

## 웨이블릿을 이용한 보의 결함진단

김 윤 영\* · 김 응 훈\*\*  
(1999년 6월 4일 접수)

### Damage Detection in a Beam by the Wavelet Transform

Yoon Young Kim and Eung Hun Kim

**Key Words:** Damage Detection(결함진단), Wavelet(웨이블릿), Wave Propagation(파동전파) Dispersion Relation(분산관계)

#### Abstract

This paper presents a new wavelet-based structural diagnostic technique. A continuous Gabor wavelet transform is shown to a very effective method in detecting damage in a beam. The beam is excited by a broad-band excitation force. For satisfactory results, the selection of an optimal wavelet is very important though the wavelet transform outperforms existing techniques such as the Wigner-Ville distribution. A specific example is given in a solid circular cylinder with a small defect.

#### 1. 서 론

구조물의 결함진단은 결함의 크기나 종류에 따라 진단방법이나 가진 방법이 달라진다. 결함의 정도가 큰 경우에는 통상적인 진동신호분석방법(정재파동(standing wave)에 의한 주파수 응답함수 분석)을 사용할 수 있다. 그러나 결함의 크기가 매우 작은 경우에는 정재파동(standing wave)에 의한 분석을 적용하기 어렵기 때문에 초음파<sup>(1)</sup> 등과 같이 전파파동(propagating wave)를 이용하여 결함을 진단하게 된다.

현재 파동으로 구조물을 가진하는 방법 중 가장 많이 사용되는 방법은 피에조-재료를 이용한 가진 방법이며 통상적으로 구조물에 협대역 주파수대역을 갖는 파동을 가하게 된다. 이 방법은 결함의 크기에 맞게 원하는 주파수 대역을 선택할 수 있는 장점은 있지만, 가진하는 방법이 번

거울뿐 아니라, 많은 에너지가 필요한 구조물의 가진에는 적절하지 않는 등 문제점이 있다. 따라서 본 연구에서는 충격 등과 같은 광대역 신호로 구조물을 가진하면서도 비교적 작은 구조의 결함을 찾아내는 새로운 방법을 연구하였다.

광대역신호를 이용하여 진단을 하는데 있어서 가장 큰 문제가 되는 것은 모든 구조물에 나타나는 파동의 분산(dispersion)이라고 할 수 있다. 즉 어떤 신호가 전파됨에 따라 신호의 모양이 왜곡되는 현상으로 말미암아, 구조물에 가진된 신호가 결함을 만나 되돌아오는 신호는 구조물에 가한 신호와는 매우 상이한 형상을 갖게 된다.

광대역 가진을 하는 경우 결함에서 되돌아오는 신호와 초기 신호에 포함된 여러 주파수성분의 파형을 주파수별로 분석할 필요가 있다. 즉 신호의 시간-주파수 특성을 분석하지 않으면 결함의 위치는 고사하고, 결함의 유무도 파악할 수 없게 되므로, 구조물 내에서 전달되는 파도신호의 시간-주파수 분석 특성이 뛰어난 해석방법의 개발이 요구된다.

시간-주파수 분석방법에는 단시간푸리에변환(Short-time Fourier Transform), 위그너빌분포

\* 회원, 서울대학교 기계항공공학부, 정밀기계설계공동연구소

E-mail : yykim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

\*\* 서울대학교 웨이블릿응용 구조설계 및 진단 연구실

(Wigner-Ville Distribution)<sup>(2)</sup> 그리고 웨이블릿변환 (Wavelet Transform)<sup>(3)</sup> 등이 있다. 단시간푸리에 변환은 시간영역에서의 창(Window)의 크기가 항상 일정하기 때문에, 결함에서 되돌아오는 과도적인 신호를 분석하기 곤란하다. 즉 모든 시간영역에서 창의 크기가 같기 때문에 주파수의 고저에 무관하게 모든 주파수대역에서 같은 분해능을 갖는 특징으로 인하여 급격하게 변화하는 신호분석에는 별로 적합하지 않다. 위그너빌분포는 신호자체를 창으로 사용한 형태이기 때문에 단시간푸리에변환보다 순간주파수를 매우 잘 분석할 수 있다. 그러나, 신호의 간섭이 있는 경우, 즉 전파하는 신호와 반사하는 신호가 간섭이 있는 경우, 그 신호들을 제대로 분별해내기 어려운 문제점이 발생한다. Choi-William<sup>(4)</sup> 커널 등을 이용하면 이러한 간섭현상을 완화할 수 있으나, 시간-주파수 분해능이 저하되는 문제점이 있다.

웨이블릿변환은 새로운 시간-주파수 분석기법으로 짧은 시간의 급격한 변화를 분석하는데 탁월한 특징이 있다. 실제로 웨이블릿 변환에 사용될 수 있는 웨이블릿은 무수히 많지만, 1982년 Morlet가 처음 제안한 Morlet 웨이블릿<sup>(5)</sup>이 주로 사용되어 왔다.

Kishimoto, Inoue et al.<sup>(6,7)</sup> 등은 Morlet 웨이블릿을 이용하여 보에서의 분산곡선을 구한 바 있다. 그러나 Morlet 웨이블릿의 시간영역에서의 지지구간(support)이 그렇게 짧지 않기 때문에 광대역 가진을 이용한 결함의 진단에는 적합하지 않음을 예상할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 Morlet 웨이블릿의 일반적 형태인 Gabor 웨이블릿 중에서, 광대역 가진에 의한 결함진단을 효과적으로 할 수 있는 최적의 Gabor 웨이블릿을 제안하였다.

본 연구에서 제안하는 웨이블릿 구조진단의 타당성과 효용성을 검증하기 위해서 결함이 있는 황동-보를 대상으로 실험을 수행하였다. 계측신호는 스트레인게이지를 이용하여 검출하였다. 구조물은 가진방법이 가장 용이한 광대역 가진, 즉 구형 구슬을 이용한 충격 가진 방법에 의해 가진되었다. 이렇게 가진된 구조물의 특정 위치에서 얻어진 스트레인신호에 대해 본 연구에서 제안하는 새로운 진단 기법을 적용하여 그 타당

성을 검증하였다.

## 2. 신호의 시간-주파수 분석

### 2.1 위그너빌분포와 연속웨이블릿변환<sup>(8)</sup>

위그너빌 분포  $P_w f$ 는 분석하고자 하는 함수( $f$ ) 자신을 창함수로 사용하여 나타내는데 시간-주파수 에너지 밀도를 순간주파수 분석에 유용하게 사용된다.

$$P_w f(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + \frac{\tau}{2}) f^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-i\tau\xi} d\tau \quad (1)$$

여기서  $u$ 는 시간,  $\xi$ 는 주파수를 나타낸다.

만약 신호의 간섭이 없는 경우, 위그너빌분포는 다른 변환기법에 비해 일반적으로 신호의 순간주파수 분해 능력이 뛰어난 변환기법이다. 그러나, 이것은 음의 에너지 값이 나타날 수 있기 때문에 여러 신호가 혼재되어 있는 경우에는 교차항으로 인하여 심각한 간섭이 발생한다. 이 문제를 개선하기 위해 제안된 커널 중 대표적인 것은 Choi-William 커널<sup>(4)</sup>( $\theta(u, \xi)$ 로 표시함)로 이 커널에 의해 수정된 위그너빌분포  $P_{\theta} f(u, \xi)$ 는 다음과 같이 원래의 위그너빌분포와 이 커널의 콘볼루션(기호:  $*$ )으로 표현할 수 있다.

$$P_{\theta} f(u, \xi) = P_w f * \theta(u, \xi) \quad (2)$$

여기서  $\theta(u, \xi)$ 를  $(u, \xi)$ 에 대해 푸리에변환(변수  $\tau, \gamma$ )한 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{\theta}(\tau, \gamma) = e^{-\tau^2 \gamma^2 / \sigma} \quad (3)$$

웨이블릿변환(WF)에서는 어떠한 형태를 모-웨이블릿(Mother Wavelet)으로 사용하느냐 하는 것이 가장 중요한 문제이다. 만약 신호의 주파수 특성에 대한 분석이 필요하다면 연속 웨이블릿을 사용하는 것이 유리하다. 연속 웨이블릿변환에 사용되는 모-웨이블릿을  $\psi(t)$ 로 놓으면, WF는 모 웨이블릿을 스케일변수를 도입하여 확장과 이동으로 신호를 분석하는 방법이다. 이러한 특징으로 인하여 멀티스케일문제 해석에 매우 유용한 변환기법으로 WF의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Wf(u, s) &= \langle f, \psi_{u,s} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\psi_{u,s}(t)$ 는 모-웨이블렛을 시간축상에서  $u$ 만큼 이동하고, 크기를  $s$ 배만큼 증폭시킨 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (5)$$

여기서 모-웨이블렛은 최소한 다음의 조건을 만족시켜야한다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6)$$

## 2.2 Gabor 웨이블렛과 형상지수

시간-주파수 분석에 사용될 수 있는 웨이블렛 중 대표적인 것은 Morlet 웨이블렛과 복소 Shannon 웨이블렛(때로는 조화웨이블렛<sup>(9)</sup>이라고도 부름)이 있다. 이 중에서 Shannon 웨이블렛은 주파수 분해능이 Morlet 웨이블렛보다 우수하나 시간영역에서의 지지구간이 크기 때문에 결함의 진단 등과 같이 상당히 짧은 시간에 과도적으로 변화하는 신호의 분석에는 적합하지 않다. 따라서 본 연구에서는 시간과 주파수 영역에서의 Heisenberg 상자가 가장 작은 Gabor 웨이블렛(Morlet 웨이블렛은 Gabor 웨이블렛의 특수한 경우)을 사용하고자 한다.

Gabor 모-웨이블렛은 가우시안 함수를 변조한 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi(t) = e^{imt} g(t) \quad (7a)$$

$$g(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (7b)$$

이 Gabor 웨이블렛 함수  $\psi(t)$ 의 형상은  $\sigma$ 와  $\eta$ 의 값의 변화에 따라 변화하게 되는데, 주어진 신호를 분석하는데 가장 적합한  $\sigma$ 와  $\eta$ 를 선택해야만 한다.

본 연구에서는 최적의 Gabor 웨이블렛을 선택할 수 있도록 다음과 같이 Gabor 웨이블렛의 형상을 결정짓는 무차원 변수인 Gabor 형상지수 ( $G_s$ ) 개념을 도입하고자 한다.

$$G_s = \sigma \eta \quad (8)$$

따라서 본 연구에서는 진단문제에 있어서 최적의 웨이블렛의 설계가 얼마나 중요한지를 밝히고자 하며 아울러 Gabor 웨이블렛을 이용하는 경우에는 식 (8)의 Gabor 형상지수의 최적값을 결정하는 문제로 귀착됨을 제시하고자 한다.

만약 식 (8)의  $G_s$ 의 값이 커지게 되면, 주파수 분해능은 좋아지나, 시간에서의 분해능이 나빠짐을 예측할 수 있다. 반대로  $G_s$ 의 값이 매우 작아지면 Gabor 웨이블렛의 형상이 구조 내부에서 전파하는 파의 형상과는 매우 상이한 형태를 가지게 되므로, 효과적으로 진단을 수행할 수 없음을 예측할 수 있다. 참고로 Morlet 웨이블렛은  $G_s=5.0$ 인 경우에 해당된다.

## 2.3 Scalogram

스케일로그램(Scalogram)은 해석적 웨이블렛변환을 이용하여 국부적인 시간-주파수 에너지 강도를 표현하는 것인데, 기호  $P_w f(u, \xi)$ 를 이용하여 표시한다. 실제 그림을 그릴 때는 이것을 다음과 같이 정규화한 다음과 같은 정규 스케일로그램(Normalized Scalogram)을 사용하는 것이 일반적이다.

$$\frac{\xi}{\eta} P_w f(u, \xi) = \frac{|Wf(u, s)|^2}{s} \quad (\xi = \frac{\eta}{s} \text{ 일 때}) \quad (9)$$

이 경우의 능선(ridge), 즉  $P_w f(u, \xi)$ 가 극대점이 되는 곳(Modulus Maxima)에서는 다음의 조건이 성립되어 순간주파수에 대한 정보를 분석할 수 있다.

$$\frac{\eta}{s} = \xi(u) = f(t) \text{의 순간주파수}$$

## 3. 실험 검증 및 고찰

### 3.1 실험 장치

본 연구에서는 Fig. 1에 있는 것과 같이 원형-보가 양단 지지된 경우를 살펴보았다. 원형 보의 경우에는 그 분산식이 잘 알려져 있을뿐만 아니라, 가공도 간단한 장점이 있다. Inoue 등<sup>(7)</sup>은 결함이 없는 원형 보에서의 분산곡선을 Morlet 웨이블렛을 이용하여 구한 바 있으며, Newland<sup>(9)</sup>는

복소 Shannon 웨이블렛(Newland는 이것을 조화웨이블렛이라고 칭함)을 이용하여 사각단면을 갖는 보에서 분산곡선을 구한 바 있다. 그러나 본 연구에서처럼, 광대역 가진 기법을 이용하여 단 하나의 센서만으로 결함을 진단한 연구는 발표된 바 없을뿐만 아니라, Newland와 Inoue 등의 방법을 적용하기 곤란하다. 본 연구에서는 Gabor 웨이블렛변환을 이용하면 이러한 결함 진단이 가능하다는 것을 제시하고, 적절한 Gabor 웨이블렛형상을 선정해야만 만족스런 결과를 얻을 수 있음을 보이고자 한다.

실험에 사용된 원형 보는 황동으로 길이 1.5m 직경 2cm이며 쇠구슬(지름 2cm)을 약 50cm 높이에서 낙하시켜 광대역 가진을 하였다. (구슬과 보의 접촉시간은 약 85  $\mu$ s 임). Fig. 1에 나타난 것 같이 가진점은 A점(중앙)이고 측정점은 B, C, D(A점으로부터 각 10, 30, 50 cm 간격에 위치)이다. 동일 조건하에서 2가지의 실험을 하였는데, 결함이 없는 경우에는 B, C, D점의 3군데에서 신호를 측정하였으며, 결함이 있는 경우에는 B지점의 한 군데에서만 신호를 측정하였다. 결함의 위치는 C지점이며, 결함 폭은 약 1mm, 표면으로부터의 깊이가 약 5mm이다.

신호의 측정에 사용된 스트레인지계지는 MM사의 ED-DY-125AD-350이며, 스트레인 앰프는 MM사의 2311(DC-125kHz -3dB)이다. 이 신호를 AD 보드(Gage사의 CompuScope 512)를 이용하여 1  $\mu$ s 간격으로 샘플링하였다.

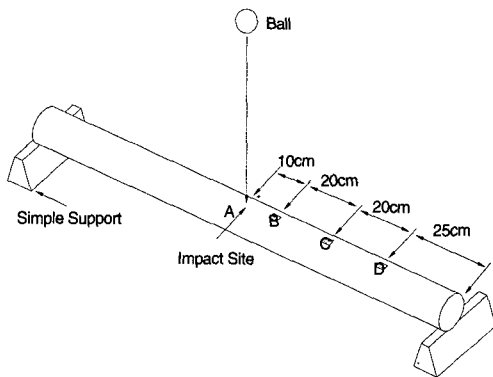


Fig. 1 Experimental setup (Unit : cm)

### 3.2 분산곡선 분석 및 간섭영향 평가

실험의 타당성을 검증하기 위해 일단 결함이 없는 보에서 분산관계를 구하였으며, 끝단에서 가장 가까운 스트레인지계지 신호의 진행과와 반사파 사이의 간섭을 살펴보았다.

분산관계는 두 개의 센서(예를 들면 Fig. 1의 B, C)에서 측정된 신호를 각각 시간-주파수 분석을 하여, 센서 사이의 거리를 도착시간의 차로 나눔으로서 간단하게 구할 수 있다. 실험에서 구한 결과는 해석적인 결과와 잘 일치하는 것을 확인하였다. 굽힘파형과 관련된 원형보의 파동전파에서는 그 파의 그룹속도  $v_g$ 가 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.(참고 문헌 Zemanek,<sup>(10)</sup> Miklowitz<sup>(11)</sup> 등)

$$v_g = k\sqrt{\omega}$$

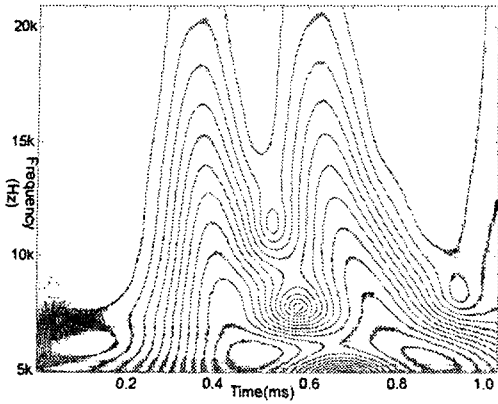
여기서 상수  $k$ 는 선정부재에 따른 상수이다. 따라서 특정 지점에서의 주파수별 도착시간  $t_a$ 는 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$t_a = \frac{d}{v_g} = \frac{d}{k\sqrt{\omega}} \quad (10)$$

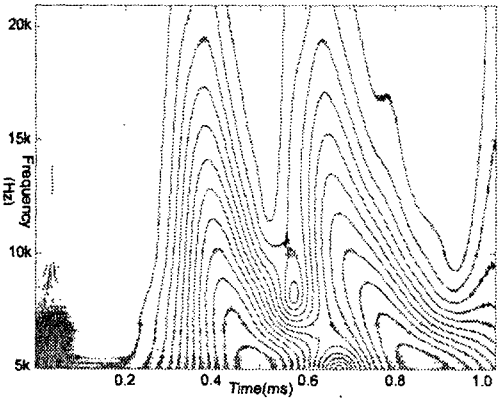
Fig. 2에서는 결함이 없는 보의 D점(경계와 가까운 점)에서 측정된 신호에 대해서 Inoue 등이 사용한 Morlet 웨이블렛( $G_s = 5.0$ )과 본 연구에서 제안하는 최적의 Gabor 웨이블렛( $G_s = 3.5$ )을 이용한 두 분석 결과를 비교하였다.

Fig. 2는 Inoue가 사용한 Morlet 웨이블렛을 이용하면 진행과와 반사파 사이의 간섭이 상당히 심한데 반하여 본 연구에서 선택한 최적의 Gabor 형상지수값을 갖는 Gabor 웨이블렛을 이용하게 되면 간섭의 효과를 크게 줄일 수 있음을 보여준다. 특히 결함을 찾아내기 위해서는 결함에서 돌아오는 작은 반사파를 찾을 수 있는 분해 능력이 필요하기 때문에, 간섭을 최소화하는 웨이블렛의 선정이 가장 중요하다. 실제 본 연구에서는 Gabor형상인자를 변경해 가면서 최적의 결과를 얻은 값을 선택하였다.

Fig. 3에서  $G_s = 5.0$ 와  $G_s = 3.5$ 일 때 시간 축에서 Gabor 웨이블렛의 실수부를 그려보았다. 그림에서 알 수 있듯이  $G_s$ 값이 작아지게 되면



(a)  $G_s = 5$  (Result by the use of the Morlet Wavelet)

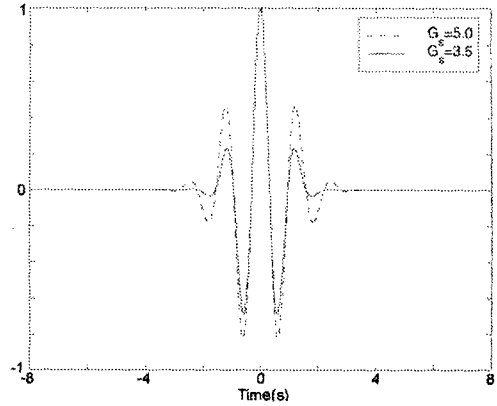


(b)  $G_s = 3.5$  (Present Result using an optimally selected Gabor Wavelet)

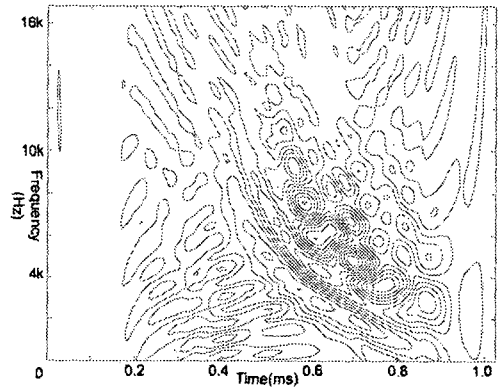
**Fig. 2** Contour of the Wavelet Transform of a Signal Measured at D (No damage in the beam)

시간축에서의 웨이블릿 지지구간이 짧아지게 되어 시간에 대한 분해능이 좋아지게 된다. 그러나 이것이 지나치게 짧아지게 되면 주파수분석 능력이 매우 나빠질뿐 아니라, 수치적으로 식 (6)의 조건을 만족시키지 못하게 되는 문제점이 발생한다.

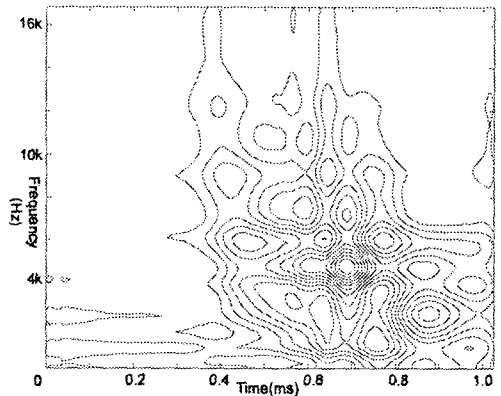
웨이블릿변환에 의한 결과와 위그너빌분포에 의한 결과를 비교해보기 위해서 Fig. 4에서는 Fig. 2에서 사용된 신호(즉 D점에서의 신호)에 대해 위그너빌분포를 구해 보았다. 이 그림으로부터, 진행파와 반사파의 간섭에 의해 Choi-



**Fig. 3** Shape of the Gabor-Wavelet



(a) Without the Choi-William kernel



(b) With the Choi-William kernel

**Fig. 4** The Winger-Ville distribution of a Signal Measured at D (no damage in the beam)

William 커널을 사용하지 않은 경우 간섭 현상이 심하여 신호 분석이 용이하지 않음을 알 수 있다. 또한 Choi-William 커널을 사용하는 경우에는 간섭현상이 개선되는 장점이 있지만 신호 분별 능력이 크게 저하되는 것을 알 수 있다. 따라서 위그너빌 분포로는 미소한 반사파를 분별하기 어렵기 때문에 결함진단 등의 문제에는 부적합하다는 결론을 얻을 수 있다. (Fig. 2와 Fig. 4 비교)

3.3 결함진단

이상의 관찰을 통해 본 연구에서는  $G_s = 3.5$ 를 갖는 Gabor 웨이블릿을 이용하여 결함을 진단해 보았다. (결함의 위치 등에 대해서는 3.1절 참조) 이 경우에 스케일 변수  $s$ 와 주파수  $f(\text{Hz})$ 와 의 상관관계를 이용하면( $2\pi f = \frac{\eta}{s}$ ) 다음의 식으로 추정할 수 있다.

$$s = \frac{2 \times 10^7}{8\pi f}$$

Fig. 5는 결함이 있는 보의 B지점에서 얻은 신호에 최적의  $G_s$ 를 갖는 Gabor 웨이블릿 변환을 적용하여 얻은 결과를 보여준다. 0.4ms 경에 보이는 등고선이 결함에 의해 발생한 반사파에 의한 것인데 Fig. 5에 명확히 드러나 있다. 이 결과와 결함이 없는 보에서의 결과를 비교하기 위해서 Fig. 6에서는 결함이 없는 보와 결함이 있는 보의 B지점에서 측정된 신호를 Gabor 웨이블릿 ( $G_s = 3.5$ )을 이용하여 구한 스캐로그래프로부터 다시 능선(ridge)을 구하였다. Fig. 6(b)을 보면 0.4ms 경에 뚜렷한 능선이 형성됨을 알 수 있으며 이 결과를 이용하면 결함의 위치까지도 추정할 수 있다. Fig. 6(b)의 결과를 이용하여 주파수 별로 결함위치를 평가하게 되면 Fig. 7과 같은 결과를 얻는다. Fig. 7의 결과를 종합(RMS평균을 구함)하면 결함의 위치(계측점 B로부터의 거리)를 얻게 되는데, 이를 표 1로 정리하였다.

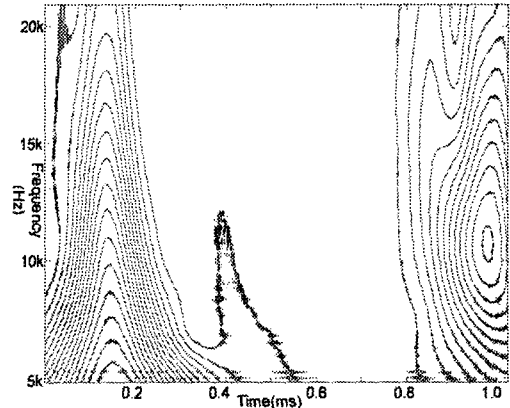
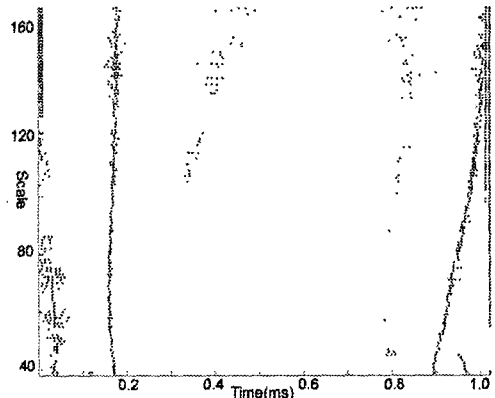
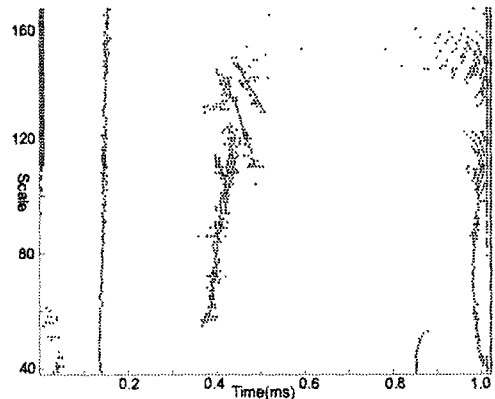


Fig. 5 The present Gabor wavelet transform of the signal measured at B in a damaged beam



(a) Undamaged beam



(b) Damaged beam

Fig. 6 Ridges of the Gabor wavelet transform ( $G_s = 3.5$ )

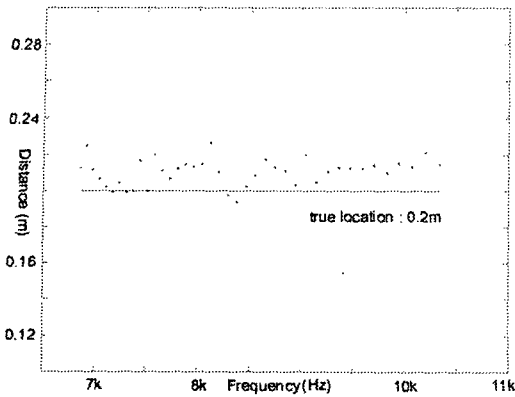


Fig. 7 Estimated damage location as a function of the frequency (true location : 0.2m)

Table 1 Predicted damage location from a measured signal at B

	$G_s = 3.5$	$G_s = 5.0$ (Morlet)
Exp(RMS value)	21.2cm	24.9cm
Exact	20 cm	20 cm

Table 1의 결과에서는 본 연구에서 제안하는 최적의 Gabor 웨이블릿( $G_s = 3.5$ )뿐만 아니라, Morlet 웨이블릿( $G_s = 5.0$ )에 의한 결과를 비교하였다. 이 결과에서 알 수 있듯이 시간 분해능이 좋은 웨이블릿을 사용하지 않으면 결함의 위치를 정확하게 파악할 수 없음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 광대역 가진을 통해서도 비교적 작은 결함의 위치를 추정할 수 있는 새로운 진단 방법을 제안하였다. 이를 위해서 웨이블릿 변환 기법을 적용하였으며, 특히 최적의 형상을 갖는 웨이블릿을 사용(또는 설계)하는 것이 가장 중요하다는 사실을 보였고, 시간 분해능이 우수한 Gabor 웨이블릿 함수 형태를 제안하였다. 이와 같이 광대역 가진에 의한 결함 진단기법은 협대역 가진에 의한 결함 진단방법에 비해 가진 방법

이 매우 간단하여 실제 공학문제에 많이 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 현재 결함의 크기를 평가하는 방법 및 광대역 가진에 의한 결함 진단 기법의 실용화 연구를 수행하고 있으며, 또한 주어진 문제에 적합한 최적의 웨이블릿 함수의 선정이나 설계를 위한 이론적 연구도 진행 중에 있다.

#### 후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) 한응교, 김성규, 박준서, 이범성, 박익근, 1992, "초음파 주파수 분석법에 의한 결함의 정량적 평가에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 1004~1010.
- (2) Wigner, E. P., 1932, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Phys. Rev.*, Vol. 40, pp. 749~759.
- (3) Daubechies, I., 1990, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis," *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol 36, No. 5, pp. 961~1005.
- (4) Choi, H. I. and Williams, W. J., 1989, "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals using Exponential Kernels," *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc.*, Vol 37, No. 6, pp. 862~871.
- (5) Grossmann, A. and Morlet, J., 1984, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape," *Siam J. of Math. Anal.*, Vol. 15, No. 4, pp. 723~736.
- (6) Kishimoto, K., Inoue, H., Hamada, M. and Shibuya, T., 1995, "Time Frequency Analysis of Dispersive Waves by Means of Wavelet Transform," *ASME Trans. J. of Applied Mechanics*, Vol 62, pp. 841~846.
- (7) Inoue, H., Kishimoto, K. and Shibuya, T., 1996, "Experimental Wavelet Analysis of Flexural Waves in Beams," *Experimental Mechanics*, Vol.

- 36, No. 3, pp. 212~217.
- (8) Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York.
- (9) Newland, D. E., 1999, "Harmonic Wavelets in Vibrations and Acoustics," *Royal Society Discussion Meeting*.
- (10) Zemanek, J., 1972, "An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 51, pp. 265~283.
- (11) Miklowitz, J., 1978, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, New York.