$ 는 일반적인 형태로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$D_r^{(i)} = D_0^{(i)} + D_f^{(i)}(f_s) \tag{25}$$

여기서  $D_0^{(i)}$ 는 상수이고  $D_f^{(i)}(f_s)$ 는  $f_s$ 의 함수로 경화를 나타내는 항이다. 리오리엔테이션에 기인하는 손실률  $\dot{W}_d^{re}$ 은  $\dot{f}_{s,t}$ 의 함수로 아래와 같이 가정되었다.

$$\dot{W}_d^{re} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N D_{re}^{(i)} \dot{f}_{s,t} \tag{26}$$

여기서  $D_{re}^{(i)}$ 는 아래와 같이 일반적인 형태로 표현할 수 있다.

$$D_{re}^{(i)} = D_3^{(i)} + D_4^{(i)}(f_s) \tag{27}$$

여기서  $D_3^{(i)}$ 은 상수이고  $D_4^{(i)}(f_s)$ 는 경화를 나타내는 항이다.  $i=1$ 는 바리안트  $t$ 로부터 바리안트  $s$ 로의 리오리엔테이션을 나타내고  $i=2$ 는 바리안트  $s$ 로부터  $t$ 로의 리오리엔테이션을 나타낸다.

따라서 기계적 손실에 관한 식들로부터 (식 (18), (23), (26)) 다음과 같은 관계가 얻어진다.

$$\sum_{s=1}^N F_s \dot{f}_s = \pm \dot{h}_0 \sum_{s=1}^N F_s \langle \pm (F_s - D_{ir}^{(i)}) \rangle^n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s}}^N D_{re}^{(i)} \dot{f}_{s,t} \quad (28)$$

식 (21)과 (22)를 (28)에 대입하면 아래의 식이 얻어진다.

$$\sum_{s=1}^N \left[ \dot{f}_{s0} \mp \dot{h}_0 \langle (F_s - D_{ir}^{(i)}) \rangle^n \right] F_s + \frac{1}{2} \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s}}^N \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^N (F_s - F_t - D_{re}^{(i)}) \dot{f}_{s,t} = 0 \quad (29)$$

이 식이 임의의  $F_s$  와  $\dot{f}_{s,t}$  에 대해 만족하기 위해서는 두 항이 각각 영이 되어야 한다.

$$\dot{f}_s = \pm \dot{h}_0 \langle \pm (F_s - D_{ir}^{(i)}) \rangle^n \quad (30)$$

$$Y_{st} = F_s - F_t - D_{re}^{(i)} = g(\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_t) : \Sigma + 2 \sum_{n=1}^N f_n W_{sn}^* - 2 \sum_{n=1}^N f_n W_{tn}^* - D_{re}^{(i)} = 0, \quad (s \neq t) \quad (31)$$

식 (30)은 상변환시의 바리안트  $s$  의 거동을 나타내고 식 (31)은 바리안트  $t$  와  $s$  사이의 리오리엔테이션의 판별식이다.  $Y_{st} = 0$  이면 바리안트  $t$  가 바리안트  $s$  로 리오리엔테이션 되고 이때의 리오리엔테이션을  $\dot{f}_{s,t}$  은 아래의 식에서 얻어진다.

$$\dot{Y}_{st} = \dot{F}_s - \dot{F}_t - \dot{D}_{re}^{(i)} = 0 \quad (32a)$$

$$\dot{f}_s = \dot{f}_{s0} + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^K \dot{f}_{s,t} \quad (32b)$$

$$\dot{f}_t = \dot{f}_{t0} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq t}}^M \dot{f}_{m,t} \quad (32c)$$

여기서  $K$  는 바리안트  $s$  로 리오리엔테이션 중인 바리안트의 수이고  $M$  은 바리안트  $t$  로 리오리엔테이션 중인 바리안트의 수이다.

### 5. 단결정의 초탄성거동 모델링

대부분의 실험에 의하면 단결정의 경우 Schmid 인자가 가장 큰 하나의 바리안트만 생성된다. 이 경우  $\dot{f}_{s0} = \dot{f}$  는 아래와 같이 표현된다.

$$\dot{f} = \pm \dot{h}_0 \langle \pm (F - D_{ir}^{(i)}) \rangle^n \quad (33)$$

여기서  $\pm$  의 +와 -는 정방향과 역방향의 상변환을 표시한다. 정방향의 상변환에 대해서  $D_{ir}^{(i)}$  은  $f$  의 간단한 함수로 가정된다.

$$D_{ir}^{(i)} = D_0 + 2W_s f \quad (34)$$

따라서  $\dot{f}$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{f} = \dot{h}_0 \langle g R_{33} \Sigma_{33} - D_0 - W_s - \Delta G \rangle^n \quad (35)$$

여기서  $\Delta G = \rho C^*(T - T_0)$  이고 식 (35)는 아래와 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$\dot{f} = \dot{f}_0 \left\langle \frac{R_{33} \Sigma_{33} - \tau_{AM}^0(T)}{\tau_0} \right\rangle^n \quad (36)$$

여기서  $\tau_0$  는 무차원화를 위한 임의의 주어진 상수이다.  $\dot{f}_0$  와  $n$  는 재료상수이다.  $\tau_{AM}^0(T)$  는 정방향 상변환시의 전단응력의 문턱값이다.

$$\tau_{AM}^0(T) = \frac{\Delta G + W_s + D_0}{g} = b_0(T - M_s^0) \quad (37)$$

여기서  $b_0 = \frac{\rho C^*}{g}$ ,  $M_s^0 = T_0 - \frac{W_s + D_0}{\rho C^*}$ .  $M_s^0$  는 외력이 없는 경우 정방향상변환의 시작온도(마르텐사이트 생성온도)이다.

인장방향의 변형률  $\dot{E}_{33}$  은 아래와 같이 주어진다.

$$\dot{E}_{33} = \frac{\dot{\Sigma}_{33}}{E} + g R_{33} \dot{f} = \frac{\dot{\Sigma}_{33}}{E} + g R_{33} \dot{f}_0 \left\langle \frac{R_{33} \Sigma_{33} - \tau_{AM}^0(T)}{\tau_0} \right\rangle^n \quad (38)$$

일정한  $\dot{\Sigma}_{33}$  가 작용할 때 식 (38)은 적분되고  $\text{Log}(E_{33}) \leftrightarrow \text{Log}(R_{33} \Sigma_{33} - \tau_{AM}^0)$  의 그래프로부터  $\dot{f}_0$  와  $n$  이 얻어진다. 역방향상변환에서  $D_{ir}^{(2)}$  은  $f$  의 함수로 아래와 같이 가정된다.

$$D_{ir}^{(2)} = 2W_s(f - 1) - D_0 \quad (39)$$

따라서  $\dot{f}$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{f} = -\dot{h}_0 \langle \Delta G - W_s - D_0 - g R_{33} \Sigma_{33} \rangle^n \quad (40)$$

식 (40)은 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\dot{f} = -\dot{f}_0 \left( \frac{\tau_{MA}^0(T) - R_{33} \Sigma_{33}}{\tau_0} \right)^n \quad (41)$$

여기서  $\tau_{MA}^0(T)$ 은 온도만에 의한 역방향상변환시의 전단응력의 문턱값으로 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_{MA}^0(T) = \frac{\Delta G - W_s - D_0}{g} = b_0(A_s^0 - T) \quad (42)$$

단축 인장시험에서 Schmid 계수의 값이 가장 큰 바리안트가 생성된다. 정방향, 역방향 상변환이 시작되는 인장응력값을 각각  $\sigma_{AM}^{ap}$ ,  $\sigma_{MA}^{ap}$  라 하면  $W_s + D_0$ 와  $\Delta G = \rho C^*(T - T_0)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} W_s + D_0 &= \frac{g}{2}(\tau_{AM}^0 - \tau_{MA}^0) \\ &= \frac{g R_{33}}{2}(\sigma_{AM}^{ap} - \sigma_{MA}^{ap}) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Delta G &= \rho C^*(T - T_0) = \frac{g}{2}(\tau_{AM}^0 + \tau_{MA}^0) \\ &= \frac{g R_{33}}{2}(\sigma_{AM}^{ap} + \sigma_{MA}^{ap}) \end{aligned} \quad (44)$$

하나의 바리안트가 생성되는 경우 열방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \rho C \dot{T} - k \nabla^2 T &= F \dot{f} + \rho T C^* \dot{f} = \\ [g R_{33} \Sigma_{33} - W_s(1 - 2f) + \rho C^* T_0] \dot{f} \end{aligned} \quad (45)$$

Pham<sup>(21)</sup>에 의한 다결정 CuZnAl 의 시험결과에 의하면 시편의 온도는 거의 균일하다. 단결정의 경우에도 온도가 균일하다고 가정하면 ( $\nabla^2 T = 0$ ), 반경  $r$ , 길이  $L$ 인 시편의 경우 시편으로부터 대기로의 열전달을 고려하면 열방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \rho C \dot{T} \pi r^2 L &= (F + \rho T C^*) \dot{f} \pi r^2 L - h(T - T_a) \\ &(2\pi r L - 2\pi r^2) \end{aligned} \quad (46)$$

여기서  $h$ 는 콘벡션 열전달계수이고  $T_a$ 는 시험실의 온도이다. 얇은 타원체의 경우,  $W_s(\beta) \approx b_5(\beta) \cdot \mu \cdot (g/2)^2$ 는 형상비  $\beta = a_3/a_1$ 에 의존한다.<sup>(18)</sup>  $\beta = 10^{-3}$ 인 경우,  $W_s \approx 10^{-4} \mu$ . 여기서  $\mu$ 는 전단계수이다. 따라서  $W_s$ 의 값은 다른 항에 비해 매우 작아 열방정식에서는 무시가 가능함을 알 수 있다.  $\dot{\Sigma}_{33}$ 이 작용할 때, 시간  $t$ 에서  $\Sigma_{33}$ 이 주어지고  $\dot{f}$ ,  $\dot{E}_{33}$ 와  $\dot{T}$ 는 식 (36), (38)와

(46)로부터 얻어진다. 상변환이 시험실의 온도변화에 의해 일어나는 경우, 온도  $M_s^0$ 에서 마르텐 사이트 생성이 시작된다. 이 경우 식 (35)로부터

$$D_0 + W_s + \rho C^*(M_s^0 - T_0) = 0 \quad (47)$$

역방향상변환의 경우  $A_s^0$ 에서 오스테나이트의 생성이 시작되고 식 (40)로부터

$$\rho C^*(A_s^0 - T_0) - W_s - D_0 = 0 \quad (48)$$

따라서 식 (47)과 (48)로부터  $T_0 = (M_s^0 + A_s^0)/2$ 가 주어진다. 한편 정방향상변환에서 응력과 온도의 아래 관계에서

$$\tau_{AM}^0(T) = R_{33} \Sigma_{33} = \frac{\rho C^*(T - T_0) + W_s + D_0}{g} \quad (49)$$

시간에 대한 미분으로부터  $\dot{T}$ 가 얻어진다.

$$\dot{T} = \frac{R_{33} \dot{\Sigma}_{33}}{b_0} \quad (50)$$

그리고  $\dot{f}$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\dot{f} = \frac{\dot{E}_{33}^p}{g R_{33}} = \frac{1}{g R_{33}} \left( \dot{E}_{33} - \frac{\dot{\Sigma}_{33}}{E} \right) \quad (51)$$

식 (46), (50), (51)로부터 아래의 관계가 얻어진다.

$$\dot{E}_{33} = \left( \frac{\rho C R_{33}}{d b_0} + \frac{1}{E} \right) \dot{\Sigma}_{33} + \frac{2h}{d} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{L} \right) (T - T_a) \quad (52)$$

여기서,

$$d = \frac{1}{g R_{33}} (g R_{33} \Sigma_{33} - W_s(1 - 2f) + \rho C^* T_0).$$

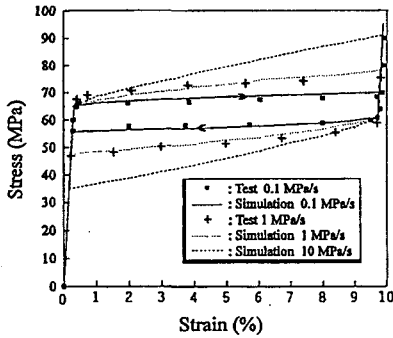
$\dot{E}_{33}$ 는  $\dot{\Sigma}_{33}$ 과  $h$ 에 의존함을 알 수 있다. 정방향상변환에서 작용하중의 크기가 일정할 경우 ( $\dot{\Sigma}_{33} = 0$ ) 상변환은  $T$ 가  $T_a$ 가 될 때까지 계속된다. 이때의  $\dot{E}_{33}$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$\dot{E}_{33} = \frac{2h}{dr} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{L} \right) (T - T_a) > 0 \quad (53)$$

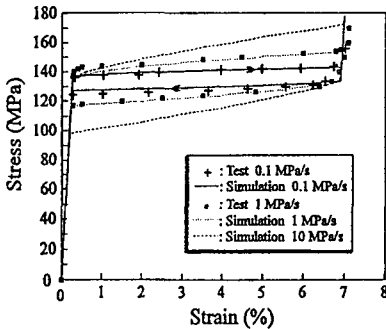
식 (53)에 의하면 정방향상변환이 얼마간 진행된 후 하중이 줄어들어도 정방향상변환은 계속될 수 있다. 따라서 상변환의 잠열을 고려함으로써 상변환에서 관찰되는 크리프효과<sup>(20)</sup>를 설명할 수 있다.

**Table 1** Identified values for specimens B and C, single crystal CuZn(25.63 wt. %)Al(4.3 wt. %)

Sample	E (MPa)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	c (J/Kg °C)	G	$\sigma_{AM}^0$ (MPa)
B	20000	8228	393	0.206	29.81
C	50814	8228	393	0.171	53.19
Sample	$\sigma_{AM}^0$ (MPa)	T <sub>a</sub> (K)	W <sub>s</sub> + D <sub>0</sub> (MJ/m <sup>3</sup> )	$\rho C^*$ (MJ/Km <sup>3</sup> )	b <sub>0</sub> (MPa)
B	28.05	335.15	0.181	0.178	0.86
C	52.22	349.15	0.083	0.185	1.08



**Fig. 2** Experimental<sup>(20)</sup> and simulated stress-strain curves of specimen B, single crystal CuZn(25.63 wt. %)Al(4.3 wt. %)



**Fig. 3** Experimental<sup>(20)</sup> and simulated stress-strain curves of specimen C, single crystal CuZn(25.63 wt. %)Al(4.3 wt. %)

Table 1 은 시뮬레이션에 사용된 값들이다.  $\dot{\epsilon}_0 = 500(s^{-1})$ ,  $n = 1.5$ ,  $\tau_0 = 50(MPa)$ ,  $h = 700(W/K m^2)$  이 사용되었다. 단결정 시편 B 와 C 는 CuZn(25.63 wt. %)Al(4.3 wt. %)로  $n_s$  와  $e_s$  의 방향은 각각  $\{2\ 7\ \bar{8}\}$  과  $\langle 2\ \bar{9}\ 8 \rangle$  이다.<sup>(20)</sup> 시편은 직경 4 mm 인 봉으로 인장축과 단결정  $[1\ 0\ 0]$ ,  $[0\ 1\ 0]$ ,  $[0\ 0\ 1]$  방향과의 각도는 시편 B 의 경우 59.35°, 85.85°, 30.98°이고, C 의 경우 47.93°, 91.28°, 42.09° 이다. 간단한 모델은 하중의 속도효과를 잘 보여준다 (Fig. 2, 3).

## 6. 다결정의 초탄성거동 시뮬레이션

탄소성분야에서 균질화법에 의한 다결정의 거동에 관한 연구가 Hill,<sup>(22)</sup> Hutchinson<sup>(23)</sup> 등에 의해 큰 진전을 하였으나 탄소성분영역에서는 아직 만족할만한 모델을 찾기가 어렵다. Nemat-Nasser 와 Obata<sup>(24)</sup>는 대변형 탄소성분영역에서 하나의 모델을 제안하였는데, 그들의 모델에서 미소변형에서 다결정을 구성하는 단결정의 모양이 구형이고 소성변형의 체적변화가 없을 때 단결정과 다결정의 응력과 변형률의 관계는 식 (54)로 주어진다.

$$\dot{\sigma} = \dot{\Sigma} - 2(1 - \chi)\mu(\dot{\epsilon}^p - \dot{E}^p) \quad (54)$$

여기서  $\chi = 2(4 - 5\nu)/15(1 - \nu)$ .  $\sigma$  와  $\epsilon$  는 단결정에서의 응력과 변형률이고,  $\Sigma$  와  $E$  는 다결정의 응력과 변형률을 나타낸다. 식 (54)에 의하면 단결정과 기지의 상호작용은 항상 탄성적이다. Caillaud 와 Pilvain<sup>(26)</sup>은 기지의 점소성변형에 의한 응력완화 효과를 고려하기 위하여 추가로 또 하나의 변수를 도입하여 아래와 같은 식을 제안하였다.

$$\sigma = \Sigma - \mu(\xi^B - \frac{1}{M} \sum_{g=1}^M \xi^g) \quad (55)$$

여기서, M 은 단결정의 수이다. 텐서  $\xi^B$  는 다음의 식으로부터 얻어진다.

$$\xi^B = \dot{\epsilon}^p - \|\dot{\epsilon}^p\| (d_1 \xi^g - d_2 \epsilon^p) \quad (56)$$

여기서,  $\|\dot{\epsilon}^p\| = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p\right)^{1/2}$ .  $d_1$ ,  $d_2$  는 상수이다.

우리의 주된 목적은 식 (55)를 사용하여 단결정의 거동으로부터 다결정의 거동을 예측하는 것이다. 각 단결정의 구성방정식은 앞부분에서 유도된 식이 사용된다. 정방향상변환에 대해서

$$\dot{f}_{s0} = \dot{f}_0 \left\langle \frac{R_s : \sigma - \tau_{AM}^0(T)}{\tau_0} \right\rangle^n \quad (57)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_{s=1}^N R_{sg} \dot{f}_0 \left\langle \frac{R_s : \sigma - \tau_{AM}^0(T)}{\tau_0} \right\rangle^n \quad (58)$$

다결정내의 단결정에서는 여러 개의 바리안트가 거동할 수 있고 이들 사이에는 간섭이 있을 수 있으나 여기서는 바리안트 사이의 간섭은 고려하지 않는다. 다결정의 온도가 균일하다고 가정하면 외경이  $r$  이고 두께  $e$  인 실린더 형상의 시편에 대한 열방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\rho \dot{T} = \frac{1}{100} \sum_{s=1}^{100} \left[ \sum_{i=1}^N F_s \dot{f}_s + W_s (1-2f) + \rho C^* T_0 \right] - \frac{2h}{e} (T - T_a) \quad (59)$$

다결정은 임의로 분포된 100 개의 단결정으로 구성되며 각 단결정은 1/100의 가중치를 갖는다고 가정한다.  $\dot{\Sigma}_{ij}$ 가 작용할 때 시간  $t$ 에서 각 단결정에서의  $\sigma$ ,  $T$ ,  $\epsilon^p$ ,  $\xi^p$ 는 아는 값이므로  $\dot{f}_{s0}$ 와  $\dot{\epsilon}^p$ ,  $\dot{T}$ ,  $\dot{\xi}^p$ 는 식 (57), (58), (59), (56)으로부터 구해지고  $\dot{E}^p$ 는 100 개의 단결정에 대한 부피평균으로 얻어진다.

$$\dot{E}^p = \langle \dot{\epsilon}^p \rangle = \frac{1}{100} \sum_{s=1}^{100} \dot{\epsilon}_s^p \quad (60)$$

글로벌 변형률의 탄성성분은  $E^e$ 는  $E^e = M : \Sigma$  으로부터 구해진다. 균질화법의 적용에서 고려하여야 할 사항중의 하나가 단결정의 이방성이다. CuZnAl 형상기억합금의 이방성계수는  $H = 2C_{44}/(C_{11} - C_{12}) = 14.8$  정도이다. 여기서  $C_{ij}$ 는 일반적으로 사용되는 Voigt 상수이다. CuZn(19.3 wt. %)Al(13 wt. %)에 대해 Guéniin이 측정 한 값은  $C_{11} = 130,000(\text{MPa})$ ,  $C_{12} = 118,400(\text{MPa})$ ,  $C_{44} = 86,000(\text{MPa})$ 이다. 성분이 우리의 단결정과 조금 다르지만  $C_{ij}$ 의 같은 값을 사용하여 등가등방성탄성계수(equivalent isotropic elastic constant)를 식 (61), (62)로 주어지는 Kröner의 식<sup>(26)</sup>을 사용하여 구하였다. 식 (61), (62)로 구한 등가등방성탄성계수는  $\mu = 34,430(\text{MPa})$ ,  $\nu = 0.371$ 이다.

$$K = (C_{11} + 2C_{12})/3 \quad (61)$$

$$8\mu^3 + (5_{11} + 4C_{12})\mu^2 - C_{44}(7C_{11} - 4C_{12})\mu - C_{44}(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) = 0 \quad (62)$$

단결정의 거동으로부터 균질화법에 의해 예측된 다결정의 초탄성거동은 Fig. 4~9와 같다. CuZn(25.63 wt. %)Al(4.3 wt. %) 다결정에 대한 시험은  $(T_a - M_s^0) = 16K$ 에서 Roguédá<sup>(27)</sup>가 수행한

Table 2 Identified values for the modeling

$b_0$ (MPa/K)	C (J/KG°C)	G	$M_s^0$ (K)	$A_s^0$ (K)
0.97	393	0.206	288.15	289.91
$d_1$	$d_2$	$b_3$ (MPa)	$T_a$ (K)	$\rho C^*$ (MJ/Km <sup>3</sup> )
600	45	$\mu/1000$	297.15	0.229

것이다. 시편은 속이 빈 실린더 형상으로 두께 2mm, 내경 20mm, 길이 115mm이다.  $\tau_{AM}^0(T)$ 의 초기값은  $\tau_{AM}^0(T_a) = b_0(T_a - M_s^0)$ 로부터 구해지고  $\tau_{MA}^0(T)$ 는  $\tau_{AM}^0(T) - \tau_{MA}^0(T) = \Delta\tau$ 에서 구해진다. 여기서  $\Delta\tau$ 는 단결정 B에서 측정된 값이다.  $T_0$ 는  $T_0 = M_s^0(T) + \Delta T$ 의 관계에서 구해지고  $\Delta T$ 는 단결정 B에서 측정된 값이 사용되었다.  $f_0$ ,  $n$ ,  $\tau_0$ 는 단결정에서 사용된 값과 동일한 값이 사용된다. 따라서 다결정의 시뮬레이션에 필요한 모든 변수들은 단결정의 시험결과에서 얻어진다.  $b_0$ ,  $\rho C^*$ ,  $W^s + D_0$ 의 값은 시편 B, C의 평균값이 사용되었다. 모델링에 사용된 계수들의 값은 Table 2와 같다.

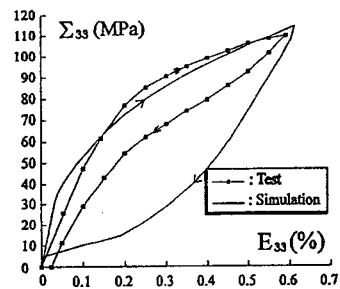


Fig. 4 Polycrystalline pseudoelastic in case of tensile loading

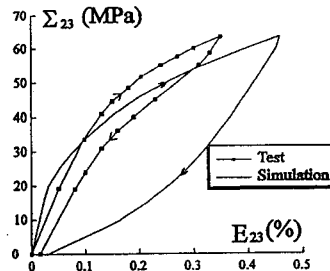


Fig. 5 Polycrystalline pseudoelastic behavior in case of torsional loading

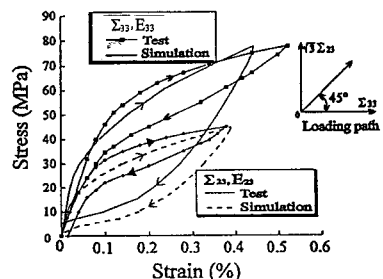


Fig. 6 Polycrystalline pseudoelastic behavior in case of proportional tensile and torsional loading



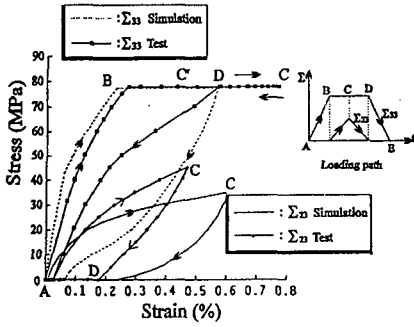


Fig. 7 Polycrystalline pseudoelastic behavior in case of unproportional tensile and torsional loading

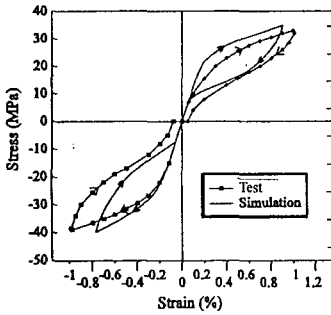


Fig. 8 Polycrystalline pseudoelastic behavior in case of tensile and compressive loading

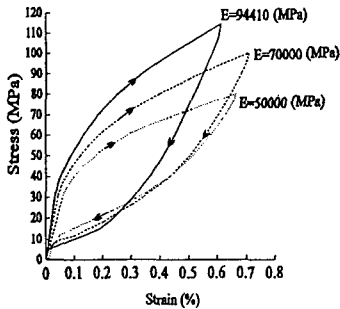


Fig. 9 Effect of elastic modulus on polycrystalline pseudoelastic behavior

Fig. 4는 인장응력이 작용하는 경우의 초탄성거동이고 Fig. 5는 비틀림 응력이 작용하는 경우의 초탄성거동이다. Fig. 4에서 온도상승은 0.46℃이고, Fig. 5에서는 0.66℃이다. Fig. 6은 일정한 비율인 인장과 비틀림 응력이 동시에 작용하는 경우이고 Fig. 7은 일정한 비율이 아닌 인장과 비틀림 응력이 동시에 작용하는 경우의 초탄성거동이다. 단결정의 초탄성거동에서 구한 파라메타와 균질화를 통하여 모델링한 다결정의 초탄성 거동은 실험결과와 유사함을 알 수 있다. Fig. 8은 압축과 인장

하중에서의 초탄성거동으로 실험결과와 같이 압축과 인장에서의 비대칭적인 초탄성거동을 잘 보여준다. 이 비대칭성은 마르텐사이트 상변환이 일정한 방향으로만 일어나기 때문이다. Fig. 9는 균질화에서 탄성계수의 변화가 초탄성거동에 미치는 영향을 보여준다. 동일한 스트레인에서 탄성계수가 클수록 응력이 큼을 알 수 있다.

## 7. 결론

단결정의 초탄성거동은 작용하중의 속도에 따라 크게 다르며 크리프 현상도 보여준다. 미시역학, 비가역열역학에 근거한 간단한 모델은 열방정식을 고려함으로써 이들 현상을 쉽게 설명할 수 있다. 미시역학적 접근은 단결정 마르텐사이트 변형의 리오리엔테이션 과정<sup>(28,29)</sup>과 양방향기억 효과<sup>(20)</sup>도 쉽게 모델링할 수 있다. 균질화법에 의해 단결정의 초탄성거동으로부터 얻어진 다결정의 거동은 복잡한 하중에서의 시험결과<sup>(27)</sup>를 모델링할 수 있는 가능성을 제공한다. 모델링에서 얻어진 히스테리시스가 시험 결과의 히스테리시스보다 약간 크다. 시험결과와 마찬가지로 모델링 결과에서도 인장과 압축에서의 초탄성 거동은 비대칭이다. 균질화에서 탄성계수의 영향이 매우 크므로 적절한 등가탄성계수를 사용하여야 함을 알 수 있다. 단결정에서는 해석결과와 실험결과가 유사하나 다결정의 초탄성 거동은 실험결과와 모델링 결과에 상당한 차이가 있다. 이 차이는 단결정 변형 사이의 간섭을 고려하지 않은 점과 해석에 사용된 재료상수  $C_{ij}$  값을 조성이 다른 재질에서 얻어진 실험값을 사용한 점 등, 여러 원인에 기인하는 것으로 판단된다.

## 참고문헌

- (1) Ericksen, J. L., 1975, "Equilibrium of Bars," *J. of Elasticity*, Vol. 5, pp. 191~201.
- (2) Falk, F., 1980, "Model Free Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloy," *Acta metall. mater.*, Vol. 28, 1773~1780.
- (3) Niezgodka, M. and Sprekels, J., 1988, "Existence of Solutions for a Mathematical Model of Structural Phase Transitions in Shape Memory Alloys," *J. Math. Methods in the Applied Sciences*, Vol. 10, pp. 197~223.
- (4) Müller, I. and Xu, H., 1991, "On the Pseudoelastic hysteresis," *Acta metall. mater.*, Vol. 39, pp. 263~271.
- (5) Abeyaratne, R. and Knowles, J. K., 1993, "A Continuum Model of a Thermoelastic Solid Capable of Undergoing Phase Transformation," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, pp. 541~571.
- (6) Bondaryev, E. N. and Wayman, C. M., 1988, "Some Stress-Strain-Temperature Relationships for Shape

- Memory Alloys," *Metall. Trans. A*, Vol. 19A, pp. 2407~2413.
- (7) Graesser, E. J. and Cozzarelli, F. A., "A Proposed Three Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys," *J. Intell. mater. Systems and Structures*, Vol. 5, pp. 78~89.
- (8) Raniecki, B. and Lexcellent, C., 1994, "R<sub>L</sub>-Models of Pseudoelasticity and Their Specification for Some Shape Memory Solids," *Euro. J. Mech. A/Solids*, Vol. 13, pp. 21~50.
- (9) Patoor, E., Eberhardt, A. and Berveiller, M., 1987, "Potential Pseudoélastique et Plasticité de Transformation Martensitique dans les Mono et Polycristaux Métalliques," *Acta metall. mater.*, Vol. 35, pp. 2779~2789.
- (10) Sun, Q. P. and Hwang, K. C., 1993, "Micromechanics Modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys-I. Derivation of General Relations," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, pp. 1~17.
- (11) Sun, Q. P. and Hwang, K. C., 1993, "Micro-mechanics Modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys-II. Study of the Individual Phenomena," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, pp. 19~33.
- (12) Leo, P. H., Shield, T. W. and Bruno, O. P., 1993, "Transient Heat Transfer Effects on the Pseudoelastic Behaviour of Shape Memory Wires," *Acta metall. mater.*, Vol. 41, pp. 2477~2485.
- (13) Wechsler, M. S., Lieberman, D. S. and Read, T. A., 1953, "On the Theory of the Formation of Martensite," *Trans. AIME*, Vol. 197, pp. 1503~1515.
- (14) Eshelby, J. D., 1957, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems," *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 241, pp. 376~396.
- (15) Mori, T. and Tanaka, K., 1973, "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions," *Acta metall. mater.*, Vol. 21, pp. 571~574.
- (16) Kröner, E., 1961, "Zur plastischen Verformung des Vielkristalls," *Acta metall. mater.*, Vol. 9, pp. 155~161.
- (17) Budiansky, B. and Wu, T. T., 1962, "Theoretical Prediction of Plastic Strains of Polycrystals," *Procd. 4th U.S. Nat. Cong. of Applied Mech.*, pp. 1175~1185.
- (18) Mura, T., 1987, *Micromechanics of defects in Solids*, 2nd ed. Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- (19) Lemaitre, J. and Chaboche, J. C., 1985, *Mécanique des Matériaux Solids*, ed. Dunod, Paris, pp. 58, 60, 69.
- (20) Goo, B. C. and Lexcellent, C., 1996, "Micro-mechanics-based Modeling of Two-way Memory Effect of a Single Crystalline Shape-Memory Alloy," *Acta metall. mater.* Vol. 21, pp. 727~737.
- (21) Pham, H., 1994, *Analyse Thermomécanique du Comportement d'un Alliage à Mémoire de Forme de Type CuZnAl*, Ph. D. Thesis, Université de Montpellier II, France, p. 91.
- (22) Hill, R., 1965, "Continuum Micro-mechanics of Elastoplastic Polycrystals," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 89~101.
- (23) Hutchinson, J. W., 1970, "Elastic-Plastic Behaviour of Polycrystalline Metals and Composites," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, Vol. 319, pp. 247~272.
- (24) Nemat-Nasser, S. and Obata, M., 1986, "Rate-dependent, Finite Elasto-Plastic Deformation of Polycrystals," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, Vol. 407, pp. 343~375.
- (25) Cailletaud, G. and Pilvin P., "Utilisation de modeles polycristallins pour le calcul par éléments finis," Vol. 3, No. 4, pp. 515~542.
- (26) Kröner, E. 1958, "Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls," *Zietschrift für Physik*, Dd. 151, pp. 504~518.
- (27) Roguédia-Berriet, C., 1993, "Modélisation Thermodynamique du Comportement Pseudoélastique des Alliages à Mémoire de Forme," *Ph. D. Thesis*, n° 336, Université de Franche-Comté, France, pp. 134.
- (28) Sun, Q. P., Goo, B. C. and Lexcellent, C., 1996, "Micromechanics-based Modeling of Reorientation Process of a Single Crystalline Shape-Memory Alloy," *SPIE's 1996 Symposium on Smart Structures and Materials*, 26-29 February 1996, San diego California, USA, pp. 2715~2746.
- (29) Goo, B. C., 1999, "Modeling of the reorientation behavior of a single crystalline shape-memory alloy by a micromechanical approach," *KSME International Journal*, Vol. 13, No. 2, pp. 175~182.