

이중레이스를 갖는 자동평형장치의 진동해석

이동진* · 정진태** · 황철호***

(1998년 5월 29일 접수)

Vibration Analysis of an Automatic Ball Balancer with Double Races

Dong-Jin Lee, Jintai Chung and Cheol-Ho Hwang

Key Words: Automatic Ball Balancer(자동불평형장치), Dynamic Balancing(동적 평형잡이), Perturbation Method(섭동법), Dynamic Stability(동적 안정성)

Abstract

Dynamic behaviors are analyzed for an automatic ball balancer with double races which is a device to reduce eccentricity of rotors. Equations of motion are derived by using the polar coordinate system instead of the rectangular coordinate system which is used in other previous researches. To analyze the stability around equilibrium positions, the perturbation method is used. On the other hand, the time responses are computed from the nonlinear equations of motion by using a time integration method.

1. 서론

자동평형장치는 자동차, 공작기계, 세탁기, 인공위성과 같이 가변적인 질량 불평형이 진동의 주된 원인이 되는 회전체에 대해 편심을 자동적으로 줄이는 장치이다. 편심량이 운전조건에 대해 일정한 회전체는 1회의 평형잡이(balancing)를 하면 되지만, 편심량이 사용조건에 따라 변하는 회전체에 대해서는 1회의 평형잡이로 소기의 성과를 얻을 수 없다. 따라서 이러한 가변적인 편심량을 갖는 회전체의 평형잡이를 위하여 자동평형장치의 동특성 연구가 필요하다. 그러나 자동평형장치의 넓은 응용분야에도 불구하고 작동원리, 동적해석 및 설계방향 제시가 매우 미미한 실정이다.

Thearle⁽¹⁾는 자동평형장치에 볼을 유체로 대체했을 때 평형잡이를 할 수 없음을 지적하였다. 그리고 Alexander⁽²⁾는 자동평형장치의 이론적 분석결과를 발표하였는데, 편심이 있는 회전체의 기동상태(startup)에서 초기 불평형이 자동평형장치의 볼에 의해서 감소됨을 보였다. 그러나 어떠한 원리로 자동평형장치가 자동적으로 평형상태에 도달하는지에 대한 분석을 제시하지 않았다. 그리고 Cade⁽³⁾는 자동평형장치의 작동조건을 제시하였는데, 역시 이에 대한 근거가 명확하지 않다. Lee와 Moorhem⁽⁴⁾은 자동평형장치의 작동원리를 해석적인 방법으로 설명하였다. 이 연구에서 직교좌표계를 이용하여 자동평형원리의 일부를 규명하였으나 통일적인 이론적 근거를 제시하지 못하였다. 이들은 자동평형장치의 중심점의 좌표를 직교좌표계로 표시하여 운동방정식을 유도하였기 때문에 모든 평형위치(equilibrium position)를 고려할 수 없었다. 또한 기존의 단일 레이스를 갖는 자동평형장치에서는 볼이 서로 충돌하는 상황이 발생할 수 있고, 볼이 서로 간섭하는 현상

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과
** 회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과
E-mail : jchung@email.hanyang.ac.kr
TEL : (0345)400-5289 FAX : (0345)400-5550
*** 한국표준과학연구원 연구원

이 일어나므로 이에 대한 대책이 필요하다.

본 연구에서는 이제껏 연구가 전무(全無)하였던 이중 레이스를 갖는 자동평형장치의 작동원리에 대한 이론정립, 이중 레이스를 갖는 자동평형장치의 동특성을 규명하였다. 이중 레이스를 갖는 자동평형장치는, 단일 레이스를 갖는 자동평형장치와 비교할 때, 볼이 서로 충돌하는 현상을 피함으로써 볼의 파손을 방지할 수 있고 볼의 간섭 현상을 피함으로써 더욱 정밀한 평형잡이를 할 수 있다. 이중 레이스를 갖는 평형장치를 해석하기 위해 기존의 직교좌표계를 이용하는 방법으로 인한 안정조건 도출의 한계를 극복하기 위해 직교좌표계 대신 극좌표계를 이용하여 얻어진 운동방정식을 무차원화시키고, 섭동법을 적용하여 평형위치와 평형위치 부근에서 선형화된 운동방정식을 구하였다. 그리고 고유치문제에 의해 각 평형위치에서 동적 안정성을 검증하고, 명시적 시간적분법을 이용하여 비선형 운동방정식으로부터 자동평형장치의 시간응답을 구해 동적거동을 분석하여 평형위치를 검증하였다.

2. 자동평형장치의 운동방정식

2.1 자동평형장치의 구조

자동평형장치는 Fig. 1과 같이 Jeffcott 로터에 내부와 외부 레이스를 파고 각 레이스 안에 여러 개의 볼들이 자유롭게 회전할 수 있는 구조를 하고 있다. Fig. 2와 같이 회전속도가 ω 인 회전체의 도심의 좌표를 r 과 θ 로 표시하고, 회전체 무게중심의 위치는 편심량 ϵ 과 X 축으로부터의 각도 ωt 로 나타낼 수 있다. 그리고 각 볼의 위치는 회전체의 도심과 무게중심을 잇는 직선을 기준으로 반시계방향으로 측정된 각도 ϕ_{i1} (단, $i=1, 2, \dots, p$, p 는 내부 레이스 볼의 개수), ϕ_{2j} (단, $j=1, 2, \dots, q$, q 는 외부 레이스 볼의 개수), 내부 레이스의 반경 R_1 , 외부 레이스의 반경 R_2 로 정의할 수 있다. 이와 같은 극좌표의 선정은 회전체의 도심을 직교좌표계의 X 와 Y 로 표현한 기존 연구자들의 한계를 극복할 수 있는 장점이 있다.

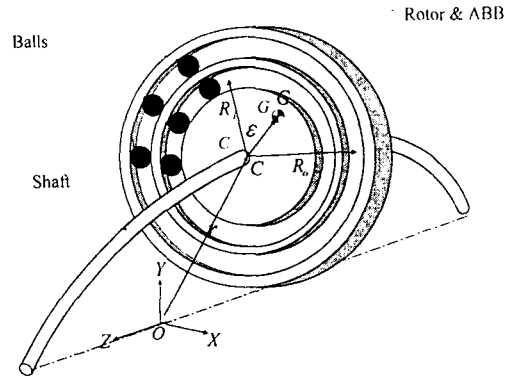


Fig. 1 Automatic ball balancer (ABB) with double races

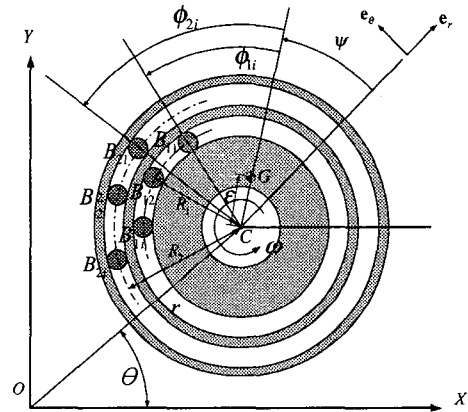


Fig. 2 Configuration of an automatic ball balancer with double races

2.2 운동방정식의 유도

운동방정식은 Lagrange 방정식으로 유도된다. 즉,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{nc} \quad (1)$$

여기서, T 는 운동에너지, U 는 위치에너지, Q_k^{nc} 는 일반화된 비보존력이며, 일반좌표 q_k 는 $r, \theta, \phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1p}, \phi_{21}, \phi_{22}, \dots, \phi_{2q}$ 을 나타낸다. 위의 Lagrange 방정식으로부터 $p+q+2$ 개의 서로 독립된 운동방정식을 얻을 수 있다. 운동방정식을 유도하기 위한 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_G = \{r + \epsilon \cos(\omega t - \theta)\} \mathbf{e}_r + \epsilon \sin(\omega t - \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{B_{1i}} = \{r + R_1 \cos(\phi_{1i} + \omega t - \theta)\} \mathbf{e}_r + R_1 \sin(\phi_{1i} + \omega t - \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (3)$$

($i = 1, 2, \dots, p$)

$$\mathbf{r}_{B_{2j}} = \{r + R_2 \cos(\phi_{2j} + \omega t - \theta)\} \mathbf{e}_r + R_2 \sin(\phi_{2j} + \omega t - \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (4)$$

($j = 1, 2, \dots, q$)

윗 식에서 \mathbf{r}_G 는 회전체의 무게중심에 대한 위치벡터를, $\mathbf{r}_{B_{1i}}$, $\mathbf{r}_{B_{2j}}$ 는 각 레이스 볼의 위치벡터를 나타낸다. 볼의 반경이 회전체의 반경에 비해 일반적으로 매우 작기 때문에 볼 중심에 대한 볼의 질량 관성모멘트를 무시하여 자동평형장치의 운동에너지를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= T_{rotor} + T_{balls} \\ &= \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m \dot{\mathbf{r}}_{B_{1i}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_{1i}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q m \dot{\mathbf{r}}_{B_{2j}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_{2j}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, I_G , M 그리고 m 은 각각 회전체의 무게중심에 대한 질량관성모멘트, 회전체와 볼들의 질량을 나타내며 T_{rotor} 는 회전체의 운동에너지, T_{balls} 는 볼들의 운동에너지를 나타낸다.

중력의 영향을 무시한 위치에너지는

$$U = \frac{1}{2} k r^2 \quad (6)$$

로 표시되는데, k 는 축계의 상당강성(equivalent stiffness)을 표시한다. 그리고 축계의 감쇠계수 c , 볼과 레이스의 미끄럼 마찰계수 μ , 레이스 안의 윤활유의 점성계수 D 를 고려한 비보존력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_r^{nc} &= -c \dot{r} \\ Q_\theta^{nc} &= -c r^2 \dot{\theta} \\ Q_{\phi_{1i}}^{nc} &= -D \dot{\phi}_{1i} - \mu R_1 N_i \text{sign}(\dot{\phi}_{1i}) \\ Q_{\phi_{2j}}^{nc} &= -D \dot{\phi}_{2j} - \mu R_2 N_j \text{sign}(\dot{\phi}_{2j}) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$\text{sign}(\dot{\phi}_{1i}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \dot{\phi}_{1i} > 0 \\ 0 & \text{if } \dot{\phi}_{1i} = 0 \\ -1 & \text{if } \dot{\phi}_{1i} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

N_i, N_j 는 볼과 각 레이스의 접촉점에서의 법선항력으로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_i &= m [R_1 (\dot{\phi}_{1i} + \omega)^2 \\ &\quad - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos(\phi_{1i} + \omega t - \theta) \\ &\quad - (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \sin(\phi_{1i} + \omega t - \theta)] \\ N_j &= m [R_2 (\dot{\phi}_{2j} + \omega)^2 \\ &\quad - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos(\phi_{2j} + \omega t - \theta) \\ &\quad - (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \sin(\phi_{2j} + \omega t - \theta)] \end{aligned} \quad (9)$$

식 (5)~(9)를 식 (1)에 대입하면 비선형 운동방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &(M + (p+q)m)(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + c \dot{r} + k r \\ &\quad - m R_1 \sum_{i=1}^p [\dot{\phi}_{1i} \sin(\phi_{1i} + \omega t - \theta) \\ &\quad + (\dot{\phi}_{1i} + \omega)^2 \cos(\phi_{1i} + \omega t - \theta)] \\ &\quad - m R_2 \sum_{j=1}^q [\dot{\phi}_{2j} \sin(\phi_{2j} + \omega t - \theta) \\ &\quad + (\dot{\phi}_{2j} + \omega)^2 \cos(\phi_{2j} + \omega t - \theta)] \\ &= M \epsilon \omega^2 \cos(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &(M + (p+q)m)(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) + c r \dot{\theta} \\ &\quad + m R_1 \sum_{i=1}^p [\ddot{\phi}_{1i} \cos(\phi_{1i} + \omega t - \theta) \\ &\quad - (\dot{\phi}_{1i} + \omega)^2 \sin(\phi_{1i} + \omega t - \theta)] \\ &\quad + m R_2 \sum_{j=1}^q [\ddot{\phi}_{2j} \cos(\phi_{2j} + \omega t - \theta) \\ &\quad - (\dot{\phi}_{2j} + \omega)^2 \sin(\phi_{2j} + \omega t - \theta)] \\ &= M \epsilon \omega^2 \sin(\omega t - \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& mR_1^2 \ddot{\phi}_{1i} + D\dot{\phi}_{1i} + mR_1(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\phi_{1i} \\
& + \omega t - \theta) + mR_1(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\sin(\phi_{1i} \\
& + \omega t - \theta) + \text{sign}(\dot{\phi}_{1i})\mu R_1[R(\dot{\phi}_{1i} + \omega)^2 \\
& + (r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\cos(\phi_{1i} + \omega t - \theta) - (r\ddot{\theta} \\
& + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin(\phi_{1i} + \omega t - \theta)] = 0 \quad (12) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& mR_2^2 \ddot{\phi}_{2j} + D\dot{\phi}_{2j} + mR_2(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\phi_{2j} \\
& + \omega t - \theta) + mR_2(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\sin(\phi_{2j} \\
& + \omega t - \theta) + \text{sign}(\dot{\phi}_{2j})\mu R_2[R(\dot{\phi}_{2j} + \omega)^2 \\
& + (r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\cos(\phi_{2j} + \omega t - \theta) - (r\ddot{\theta} \\
& + 2\dot{r}\dot{\theta})\sin(\phi_{2j} + \omega t - \theta)] = 0 \quad (13) \\
& \quad (j = 1, 2, \dots, q)
\end{aligned}$$

해석을 용이하게 하기 위함과 동시에 섭동법을 적용하기 위해서, 위에서 주어진 운동방정식을 무차원화시킨다. 즉, $\tilde{r} = r/R_2$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/R_2$, $\tilde{m} = m/M$, $\tilde{t} = \omega_n t$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_n$, $\tilde{R} = R_1/R_2$ 의 무차원 수를 도입하면 식 (10)~(13)의 운동방정식은 다음의 식 (14)~(17)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (1 + n\tilde{m})(\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r}\tilde{\omega}^2) + 2\zeta\dot{\tilde{r}} + \tilde{r} \\
& - \tilde{m}' \sum_{i=1}^p [\ddot{\phi}_{1i} \sin(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& + (\dot{\phi}_{1i} + \tilde{\omega})^2 \cos(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] \\
& - \tilde{m} \sum_{j=1}^q [\ddot{\phi}_{2j} \sin(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& + (\dot{\phi}_{2j} + \tilde{\omega})^2 \cos(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] \\
& = \tilde{\varepsilon} \tilde{\omega}^2 \cos(\tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + n\tilde{m})(\tilde{r}\tilde{\omega} + 2\dot{\tilde{r}}\dot{\theta}) + 2\zeta\dot{\tilde{r}}\dot{\theta} \\
& + \tilde{m}' \sum_{i=1}^p [\ddot{\phi}_{1i} \cos(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& - (\dot{\phi}_{1i} + \tilde{\omega})^2 \sin(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] \\
& + \tilde{m} \sum_{j=1}^q [\ddot{\phi}_{2j} \cos(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& - (\dot{\phi}_{2j} + \tilde{\omega})^2 \sin(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] \\
& = \tilde{\varepsilon} \tilde{\omega}^2 \sin(\tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{m}' \ddot{\phi}_{1i} + \tilde{m}(2\dot{\tilde{r}}\dot{\theta} + \tilde{r}\ddot{\theta})\cos(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} \\
& - \theta) + \tilde{m}(\tilde{r}\dot{\theta}^2 - \ddot{\tilde{r}})\sin(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& + \beta\dot{\phi}_{1i} + \tilde{m}\mu\text{sign}(\dot{\phi}_{1i})[(\dot{\phi}_{1i} + \tilde{\omega})^2 \\
& + (\tilde{r}\dot{\theta}^2 - \ddot{\tilde{r}})\cos(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) - (\tilde{r}\ddot{\theta} \\
& + 2\dot{\tilde{r}}\dot{\theta})\sin(\phi_{1i} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] = 0 \quad (16) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{m} \ddot{\phi}_{2j} + \tilde{m}(2\dot{\tilde{r}}\dot{\theta} + \tilde{r}\ddot{\theta})\cos(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} \\
& - \theta) + \tilde{m}(\tilde{r}\dot{\theta}^2 - \ddot{\tilde{r}})\sin(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) \\
& + \beta\dot{\phi}_{2j} + \tilde{m}\mu\text{sign}(\dot{\phi}_{2j})[(\dot{\phi}_{2j} + \tilde{\omega})^2 \\
& + (\tilde{r}\dot{\theta}^2 - \ddot{\tilde{r}})\cos(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta) - (\tilde{r}\ddot{\theta} \\
& + 2\dot{\tilde{r}}\dot{\theta})\sin(\phi_{2j} + \tilde{\omega}\tilde{t} - \theta)] = 0 \quad (17) \\
& \quad (j = 1, 2, \dots, q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{여기서, } n = p + q, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}, \\
& \beta = \frac{D}{m\omega_n R_2^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\tilde{R}}, \quad \tilde{m}' = \tilde{m}\tilde{R}
\end{aligned}$$

3. 섭동법에 의한 평형위치 결정 및 선형화된 섭동방정식 유도

3.1 섭동법(Perturbation Method)의 도입

위에서 유도한 운동방정식은 비선형 운동방정식이다. 그러므로 섭동법을 적용하여 자동평형장치의 평형위치를 찾고 안정성을 해석하기 위하여 선형화된 섭동방정식을 유도한다. 평형위치 부근에서의 선형화된 운동방정식을 얻기 위하여 $\omega t - \theta$ 를 ψ 로 정의한다 즉,

$$\theta = \omega t - \psi \quad (18)$$

θ 는 시간에 따라 단조 증가함으로 평형위치가 있을 수 없다. 그러나 $\omega t - \theta$ 즉 ψ 는 주어진 각속도 ω 에 대하여 결정되는 평형위치를 갖는다. 따라서 식 (18)을 무차원화된 운동방정식 (14), (15), (16), (17)에 각각 대입하여 운동방정식을 \tilde{r} , ψ , ϕ_{11} , $\phi_{12}, \dots, \phi_{1p}$, ϕ_{21} , $\phi_{22}, \dots, \phi_{2q}$ 으로 표현하고 섭동법을 적용한다. 즉,

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= \tilde{r}_0 + \delta \tilde{r}_1 + O(\delta^2) \\
\psi &= \psi_0 + \delta \psi_1 + O(\delta^2) \\
\phi_{1i} &= \phi_{01i} + \delta \phi_{11i} + O(\delta^2) \\
\phi_{2j} &= \phi_{02j} + \delta \phi_{12j} + O(\delta^2)
\end{aligned} \quad (19)$$

여기서 δ 는 매우 작은 양을 나타내는 인수이

며, \tilde{r}_0 , ϕ_0 , ϕ_{01i} , ϕ_{02j} 는 평형위치를 나타낸다. 식 (19)를 무차원 운동방정식에 대입하여 δ 에 관하여 정리하면 평형위치에 관한 방정식과 평형위치에서 선형화된 섭동방정식을 얻게 된다. 단, 불과 레이스간의 마찰력에 의한 성분은 무시하였다. 평형위치를 나타내는 관계식은 다음과 같다.

$$[1 - (1 + n\tilde{m})\tilde{\omega}^2] \tilde{r}_0 - \tilde{m}'\tilde{\omega}^2 \sum_{i=1}^n \cos(\phi_{01i} + \phi_0) - \tilde{m}\tilde{\omega}^2 \sum_{j=1}^n \cos(\phi_{02j} + \phi_0) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2 \cos \phi_0 \quad (20)$$

$$2\zeta \tilde{r}_0 \tilde{\omega} - \tilde{m}'\tilde{\omega}^2 \sum_{i=1}^n \sin(\phi_{01i} + \phi_0) - \tilde{m}\tilde{\omega}^2 \sum_{j=1}^n \sin(\phi_{02j} + \phi_0) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2 \sin \phi_0 \quad (21)$$

$$\tilde{m}\tilde{r}_0\tilde{\omega}^2 \sin(\phi_{01i} + \phi_0) = 0 \quad (22)$$

$$\tilde{m}\tilde{r}_0\tilde{\omega}^2 \sin(\phi_{02j} + \phi_0) = 0 \quad (23)$$

그리고 섭동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$(1 + n\tilde{m})(\tilde{r}_1 + 2\zeta \tilde{r}_0 \tilde{\omega} \dot{\phi}_1 - \tilde{r}_1 \tilde{\omega}^2) + 2\zeta \dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{r}_1 - \tilde{m}' \sum_{i=1}^n [\dot{\phi}_{11i} \sin(\phi_{01i} + \phi_0) + 2\tilde{\omega} \dot{\phi}_{11i} \cos(\phi_{01i} + \phi_0) - \tilde{\omega}^2(\phi_{11i} + \phi_1) \sin(\phi_{01i} + \phi_0)] - \tilde{m} \sum_{j=1}^n [\dot{\phi}_{12j} \sin(\phi_{02j} + \phi_0) + 2\tilde{\omega} \dot{\phi}_{12j} \cos(\phi_{02j} + \phi_0) - \tilde{\omega}^2(\phi_{12j} + \phi_1) \sin(\phi_{02j} + \phi_0)] = -\tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2 \dot{\phi}_1 \sin \phi_0 \quad (24)$$

$$(1 + n\tilde{m})(2\tilde{\omega} \dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{r}_0 \ddot{\phi}_1) + 2\zeta(\tilde{r}_1 \tilde{\omega} - \tilde{r}_0 \dot{\phi}_1) - \tilde{m}' \sum_{i=1}^n [\ddot{\phi}_{11i} \cos(\phi_{01i} + \phi_0) - 2\tilde{\omega} \dot{\phi}_{11i} \sin(\phi_{01i} + \phi_0) + \dot{\phi}_0 - \tilde{\omega}^2(\phi_{11i} + \phi_1) \cos(\phi_{01i} + \phi_0)] - \tilde{m} \sum_{j=1}^n [\ddot{\phi}_{12j} \cos(\phi_{02j} + \phi_0) - 2\tilde{\omega} \dot{\phi}_{12j} \sin(\phi_{02j} + \phi_0) + \dot{\phi}_0 - \tilde{\omega}^2(\phi_{12j} + \phi_1) \cos(\phi_{02j} + \phi_0)] = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2 \dot{\phi}_1 \cos \phi_0 \quad (25)$$

$$\tilde{m}' \ddot{\phi}_{11i} + \tilde{m}\beta \ddot{\phi}_{11i} + \tilde{m}[2\tilde{\omega} \dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{r}_0 \ddot{\phi}_1 + \tilde{r}_0 \tilde{\omega}^2(\phi_{11i} + \phi_1)] \cos(\phi_{01i} + \phi_0) + \tilde{m}(\tilde{r}_1 \tilde{\omega}^2 - 2\tilde{r}_0 \tilde{\omega} \dot{\phi}_1 - \tilde{r}_1) \sin(\phi_{01i} + \phi_0) = 0 \quad (26)$$

$$\tilde{m} \ddot{\phi}_{12j} + \tilde{m}\beta \ddot{\phi}_{12j} + \tilde{m}[2\tilde{\omega} \dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{r}_0 \ddot{\phi}_1 + \tilde{r}_0 \tilde{\omega}^2(\phi_{12j} + \phi_1)] \cos(\phi_{02j} + \phi_0) + \tilde{m}(\tilde{r}_1 \tilde{\omega}^2 - 2\tilde{r}_0 \tilde{\omega} \dot{\phi}_1 - \tilde{r}_1) \sin(\phi_{02j} + \phi_0) = 0 \quad (27)$$

3.2 평형위치

평형위치를 만족하는 조건은 $\tilde{r}_0 = 0$ 과 $\sin(\phi_{01i} + \phi_0) = 0$ 동시에 $\sin(\phi_{02j} + \phi_0) = 0$ 인 두 가지로 구분한다. 먼저 $\sin(\phi_{01i} + \phi_0) = 0$ 와 $\sin(\phi_{02j} + \phi_0) = 0$ 인 경우의 평형위치는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{r}_0 = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}{A_1} \quad (28)$$

$$\phi_0 = \sin^{-1} \left(\frac{2\zeta \tilde{r}_0 \tilde{\omega}}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\omega}^2} \right) \quad (29)$$

$$\phi_{01i} = \phi_{02j} = s\pi - \phi_0 \quad s = 0, 1, \dots \quad (30)$$

여기서,

$$A_1 = [1 - (1 + n\tilde{m})\tilde{\omega}^2]^2 + (2\zeta \tilde{\omega})^2 \quad (31)$$

$$B_1 = (p\tilde{R} + q)[1 - (1 + n\tilde{m})\tilde{\omega}^2] \tilde{m}\tilde{\omega}^2 \quad (32)$$

$$C_1 = [(p\tilde{R} + q)^2 \tilde{m}^2 - \tilde{\varepsilon}^2] \tilde{\omega}^4 \quad (33)$$

그리고 $\tilde{r}_0 = 0$ 인 경우의 평형위치는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{r}_0 = 0 \quad (34)$$

$$\tilde{\varepsilon} + \tilde{m}' \sum_{i=1}^n \cos \phi_{01i} + \tilde{m} \sum_{j=1}^n \cos \phi_{02j} = 0 \quad (35)$$

$$\tilde{m}' \sum_{i=1}^n \sin \phi_{01i} + \tilde{m} \sum_{j=1}^n \sin \phi_{02j} = 0 \quad (36)$$

4. 평형위치에서의 안정성 해석

4.1 고유치 문제의 특성 방정식 구성

섭동법으로부터 얻어진 평형위치에서의 선형화된 운동방정식은 계수가 상수인, 전형적인 고유치 문제 방정식이 된다. 즉,

$$m \ddot{\mathbf{x}} + c \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (37)$$

여기서, $\mathbf{m}, \mathbf{c}, \mathbf{k}$ 는 $(p+q+2) \times (p+q+2)$ 행렬이고, $\mathbf{x} = \{ \tilde{r}_1, \Psi_1, \phi_{111}, \phi_{112}, \dots, \phi_{11p}, \phi_{121}, \phi_{122}, \dots, \phi_{12q} \}^T$ 이다. 안정성 조사에 용이한 형태인 상태벡터(state vector)를 도입하여 식 (37)을 다시 정리하면,

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \mathbf{y} \quad (38)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (39)$$

상태벡터를 표준형으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{S} \mathbf{y} \quad (40)$$

여기서,

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (41)$$

\mathbf{S} 는 $(p+q+2) \times (p+q+2)$ 의 행렬이며, 벡터 \mathbf{y} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{y} = \{ \tilde{r}_1, \Psi_1, \phi_{111}, \dots, \phi_{11p}, \phi_{121}, \dots, \phi_{12q}, \tilde{r}_1, \Psi_1, \phi_{111}, \dots, \phi_{11p}, \phi_{121}, \dots, \phi_{12q} \}^T \quad (42)$$

식 (37)의 특성방정식에서 고유치 문제를 풀어

고유치의 실수부가 음수값을 가지면 이 시스템은 안정하고, 양수값을 가지면 불안정하게 된다. 전술된 평형위치는 두가지 경우가 존재하므로 각각의 평형위치를 섭동방정식에 대입하여 안정성을 검토한다.

전술한 두가지 평형위치 중 $\tilde{r}_0=0$ 의 평형위치인 경우, \mathbf{A} 행렬이 계수결핍현상(rank deficiency) 을 가지므로 식 (37)에 의한 행렬 벡터 형태의 방정식에 의해 고유치를 구할 수가 없다. 이러한 현상을 나타내는 이유는 $\tilde{r}_0=0$ 평형위치에서는 Ψ_0 가 부정(不定)이기 때문이라고 생각된다. 그러므로 $\tilde{r}_0=0$ 의 평형위치인 경우, 고유치를 구하기 위해서는 섭동방정식에 $\tilde{r}_1 = R e^{st}, \Psi_1 = \Psi e^{st}, \phi_{11i} = \Phi_{1i} e^{st}, \phi_{12j} = \Phi_{2j} e^{st}$ 을 대입하여 특성방정식을 유도한 다음 고유치를 구한다. 특성방정식은 불이 각 레이스에 1 개씩인 경우 다음과 같이 λ 에 대한 8 차식으로 표현된다.

$$C_8 \lambda^8 + C_7 \lambda^7 + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0 \quad (43)$$

4.2 평형위치에서 안정성 조사

평형위치가 $\tilde{r} \neq 0$ 인 경우, 평형위치를 식 (37)에 대입하여 안정성을 조사한다. 이 경우는 \mathbf{A} 행렬이 특이해를 가지지 않으므로 행렬 벡터 형태의 고유치 문제로 계산된다. Fig. 3 과 Fig. 4는 $\tilde{r} \neq 0$ 인 경우 설계인자에 따른 안정성 구역을 나타낸 그래프이다. 이 경우 Fig. 3에서 나타나듯이 자동평형장치의 회전속도가 위험속도 이하에서 주로 안정하다. 그러나 위험속도 이하에서도 볼의 질량이 증가함에 따라 안정성을 만족하지 못하는 구역이 존재한다.

Fig. 4는 위험속도 이하의 운전속도 ($\tilde{\omega} = 0.6$)에서 무차원 볼의 질량과 무차원 편심량을 변수로 하여 안정구역을 나타낸 그래프이다. 볼의 질량이 증가함에 따라 불안정한 구역이 증가함을 보여주지만, 단열 레이스를 갖는 평형장치⁽⁶⁾에 비해 안정구간이 넓어졌음을 알 수 있다.

$\tilde{r}=0$ 인 경우의 평형위치에서 설계인자 변화에 대한 안정성 구역을 Fig. 5 와 Fig. 6에 나타내

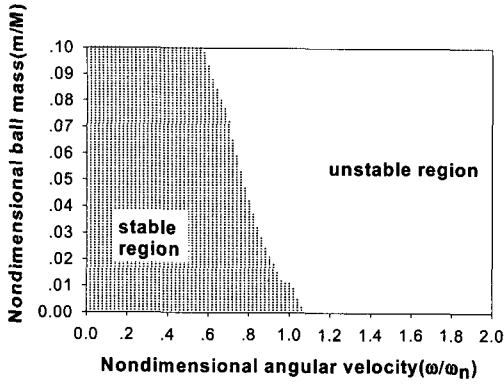


Fig. 3 Stable region for $\tilde{\epsilon}=0.02$ in case of $\tilde{r} \neq 0$

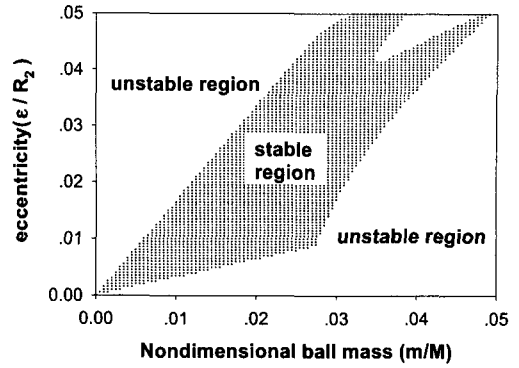


Fig. 6 Stable region for $\tilde{\omega}=1.6$ in case of $\tilde{r}=0$

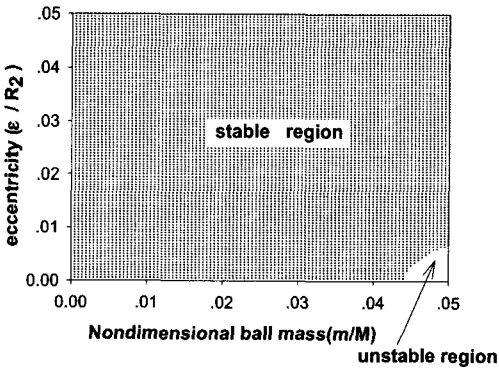


Fig. 4 Stable region for $\tilde{\omega}=0.6$ in case of $\tilde{r} \neq 0$

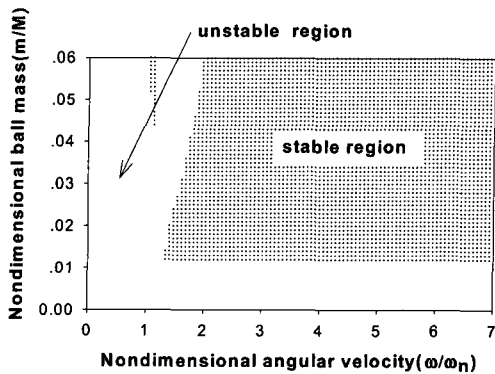


Fig. 5 Stable region for $\tilde{\epsilon}=0.02$ in case of $\tilde{r}=0$

었다. Fig. 5는 시스템의 무차원 회전속도와 무차원 볼의 질량을 변수로 취하여 안정성 구역을 나타낸 것이다. 시스템의 회전속도가 위험속도 이상에서 안정성을 확보하는 경향을 주로 보이지만 볼의 질량과 관계하여 안정성을 확보하지 못하는 구역도 존재한다. Fig. 6은 무차원 볼의 질량과 무차원 편심량을 변수로 하여 안정성 구역을 표시하였다.

볼의 질량은 편심량을 보상하여 진동을 소거하기 위하여 다음 식을 만족하여야 한다.

$$(p+q)\tilde{m} > \tilde{\epsilon} \quad (44)$$

그러나 위의 식을 만족하는 구간에도 안정성을 확보하지 못하는 구역이 존재한다. 이는 Fig. 3에서 나타난 바와 같이 볼 질량과 회전체의 회전수와의 관계로 인한 영향이라 생각된다.

두 경우의 평형위치 중 실제 산업현장에서 필요한 평형위치는 $\tilde{r}=0$ 인 평형위치 즉, 편심에 의한 불평형 진동을 소거해 주는 평형위치이다.

$\tilde{r}=0$ 인 평형위치를 만족하는 조건은 회전시스템의 회전속도가 거의 위험속도 이상이어야 하며, 무차원 볼의 질량의 합이 무차원 편심량 이상일 때의 조건이다. 그러나 Fig. 5와 Fig. 6에서 나타나듯이 위의 조건을 만족하는 경우에도 볼의 질량에 따라 안정하지 못한 구역이 존재하므로 이를 고려하여 설계를 해야만 한다. 그리고 위험속도 이하의 회전속도에서는 \tilde{r} 가 0으로 수렴하지 않으므로 잔류진동이 생긴다. 즉, 위험속도

Table 1 Material property and dimensions of an ABB with double races

M	0.0398 Kg	R_1	9.6625e-3 m
k	6638.26 N/m	R_2	14.6625e-3 m
C	1.30715e-4 Kg/s	ϵ	2.51256e-4 m
m	1.30715e-4 Kg	D	0.000005 Kg/s
p	1	μ	0
q	1		

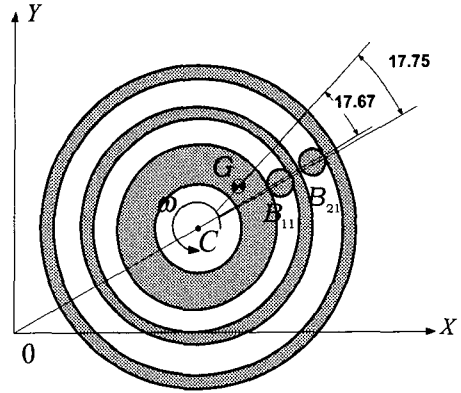


Fig. 9 Ball positions on the rotor when $\tilde{\omega} = 0.6$

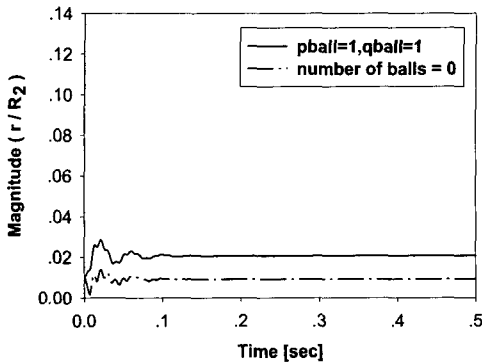


Fig. 7 Magnitude of \tilde{r} for $\tilde{\omega} = 0.6$, $R_1/R_2 = 0.634$ and $\tilde{\epsilon} = 0.0163$

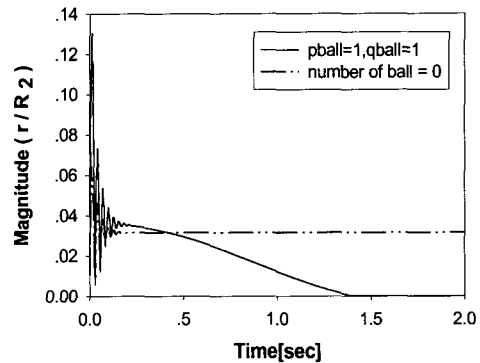


Fig. 10 Magnitude of \tilde{r} for $\tilde{\omega} = 1.6$

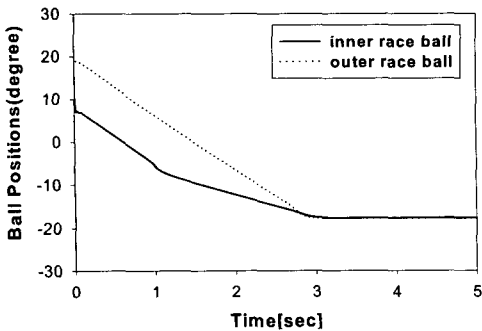


Fig. 8 Ball positions for $\tilde{\omega} = 0.6$, $R_1/R_2 = 0.634$ and $\tilde{\epsilon} = 0.0163$

이하의 회전속도에서는 자동평형장치가 회전시스템의 편심에 의한 진동을 소거하지 못한다.

5. 시간응답 계산 및 평형위치 검증

자동평형장치의 동특성을 분석하고 평형위치를

검증하기 위해 무차원 운동방정식으로부터 시간응답을 계산한다. 시간응답은 Chung에 의해 개발된 시간적분법⁽⁵⁾을 이용하여 구하였다. 시간응답에 사용되는 물성치는 Table 1의 값을 적용했다.

5.1 시간응답 계산 및 평형위치 검증

시간응답 프로그램에 의해 자동평형장치의 시간응답 계산시 볼의 개수는 각 레이스당 1개씩 2개로, 볼의 동마찰 계수는 0으로 대입하여 계산하였다. 이때 사용한 $\tilde{R} = 0.634$ 이다.

$\tilde{r} \neq 0$ 의 안정영역을 만족하는 경우 시간응답은 시간이 경과함에 따라 \tilde{r} 는 Fig. 7에서 보는 바와 같이 0이 아닌 일정한 값으로 수렴한다. 이 경우 자동평형장치를 사용하지 않았을 경우보다 더 큰 진동을 발생시킨다. 볼의 위치는 Fig. 8과 같이 수렴한다.

Fig. 9는 디스크와 볼의 위치를 나타낸다. 이

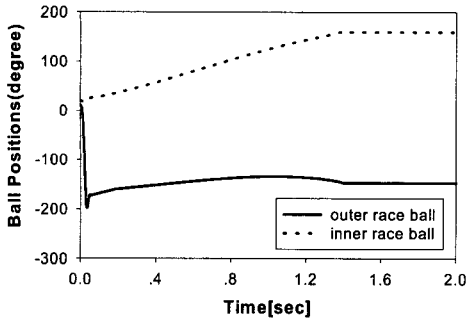


Fig. 11 Ball positions for $\tilde{\omega} = 1.6$

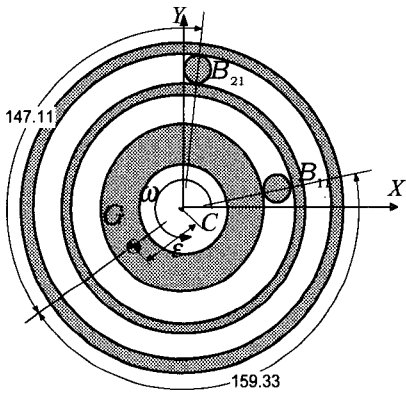


Fig. 12 Ball positions on the rotor when $\tilde{\omega} = 1.6$

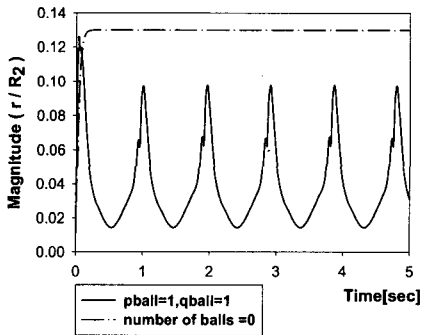


Fig. 13 Magnitude of for $\tilde{\omega} = 1.0$

때 볼은 질량중심 동일방향에 위치하여 편심을 보상하지 못하고 오히려 가중시켜 더 큰 진동을 발생시킨다. 시간응답 프로그램에서 계산된 수렴치는 $\tilde{r} \neq 0$ 인 경우의 평형위치와 일치한다. 그러므로 이런 경우 자동평형장치는 진동을 완전히 제거하지 못하고 잔류진동을 유발시킨다.

$\tilde{r} = 0$ 인 안정영역을 만족하는 경우 시간응답을 계산하면 Fig. 10 과 같이 나타난다. 이 경우

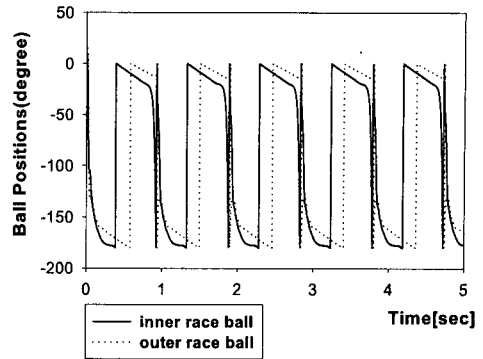


Fig. 14 Ball positions for $\tilde{\omega} = 1.0$

시간이 경과함에 따라 \tilde{r} 가 0으로 수렴하여 완전히 진동이 제거됨을 알 수 있고 단일 레이스를 가진 자동평형장치⁽⁶⁾에 비해 회전 속도가 위험속도 이하일 때의 시간응답이 작아졌음을 알 수 있다.

자동평형장치를 부착하지 않은 경우는 질량편심에 의해 진동이 계속 존재한다. 그리고 그 때의 볼 위치는 Fig. 11과 같다.

Fig. 12는 이때 디스크와 볼의 위치를 나타낸 그림이다. 볼의 위치는 디스크의 질량중심 반대방향에 위치하여 기하학적으로 편심량을 보상하며 회전하고 있음을 알 수 있다. 시간응답 프로그램에 의해 계산된 수렴치는 $\tilde{r} = 0$ 인 경우의 평형위치와 일치한다.

위험속도부근의 회전속도에서 \tilde{r} 는 Fig. 13에서와 같이 주기적으로 증감하며, 이때 볼은 Fig. 14 같이 계속 회전하고 있음을 알 수 있다. 자동평형장치가 부착되지 않은 경우 \tilde{r} 는 Fig. 13와 같다.

6. 결론

본 연구에서 극좌표계를 이용하여 이중 레이스를 가진 자동평형장치의 동특성을 분석하기 위해서 극좌표계를 이용하여 지배방정식을 유도하였다. 그 결과 이중 레이스를 가진 자동평형장치는 두 경우의 평형위치를 갖는 사실을 밝힘으로써 기존의 직교좌표계를 이용한 해석의 한계를 극복하였으며, 그 안정조건은 회전체의 회전속도와 볼의 질량과 밀접한 관계를 가지고 있음을 확인

하였다. 또한 이중레이스에 볼을 1개씩 레이스에 넣고 해석한 결과로부터 한 개의 레이스에 2개의 볼을 넣고 해석할 때 보다 적절한 레이스 반경비가 주어진다면 같은 조건하의 자동평형장치일지라도 이중 레이스 자동평형장치의 성능이 더 뛰어난 것을 확인할 수 있었다. 해석상에서 회전시 볼 사이의 충돌문제를 배제할 수 있다는 것도 이점으로 작용하였다.

편심된 회전체에 의한 로터의 진동을 소거하기 위하여 자동평형장치를 이용하지만, 안정성 조사에서 언급된 바와 같이 설계요소의 값들을 잘못 적용한 경우 치명적인 악영향을 야기시킬 수 있다. 그러므로 자동평형장치의 설계시 설계요소 값들은 본 연구에서 제시한 안정성 구역에 포함되는 값들을 적용해야 한다.

참고문헌

- (1) Thearle, E. L., 1932, "A New Type of Dynamic Balancing Machine," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 131~141.
- (2) Alexander, J. D., 1964, "An Automatic Dynamic Balancer," *Proceeding, 2nd South - eastern Conference*, pp.415~426.
- (3) Cade, J. W., 1965, "Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms," *Design News*, pp. 234~239.
- (4) Lee, J. and Van Moorhem, W. K., 1996, "Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism," *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, Vol. 118, pp. 468~475.
- (5) Chung, J. and Lee, J. M., 1994, "A New Family of Explicit Time Integration Methods for Linear and Non-linear Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp. 3961~3976.
- (6) Junmin Park, Dae-sung Ro, and Jintai Chung, 1999, "Vibration Analysis of an Automatic Ball Balancer," *KSNVE*, Vol. 9, pp. 363~370.