

부분공간법을 이용한 연속 냉간압연기의 상태공간모델 규명

김인수* · 황이철** · 이만형***

(1999년 1월 12일 접수)

State-Space Model Identification of Tandem Cold Mill Based on Subspace Method

In Soo Kim, I Choel Hwang and Man Hyung Lee

Key Words: System Identification(시스템규명), MOESP Algorithm(MOESP 알고리즘), Tandem Cold Mill(연속 냉간압연기), Robust Control(견실제어), Uncertainty(불확실성)

Abstract

In this paper, we study on the identification of discrete-time state-space model for robust control of tandem cold mill, using a MOESP(MIMO output-error state-space model identification) algorithm based on subspace method. It is shown that the identified model is well adapted to input-output data sets, which are obtained from nonlinear mathematical equations of tandem cold mill. Furthermore, deterministic H^∞ norm bounds on uncertainties including modeling errors and disturbances are quantitatively identified in the frequency domain. Finally, the results give a basic idea to determine weighting functions included in formulating some robust control problems of tandem cold mill.

1. 서론

냉간압연 판재의 정밀한 두께 제어를 위해 적용되고 있는 AGC(Automatic Gauge Control) 시스템에서는 연속 냉간압연기(tandem cold mill)의 Taylor 선형화 모델에 기초하여 여러 가지 제어 알고리즘을 적용하고 있다. Taylor 선형화 모델은 작동점 근처의 미소변동에 대한 동특성만을 기술하고 있는 것이어서, 작동점이 변화하는 경우에는 각 영향계수를 계속적으로 변경해야 하는 어려움이 발생한다. 그리고 각 스탠드의 간섭현상으로 인하여 연속 냉간압연기 전체를 하나의 다변수 수학적모델로 표현함에 따라 각 스탠드의 거동을 기술할 수 있는 독립적인 수학적 모델을 구축하는

데 다소 어려움이 다르므로, 이러한 문제점들을 해결할 수 있는 모델링 기법 개발이 필수적이다. 특히 기존의 단일 입출력 시스템에 기초한 PID 제어시스템으로 압연과정에서 발생하는 불확실성(uncertainty)에 관한 견실성을 보장하기에는 많은 한계가 있으며, 현재의 급속한 기술 발전에 대처하기에는 많은 개인 조정 시간을 필요로 하는 문제점을 내포하고 있다. 따라서 불확실한 수학적모델에 기초한 합리적인 제어기 설계법인 견실제어(robust control) 알고리즘 개발에 대한 연구가 중요시되고 있으며, 이를 위해서는 우선적으로 연속 냉간압연기의 비선형 특성, 출측 판두께와 장력간의 상호 작용 그리고 각 스탠드간의 간섭 현상등을 기술 가능한 선형 제어모델 구축이 우선되어야 한다. H^∞ 제어 및 μ -해석법 등의 견실제어는 모델링 시 필수적으로 수반되는 모델링 오차, 외란, 주위 환경변화 등으로 야기되는 불확실성을 주파수역 가중함수로 근사화하여 평가함수에 포함시킴으로써 정량적으로 불확실성을 고려하는 제어기 설계법⁽¹⁾으로서, 현재 다수의 응용을 통하여 그 유용성이 확인되고 있다. 반면 불확실성을

* 부산대학교 지능기계공학과

** 동의대학교 기계·산업시스템공학부

*** 회원, 부산대학교 기계공학부/정밀정형 및 금형
가공연구센터

E-mail : mahlee@hyowon.pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2331 FAX : (051)512-9835

반영하는 가중함수의 설정이 경험적으로 결정되어야 한다는 점과 확정적인 H^∞ 노름(norm)으로 평가된 불확실성의 크기가 건설제어시스템 설계에 적합한 것인지의 평가가 매우 중요한 문제로 인식되고 있다. 즉 건설제어를 실 제어대상에 적용하여 그 유용성을 높이기 위해서는 모델링 단계에서부터 H^∞ 노름을 사용하여 불확실성의 크기에 대한 정량적인 평가가 요구된다. 이에 대한 연구는 “건설제어를 위한 시스템 규명”이라는 많은 연구결과가 제안되고 있다.⁽²⁾ 건설제어를 위한 시스템 규명법은 실측 입출력 데이터로부터 시스템 파라미터나 상태공간 모델구조를 규명하는 고전적인 규명법과는 달리, 제어대상과 설계사양에 관한 사전정보, 관측잡음에 오염된 유한개수의 실측 데이터의 사후정보 등의 부분정보로부터 공칭모델(nominal model)과 불확실성의 합으로 주어지는 제어대상의 최대 또는 최소 모델집합을 구하는 문제로서, 최근 부분공간 모델규명법(subspace model identification)을 기초로 한 연구가 발표되고 있다.⁽³⁾

본 논문에서는 부분공간 모델규명법인 MOESP(MIMO output-error state-space model identification) 알고리즘⁽⁴⁾을 이용하여 연속 냉간압연기의 건설제어를 위한 상태공간모델을 구축한다. 연속 냉간압연기의 모델을 규명하기 위한 입출력 데이터는 압연하중식, 출측 판두께식, 장력식과 같은 압연기의 비선형 실험식들을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 획득하게 된다. 결과적으로 규명된 모델은 비선형 모델식으로부터 생성된 입출력 데이터를 잘 기술하며, 더욱이 롤과 판재와의 마찰계수 및 판재의 변형저항 변동에 기인하는 모델링오차와 롤 편심 및 모재 판두께 변동의 외란 등으로부터 발생하는 불확실성이 주파수역에서 H^∞ 노름으로 정량적인 모델링이 가능함을 보인다. 이를 기초로 연속 냉간압연기의 건설제어 문제를 공식화하는 과정에서 포함되는 가중함수의 선정법에 대해서 간략히 고찰한다.

2. 연속 냉간압연기의 동특성

본 장에서는 연속 냉간압연기의 모델규명을 위한 기초 연구단계로서, 기존의 압연 비선형 실험식들을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 스탠드 간 전달지연, 출측 판두께와 후방장력간의 상호 작용과 같은 연속 냉간압연기의 고유한 동특

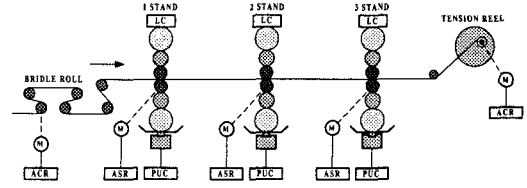


Fig. 1 The schematic of a three-stand tandem cold mill

성을 해석하고, 롤 편심(roll eccentricity)이나 롤과 판재와의 마찰계수 변동과 같은 불확실성이 판재에 미치는 영향, 각 스탠드 입출력 데이터의 상호 관계 등을 파악한다. 이를 위하여 본 논문에서 고려하는 압연시스템은 Fig. 1과 같이 세 개의 스탠드가 연속적으로 배치된 3단 연속 냉간압연 시스템이다.

각 스탠드의 LC(load cell)에서 각 스탠드의 압연하중을 측정하며, PUC(push up control)와 ASR(automatic speed regulator)은 각각 작업롤의 간격을 조절하기 위한 유압식 구동기 및 작업롤 속도 제어장치이다.

2.1 연속 냉간압연기의 비선형 실험식

판재 압연현상에서 압연하중은 최선단 및 후단 부를 제외한 부분이 정상상태 변형 및 평면변형을 겪는다는 가정 하에 균일 변형이론을 이용하여 유도하는 것이 일반적이다. Hill 근사에 의한 압연하중식은 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$P_i = k_{pi} Q_{pi} \chi_i b_i \sqrt{R_{Di}(H_i - h_i)} \quad (1)$$

여기서 P 는 압연하중, k_p 는 판재의 동적 변형 저항, Q_p 는 압하력 함수, χ 는 장력보정항, b 는 판재 폭, R_D 는 변형된 작업롤 반경, H 는 입측 판두께, h 는 출측 판두께를 각각 가리킨다. 그리고 첨자 i 는 i 번째 스탠드를 의미한다.

연속압연이 정상적으로 이루어지는 상태에서 압연재의 체적속도는 전 스탠드를 통하여 일정하다. V_{in} 을 입측 판속도, V_{out} 을 출측 판속도로 두고, 체적속도 일정식을 표현하면 식 (2)와 같다.

$$H_i V_{in i} = h_i V_{out i} \quad (2)$$

각 스탠드의 출측 판두께는 아래와 같은 게이지 미터(gauge meter) 측정식으로 기술된다.

$$h_i = \frac{P_i}{K_i} + S_i \quad (3)$$

여기서 K 는 압연기의 강성계수, S 는 롤 갭을 가리키며, P 는 식 (1)에서와 같이 주어진다.

후방장력식은 이전 스탠드와의 롤 속도차로 주어지며, 1계 상 미분 방정식으로 표현된다.

$$\frac{d\tau_{bi}}{dt} = \frac{E}{L_i} \left\{ \frac{h_i}{H_i} (1+f_i) V_{Ri} - (1+f_{i-1}) V_{Ri-1} \right\} \quad (4)$$

여기서 E 는 물의 영률, L 은 스탠드간 거리, V_R 은 롤 속도이며, f 는 Bland & Ford 근사식에 의한 선진율⁽⁶⁾로서, 다음과 같이 주어진다.

$$f_i = \frac{R_{Di}}{h_i} \phi^2 \quad (5)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{h_i}{R_{Di}} \tan\{0.5 \sin^{-1} \sqrt{r_i} + \frac{1}{4\mu_i} \sqrt{\frac{h_i}{R_{Di}}} \ln\left[\frac{(1 - \frac{\tau_{bi}}{S_{bi}})(1-r_i)}{1 - \frac{\tau_{fi}}{S_{fi}}}\right]}}$$

여기서 r 은 압하율, μ 는 롤과 판재의 마찰계수, S_b 와 S_f 는 각각 입출력 판재의 항복응력을 가리킨다.

2.2 동특성 해석을 위한 시뮬레이션

연속압연 공정에서의 고유한 동특성을 해석하고, 이를 바탕으로 모델규명시 필요한 입출력 변수들의 상호 관계를 결정하기 위하여 압연기의 비선형 실험식들을 이용한 시뮬레이션을 수행한다. 시뮬레이션은 다음과 같은 가정 하에서 수행되며, 초기 압연 설정치는 Table 1과 같이 주어진다.

- (1) 1 스탠드의 후방장력과 3(최종) 스탠드의 전방장력은 일정하다.
- (2) 2~3 스탠드의 후방장력은 $\tau_{b,i} = \tau_{f,i-1}$ 의 관계로부터 각각 1~2 스탠드의 전방장력과 동일하다.

시뮬레이션을 위한 입력 변수는 각 스탠드의 롤 갭과 롤 속도, 출력 변수는 각 스탠드의 출력 판두께와 후방장력으로 선정하였다. 본 논문에서

구성한 출력 판두께와 후방장력 계산을 위한 프로그램의 수치 알고리즘은 아래와 같으며, 이에 대한 흐름선도는 Fig. 2와 같다.

- Step. 1 4차 Runge-Kutta 알고리즘으로부터 Δt 초 후의 후방장력을 식 (4)와 같이 주어지는 1계 상 미분 방정식으로부터 계산한다.
- Step. 2 Newton-Raphson법으로부터 Δt 초 후의 전·후방장력, 현재시간의 출력 판두께로부터 Δt 초 후의 출력 판두께를 구한다.
- Step. 3 압연하중과 출력 판두께의 관계로부터 Δt 초 후의 압연하중을 계산한다.
- Step. 4 Δt 초 후의 변형 롤 반경과 선진율을 계산한다.
- Step. 5 위의 과정을 반복 계산한다.

특히 본 논문에서 연속 냉간압연기의 동특성을 명확하게 파악하기 위하여, 다음과 같이 두 가지 경우에 대한 시뮬레이션을 각각 수행하였다.

- (1) 불확실성을 고려하지 않은 경우 : 각 스탠드에 스텝형 롤 갭 또는 롤 속도를 독립적으로 인가한다.

Table 1 The set-up values of tandem cold mill

stand	1	2	3
rolling condition			
Entry strip thickness(mm)	2.60	2.12	1.57
Delivery strip thickness(mm)	2.12	1.57	1.17
Back unit tension(kgf/mm ²)	2	12.7	17.1
Forward unit tension(kgf/mm ²)	12.7	17.1	10.0

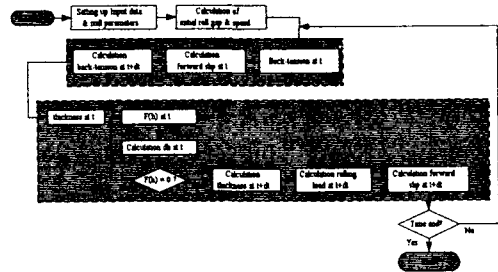


Fig. 2 The flow chart of the program

(2) 불확실성을 고려한 경우 : 모재 판두께 및 롤 편심과 롤과 판재와의 마찰계수 및 판재의 변형저항 변동을 고려한다.

우선 불확실성을 고려하지 않고 각 스탠드 입력 변수인 롤 갭과 롤 속도를 각각 독립적으로 변화시켰을 때의 출력 결과를 나타낸다. 특히 압연판재가 최초로 삽입되는 1 스탠드와 최종 압연 제품이 빠져 나오는 3 스탠드에 대한 결과를 나타내기로 한다. 단 그림에서 기호 Δ 는 변동된 출력값과 출력의 초기 설정치와의 차를 의미하고, 숫자는 각 스탠드를 의미한다. 즉 Δh_1 은 1 스탠드 출측 판두께의 변동량을 표시한다.

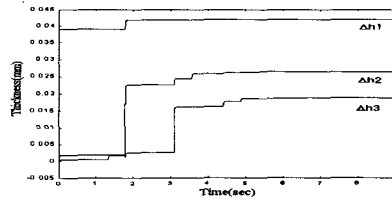
2.2.1 1 스탠드 롤 갭을 +0.1mm(설정치로부터 5%) 증가

1 스탠드의 롤 갭을 증가시키면, 전체 스탠드의 출측 판두께는 증가함을 알 수 있다. Fig. 3(a)에서 1 스탠드의 롤 갭이 증가하면 그 시점에서 1 스탠드의 출측 판두께가 증가하고, 스탠드간의 판재 흐름의 전달 지연의 영향으로 인하여 약 1.8초 후에 2 스탠드의 출측 판두께가 증가하며, 약 3초 후에 3 스탠드의 출측 판두께가 증가한다. 증가량은 1 스탠드가 0.039mm정도(설정치의 1.8%)로 가장 크며, 전방 스탠드일수록 그 증가량은 적어진다. 각 스탠드의 출측 판두께가 증가하는 시점에서 해당 스탠드의 후방장력은 모두 감소함을 Fig. 3(b)에서 잘 알 수 있다. 즉 출측 판두께와 동일하게 약 1.8초에서 2 스탠드의 후방장력이 약 0.95kgf/mm², 약 3초에서 3 스탠드의 후방장력이 약 0.8kgf/mm² 정도 감소함을 알 수 있다. 이는 출측 판두께가 증가된 스탠드와 그 전방 스탠드간에 일정해야 할 체적속도 일정식이 성립하지 않음으로써 스탠드 간 장력의 변화가 발생한 것이며, 출측 판두께가 증가된 스탠드에서 전방 스탠드로 유입되는 판재량의 증가로 인해 장력은 감소하게 된다. 이로부터 스탠드의 롤 갭의 증가는 해당 스탠드의 출측 판두께를 증가시키고, 그 전방 스탠드간의 장력을 감소시킴을 알 수 있다.

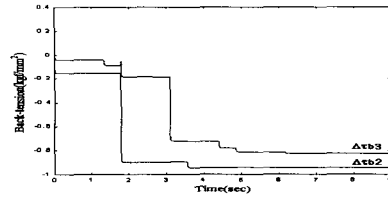
2.2.2 1 스탠드 롤 속도를 +24mm/s(설정치로부터 1%) 증가

1 스탠드의 롤 속도를 증가시키면, 1 스탠드에

서 빠져나오는 판재량이 증가되는 효과를 가져오며 1 스탠드와 2 스탠드의 롤 속도차는 1~2 스탠드 간 장력을 감소시키게 된다. 따라서 Fig. 4(a)에서 1 스탠드 출측 판두께는 증가하고, 이 판두께 증가는 나머지 전방 스탠드까지 영향을 미쳐 2, 3 스탠드의 출측 판두께 또한 증가하게 된다. 2 스탠드 출측 판두께는 롤 속도 증가와 동시에 0초에서 0.007mm로 변동하였다가 최종적으로 0.01mm으로 증가하였다. 3 스탠드 출측 판두께는

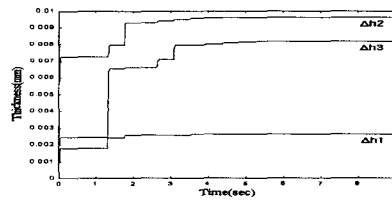


(a) The delivery strip thickness

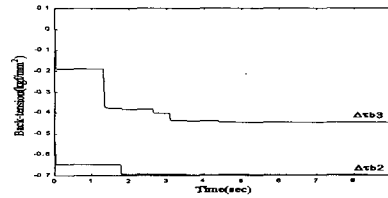


(b) The back-tension

Fig. 3 Time responses of each stand resulted from step variation of the first-stand roll gap

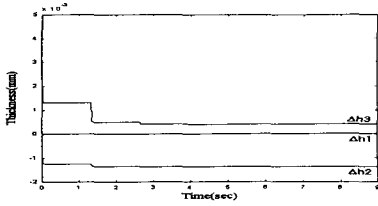


(a) The delivery strip thickness

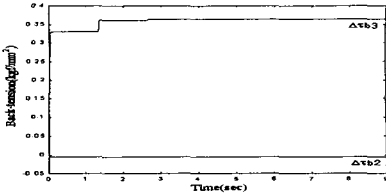


(b) The back-tension

Fig. 4 Time responses of each stand resulted from step variation of the first-stand roll speed

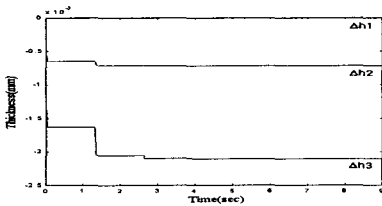


(a) The delivery strip thickness

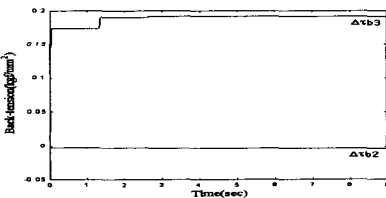


(b) The back-tension

Fig. 5 Time responses of each stand resulted from step variation of the third-stand roll gap



(a) The delivery strip thickness



(b) The back-tension

Fig. 6 Time responses of each stand resulted from step variation of the third-stand roll speed

약 1.3초에서 크게 증가하였다가 최종적으로 0.008mm로 증가하였다. Fig. 4(b)에서 2 스탠드의 후방장력은 출측 판두께의 증가로 인해 3 스탠드의 후방장력 변화량보다 더 크게 감소하였으며, 3 스탠드 후방장력은 출측 판두께의 증가에 의해 1.3초에서 감소, 최종 감소량은 -0.45kgf/mm^2 이다.

2.2.3 3 스탠드 롤 갭을 +0.01mm(설정치로부터 1%) 증가

3 스탠드 롤 갭을 증가시키면, Fig. 5(a)와 (b)에서 알 수 있듯이 3 스탠드 출측 판두께는 증가하지만 3 스탠드 전방장력이 일정하다는 가정으로 인하여 3 스탠드 후방장력이 증가하여 이로 인해 2 스탠드의 출측 판두께는 감소한다. 따라서 2 스탠드의 출측 판두께 감소의 영향을 받아서 3 스탠드 출측 판두께는 약 1.3초에서 크게 감소하다가 거의 0mm로 접근하여 최종적으로 매우 미소한 증가를 보인다. 2 스탠드 후방장력 변화는 전 시간에서 거의 0kgf/mm^2 에서 일정하게 유지되며, 이와 동일하게 1 스탠드 출측 판두께 변화 역시 전 시간 구간에서 0mm로 일정함을 알 수 있다. 2, 3 스탠드 롤 갭 증가의 결과로부터 2 스탠드의 롤 갭 증가는 1 스탠드 출측 판두께 변화에 미소한 영향을 주며, 3 스탠드 롤 갭 증가 역시 1 스탠드 출측 판두께 변화에 거의 영향을 미치지 않는다.

2.2.4 3 스탠드 롤 속도를 +10mm/s(설정치로부터 0.1%) 증가

3 스탠드 롤 속도를 증가시키면, 3 스탠드 후방장력이 크게 증가하여 최종적으로 0.19kgf/mm^2 로 일정하며, 동시에 3 스탠드 출측 판두께는 감소하여 -0.002mm 로 일정하게 유지된다. 2 스탠드 출측 판두께 역시 감소하나, 후방장력은 전 시간 동안 거의 변화 없으며, 1 스탠드 출측 판두께 역시 전 시간동안 거의 일정함을 Fig. 6(a)와 (b)에서 알 수 있다. 결과적으로 1 스탠드의 롤 갭 및 롤 속도 증가에 대하여 전 스탠드의 출측 판두께가 증가하고, 후방장력이 감소하게 되며, 2, 3 스탠드의 롤 갭 및 롤 속도 증감에 대해서는 해당 스탠드의 출측 판두께와 후방장력만 증감하게 되어 제품 판두께에 가장 큰 영향을 미치는 것은 제품에서 가장 가까운 최종 스탠드의 입력 변화가 아니라 가장 먼 1 스탠드의 입력 변화임을 잘 알 수 있다.

다음으로 불확실성에 대한 출력 특성으로 연속 냉간 압연기에서 특히 중요시되는 롤 편심과 롤과 판재와의 마찰계수 변동이 시스템의 입출력 특성에 미치는 영향을 해석한다.

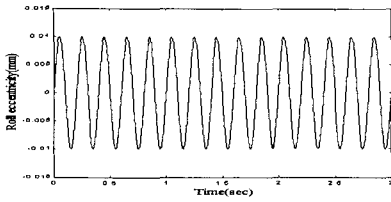
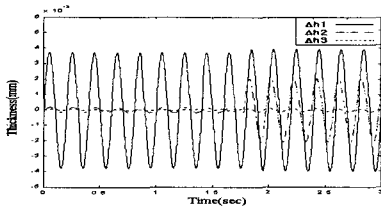
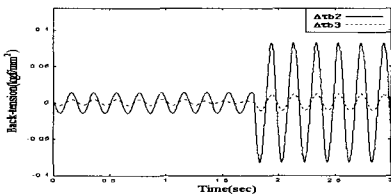


Fig. 7 Roll eccentricity



(a) The delivery strip thickness



(b) The back-tension

Fig. 8 Time responses of each stand resulted from the first-stand roll eccentricity

2.2.5 를 편심과 롤과 판재와의 마찰계수 변동

롤 편심은 백업롤(Back-up roll)의 기하학적인 중심과 축과의 중심 불일치로 인하여 압연시 백업롤이 상하로 움직이게 되어 출측 판두께의 변동을 야기한다. 1 스탠드에 Fig. 7과 같은 크기 0.01mm, 주기 5Hz를 가지는 정현파형의 롤 편심이 발생하였을 때, 1 스탠드의 출측 판두께에 가장 큰 영향을 미치며, 2, 3 스탠드의 출측 판두께는 스탠드 간 전달 지연으로 인하여 일정 지연시간 후에 증감함을 Fig. 8(a)에서 보여주고 있다. Fig. 8(b)에서는 후방장력이 출측 판두께와 반대의 경향을 가짐을 나타내고 있다. 1 스탠드의 롤과 판재와의 마찰계수가 Fig. 9와 같은 정현파형으로 변동하였을 때, 각 스탠드의 출측 판두께와 후방장력의 거동을 Fig. 10(a)와 (b)에서 나타내었다. 마찰계수가 증가하면 출측 판두께는 증가하고, 마찰계수가 감소하면, 출측 판두께는 역시 감소하는 경향을 나타내고 있다. 즉 롤과 판재와의 마찰계수가 감소하면, 롤이 판재에 가하는 압하

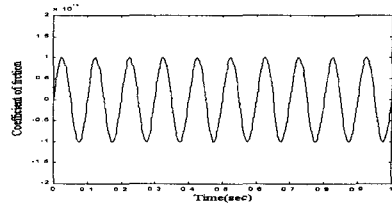
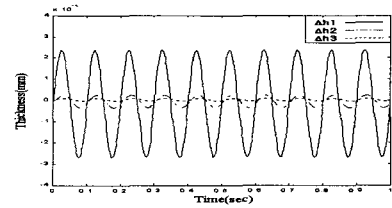
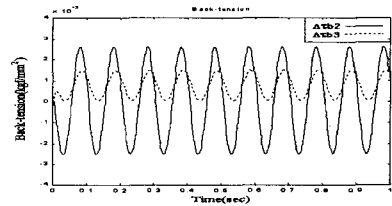


Fig. 9 Coefficient of friction



(a) The delivery strip thickness



(b) The back-tension

Fig. 10 Time responses of each stand resulted from the coefficient of friction

중이 증가하는 효과가 발생하는 것과 같다. 따라서 압연하중의 증가 효과로 인해 출측 판두께는 감소하며, 마찰계수가 증가하면 이와 반대로 출측 판두께 역시 증가하게 된다. 후방장력은 출측 판두께와 반대의 경향을 나타내었다.

이와 같은 동특성 해석은 모델규명을 위한 입출력 신호 선정과 건설제어 설계를 위한 불확실성의 가중함수 결정에 있어 중요한 기초자료로 이용된다. 이상의 결과를 기초로 3장에서는 연속 냉간압연기의 동특성을 명확히 기술할 수 있는 모델을 규명하게 된다.

3. 시스템규명

측정된 입출력 데이터로부터 모델을 규명하는 문제는 시스템의 해석, 설계 그리고 제어기 설계에 있어 매우 중요한 문제로서 인식되고 있다. 여기서 시스템규명이란 이용 가능한 입출력 데이터 계열과 미지의 파라미터 또는 사용자의 사용

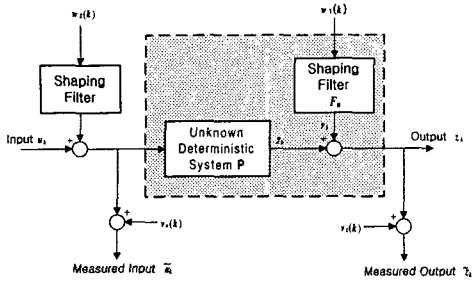


Fig. 11 The schematic of system identification

목적에 따른 모델구조와의 사상을 구하는 문제라고 할 수 있다.^(5,6) 본 장에서는 Verhaegen과 Dewilde가 제안한 MOESP 알고리즘⁽⁴⁾을 이용하여 연속 냉간압연기의 수확모델을 규명하기로 한다.

MOESP 알고리즘은 1980년대 후반 Moonen, De Moor 등이 제안한 부분공간에 기초한 상태공간 모델규명법(Subspace-based State Space System Identification method : 4SID)법⁽⁴⁾ 가운데 확정적인 모델에 관한 실현법을 다루고 있으며, 1966년 Ho와 Kalman이 제안한 다변수 시스템의 상태공간 실현법과는 달리 먼저 입출력 데이터로부터 생성된 블록 Hankel 행렬에 대하여 RQ 분해를 수행한 후 특이치분해(singular value decomposition)를 이용하고 있다. 즉 블록 Hankel 행렬의 사전 처리로서 데이터 행렬을 압축하는 특이치분해를 이용하는 것이 아니라, 데이터 행렬의 열 및 행 부분공간을 구조적으로 이해할 수 있도록 하는 RQ 분해를 수행하는 것이다. 또한 입출력 데이터 또는 규명대상에 불확실성이 포함된 경우에도 적용할 수 있어 실 시스템의 규명에 많은 유용성을 가진다고 할 수 있다.

다변수 시스템의 규명에서 발생하는 어려움은 모델의 구조를 결정하는 것과 필요 이상으로 많은 시스템 파라미터가 결정되는 것이라 할 수 있는데, 부분공간법은 그러한 문제를 어느 정도 보완해주는 알고리즘으로 평가된다. 부분공간법에서는 신호 분리(신호 + 노이즈 성분)를 통하여 모델의 구조가 한층 간단해지며, 다변수 시스템 규명은 단일 입출력 시스템규명의 단순 확장임을 보이고, 실 시스템규명에 응용성을 고려한 문제의 정식화를 통하여 전개된다.

여기서 시스템규명 문제의 정식화는 Fig. 11과 함께 아래와 같이 전개된다.

주어지는 데이터 노이즈 등에 섭동된 유한개의 입출력 데이터 \tilde{u}_k, \tilde{z}_k

가정 부가되는 섭동량 $v_u(k), v_z(k)$ 그리고 백색잡음 $w_1(k), w_2(k)$ 는 모두 입력과 독립성을 갖는다. 여기서 섭동량은 다음과 같이 두 가지 요인으로 분류된다.

- (1) 내부발생 오차 (v_k): 측정할 수 없는 입력 오차, 예기치 못한 결과 그리고 출력에 무상관인 출력오차
- (2) 외부 발생 오차 ($v_u(k), v_z(k), w_2(k)$): 측정 장치 또는 변환기로 인한 오차

여기서 모든 오차 신호는 0-평균 임의의 확률과정을 가지는 것으로 한다.

시스템규명 문제 상태공간 모델을 설명하는 입출력 데이터로부터 결정되는 공간으로부터 천이-불변(shift-invariant) 부분공간을 근사화하는 것이다. 여기서 상태공간 모델은 규명될 시스템의 확정적인 부분의 입출력 거동을 나타낸다.

위의 규명문제는 신호기준에서 정식화되었다는 점에서 공학적인 의미를 가지며, 얻어진 상태공간 모델은 고전적인 시스템규명에서 주어지는 많은 모델의 형태를 포함하고 있다. 그리고 해법은 확률적인 또는 확정적인 실현 문제로 귀착되어 구해진다. 여기서는 확정적 실현 문제로 고려하여 얻은 해법의 기존 결과에 대하여 간단히 설명하기로 한다. 최초의 결과는 Ho와 Kalman에 의하여 제안되었고, Kung 등이 수치계산에 있어서의 견실성 관점에서 해를 구하였다. 최근에는 Moonen 등이 수치적으로 견실성을 가지는 계산 알고리즘을 제안하였다. 특히 Ho와 Kalman은 추정된 Markov 파라미터를 이용하여 가도달성 및 가관측성 행렬의 천이-불변 행렬을 근사적으로 구하였다. 그러나 $v_u(k)$ 와 $v_z(k)$ 를 백색잡음으로 가정하여 해를 구하였으므로 실제 문제에 관한 해의 유용성은 상당히 제한적이라 할 수 있다. 그리고 Verhaegen 등은 MOESP 알고리즘을 제안하였는데, 이 알고리즘은 다음과 같은 두 가지의 방법을 포함하고 있다. 즉 천이-불변 또는 구조화된 부분공간을 결정하기 위하여 입출력 데이터와 제한된 추정 Markov 파라미터를 이용하는 방법과 단지 입출력 데이터만을 이용하는 방법이다.

본 논문에서는 입출력 데이터만을 이용한

MOESP 알고리즘을 이용하고 있으므로 이에 관한 구체적인 내용을 간단히 요약하기로 한다. 먼저 MOESP 알고리즘에 대하여 간략히 소개하며, 본 알고리즘을 적용하여 연속 냉간압연기의 모델을 규명하게 된다. 규명되는 모델의 형태는 다변수인 시불변 선형 상태공간모델이며, 이산시간계로서 특징지워진다.

3.1 MOESP 알고리즘

M. Verhaegen이 제안한 MOESP 알고리즘은 다음과 같은 순서로 실현된다.

Step. 1 입출력 데이터로부터 만들어지는 2개의 $(k \times l)$ 블록 Hankel 행렬을 아래와 같이 정의한다.

$$Y_t = \begin{bmatrix} y(t) & y(t+1) & \dots & y(t+l-1) \\ y(t+1) & y(t+2) & \dots & y(t+l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(t+k-1) & y(t+k) & \dots & y(t+l+k-2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$U_t = \begin{bmatrix} u(t) & u(t+1) & \dots & u(t+l-1) \\ u(t+1) & u(t+2) & \dots & u(t+l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t+k-1) & u(t+k) & \dots & u(t+l+k-2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

입력 개수를 m 이라 할 때, 행렬 U_t 가 $\text{rank } U_t = km$ 의 관계식이 성립하면 입력 신호 $u(t)$ 는 지속적인 기진(persistent excitation)조건을 만족한다.^(7,8)

Step. 2 다음의 블록 Hankel 행렬에 대하여 RQ분해를 실시하여 R 을 다음과 같이 분해한다.⁽⁹⁾

$$\begin{bmatrix} U_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$R_{11}: (mk \times mk), R_{21}: (pk \times mk), R_{22}: (pk \times pk)$

Step. 3 $R_{22} : (pk \times pk)$ 를 특이치분해 한다.⁽⁹⁾

$$R_{22} = [U_n \ U_n^+] \begin{bmatrix} S_n & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ (V_n^+)^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

$U_n: (pk \times n), U_n^+: (pk \times (pk-n)), S_n: (n \times n)$

Step. 4 계수행렬(A, B, C, D)에 대수적으로 등가인 추정치(A_d, B_d, C_d, D_d)는 다음 관계식으로부터 계산된다.

$$C_d = U_n(1:p, :), U_n^{(1)}A_d = U_n^{(2)}, X_y = X_u \Theta \quad (10)$$

$$X_y = \begin{bmatrix} L(:, 1:m) \\ L(:, m+1:2m) \\ \vdots \\ L(:, m(k-1)+1:mk) \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} D_d \\ B_d \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$X_u = \begin{bmatrix} U_n^+(1:p, :)^T & \dots & * \\ U_n^+(p+1:2p, :)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^+(p(k-1)+1:pk, :)^T & \dots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & U_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

단 $U_n^{(1)}$ 은 행렬 U_n 에서 제 1행부터 제 $p(k-1)$ 행까지, $U_n^{(2)}$ 는 행렬 U_n 에서 제 $p+1$ 행부터 제 pk 행까지 각각 분해된 것이다. 상태공간 모델의 시스템 계수들 중 일부는 식 (10)의 최소자승(least square)법으로부터 구해진다.^(7,8)

MOESP 알고리즘에서 실험 데이터로부터 획득 수 k 와 취득 데이터 수 l 은 경험적으로 선택해야 한다. 가능한 많은 데이터를 사용하여 모델을 결정하는 것이 바람직하나, 수치적인 계산 시간을 충분히 고려해야 할 필요가 있다. 그리고 알고리즘에서 입출력 데이터의 공분산 행렬을 계산하지 않고, 입출력 데이터로부터 구성되는 Hankel 행렬의 RQ분해를 이용하고 있으므로 수치적으로도 매우 우수한 것으로 알려져 있다.

3.2 연속 냉간압연기의 모델규명

본 절에서는 MOESP 알고리즘을 연속 냉간압연기에 적용하여 상태공간 형태의 시불변 이산시간계 모델로 규명한다. 특히 연속 냉간압연기의 모델규명에 있어서 기존의 Taylor 선형화 모델과는 달리 각 스탠드의 견실한 제어를 위한 독립적인 모델을 규명하는데 초점을 두었으며, 이를 위해서 2장의 연속 냉간압연기의 동특성 해석으로부터 상호간에 지배적인 영향을 미치는 입출력 신호의 관계를 명확히 밝히고자 하였다. 연속 냉간압연기의 동특성 해석을 바탕으로 얻은 결과는 1 스탠드의 롤 갭과 롤 속도의 변화가 전 스탠드의 출측 판두께와 후방장력에 지대한 영향을 미친다는 것이며, 이는 최종 판재 두께의 결정적인 영향을 주는 스탠드 역시 1 스탠드임을 잘 알 수 있다. 따라서 본 논문에서는 연속 냉간압연기의

출측 판두께의 건설한 제어가 주목적이므로, 규명대상을 1 스탠드로 한정하기로 한다. 먼저 비선형 시뮬레이터로부터 외란 및 시스템 파라미터 변동 등의 불확실성이 포함되지 않은 경우의 입출력 데이터를 생성하여 이로부터 공칭모델을 규명하고, 다음으로 불확실성이 고려된 입출력 데이터를 생성하여 이로부터 모델을 규명한다.

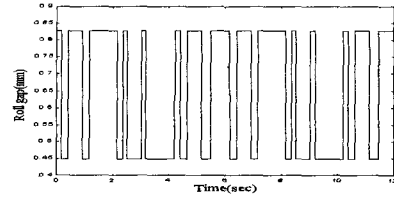
3.2.1 입출력 데이터

1 스탠드의 모델규명을 위하여 선정한 입력 데이터는 1 스탠드의 롤 갭과 롤 속도이며, 출력 데이터는 1 스탠드의 출측 판두께와 후방장력이다. 실질적으로 모델규명을 위한 가장 바람직한 입출력 데이터는 실제 연속 냉간압연 시스템의 측정된 입출력 데이터이지만, 현장에서 작업중인 연속 냉간압연기로부터 원하는 입출력 데이터를 실험적으로 얻는다는 것은 대단히 어려운 상황이므로, 본 논문에서 한 가지 방법으로 제안된 것은 공증된 압연기의 비선형 실험식들을 이용하여 가상의 연속 냉간압연기를 구성하여 이로부터 입출력 데이터를 생성하는 것이다. 입력 신호의 형태는 이상적인 백색잡음에 근사한 M계열 신호^(7,8)로 지속적인 기진조건을 만족하도록 선정되었고, 각 스탠드 간 전달 지연, 입출력 신호간의 상호연성효과 등의 연속 냉간압연기의 고유한 특성을 충분히 보장할 수 있도록 결정되었다.

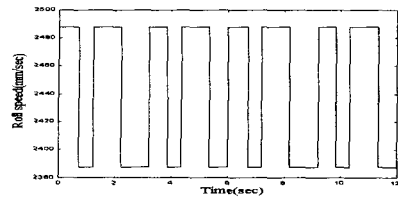
Fig. 12(a)와 (b)는 각각 최대 $+0.19mm$, 최소 $-0.19mm$ 의 변동크기를 가지는 1 스탠드 롤 갭과 최대 $+50mm/s$, 최소 $-50mm/s$ 의 변동크기를 가지는 1 스탠드 롤 속도를 나타낸 것이다. 이러한 롤 갭과 롤 속도 신호를 인가하였을 때의 1 스탠드 출측 판두께와 후방장력을 각각 Fig. 13(a)와 (b)에서 나타내었다. 입출력 데이터 취득 시간은 12초로써 출력 데이터에 스탠드간 전달지연 특성과 출측 판두께와 후방장력간의 상호 간섭현상이 충분히 나타나도록 스탠드간 판재의 전달지연 시간을 고려하여 선정하였다. 데이터 샘플링 간격은 $2ms$ 이며, 각 입출력 데이터 총 취득수는 6000개이다. 따라서, MOESP 알고리즘의 Step 1에서 입력 데이터 행렬 U_i 는 $rank U_i = 4$ 를 만족하여 입력신호는 지속적인 기진조건을 만족한다.

3.2.2 불확실성을 고려하지 않은 입출력 데이터로부터 규명된 모델

불확실성을 고려하지 않은 Fig. 12와 Fig. 13의

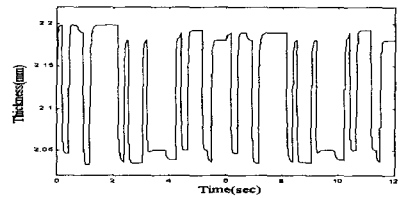


(a) The first-stand roll gap

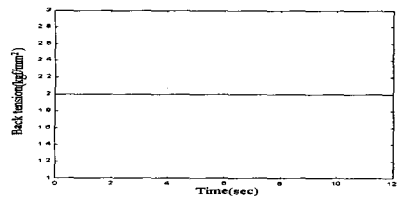


(b) The first-stand roll speed

Fig. 12 The input data for model identification



(a) The first-stand delivery strip thickness



(b) The first-stand back tension

Fig. 13 The output data for model identification

입출력 데이터로부터 규명된 모델은 다음 식 (14)와 같은 2차의 이산시간계 다변수 상태공간모델로 주어지며, 이를 공칭모델이라 부르기로 한다.

Fig. 14에서 실선은 모델규명을 위해 사용하였던 출측 판두께이고, 점선은 규명된 모델 (14)에 Fig. 12(a)와 (b)의 입력신호를 인가하였을 때의 출측 판두께이며, Fig. 15는 두 출측 판두께와의 오차를 나타낸 것이다. 출력 신호의 급격한 증감

부분을 제외하고는 $\pm 0.01mm$ 이내로 매우 정확하게 규명되었음을 보여준다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9959 & 0.100035 \\ 4.7445 \times 10^{-3} & 0.88389 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3.9847 \times 10^{-2} & 1.19126 \times 10^{-5} \\ -4.61069 \times 10^{-2} & -1.379 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 4.6545 \times 10^{-1} & -5.9007 \times 10^{-1} \\ 5.3436 \times 10^{-1} & 4.617 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} -7.4619 \times 10^{-5} & -4.0158 \times 10^{-8} \\ -3.4222 \times 10^{-7} & -2.3147 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

3.2.3 불확실성을 고려한 입출력 데이터로부터 규명된 모델

모재 판두께 변동 및 롤 편심, 롤과 판재와의 마찰계수 변동 및 판재의 변형저항 변동의 불확실성이 포함된 입출력 데이터 신호를 MOESP 알고리즘에 적용하여 1 스탠드의 모델을 규명한다. 본 논문에서는 불확실성을 다음 두 가지 경우로 구분하여 각 경우에 대한 모델을 규명하였다.

- (1) 모재 판두께 변동 및 롤 편심의 외란이 포함된 입출력 데이터로부터 모델을 규명
- (2) 롤과 판재와의 마찰계수 변동 및 판재의 변형저항 변동의 시스템 파라미터 변동이 포함된 입출력 데이터로부터 모델을 규명

여기서 각 스탠드의 입력인 롤 갭과 롤 속도는 공칭모델을 규명하기 위하여 취득하였던 입력 신호와 동일한 것으로 한다. 따라서 고려된 불확실성의 영향은 출력 신호 즉, 출측 판두께에 반영되어 나타나는 사실에 주의하자. Fig. 16은 모재 판두께 변동 및 롤 편심의 외란이 포함된 입출력 데이터로부터 규명된 모델에 Fig. 12(a)와 (b)의 입력을 인가하여 얻은 출측 판두께이다. 실선은 공칭모델 규명시 사용하였던 출측 판두께이며, 점선은 외란을 고려한 모델에서 얻은 출측 판두께이다. Fig. 17은 두 출측 판두께의 오차를 나타낸 것으로 $\pm 0.01mm$ 이내의 오차를 가짐을 알 수 있다. Fig. 18은 롤과 판재사이의 마찰계수와 판재의 변형저항 등 시스템 파라미터 변동이 포함된 입출력 데이터로부터 규명된 모델에 입력을

인가하여 얻은 출측 판두께이다. 실선은 공칭모델 규명시 사용하였던 출측 판두께이고, 점선은 시스템 파라미터 변동을 고려한 모델에서 얻은 출측 판두께이다. Fig. 19는 두 출측 판두께의 오차를 나타낸 것이며, 역시 $\pm 0.01mm$ 이내로 매우 정확하게 규명되었음을 알 수 있다.

외란과 시스템 파라미터 변동이 포함된 입출력 데이터로부터 규명된 모델의 상태공간모델은 각 각 아래와 같다.

- (1) 외란이 포함된 입출력 데이터로부터 규명된 모델

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9959 & 0.0807 \\ 4.4629 \times 10^{-3} & 0.9129 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3.2048 \times 10^{-2} & 6.8888 \times 10^{-6} \\ -3.4582 \times 10^{-2} & -7.4486 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 4.8317 \times 10^{-1} & -5.6120 \times 10^{-1} \\ 5.1837 \times 10^{-1} & 4.8008 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} -5.9391 \times 10^{-5} & -9.7752 \times 10^{-7} \\ -8.3352 \times 10^{-7} & -1.2346 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

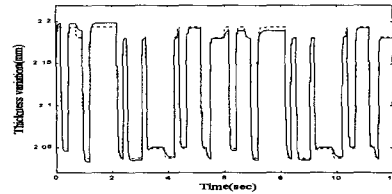


Fig. 14 The delivery strip thickness of the identified nominal model

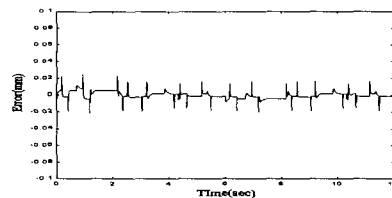


Fig. 15 The error of delivery strip thickness

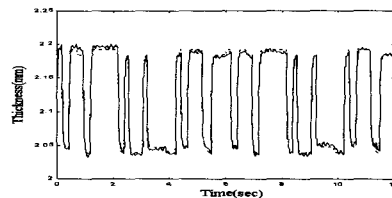


Fig. 16 The delivery strip thickness of the identified model considering uncertainties

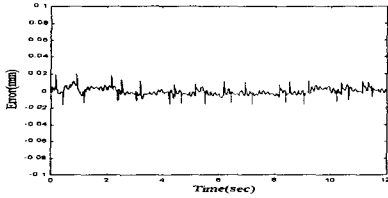


Fig. 17 The error of delivery strip thickness

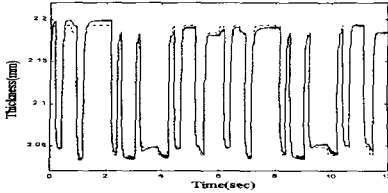


Fig. 18 The delivery strip thickness of the identified model considering uncertainties

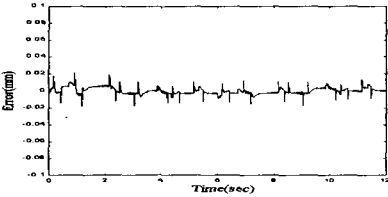


Fig. 19 The error of delivery strip thickness

(2) 시스템 파라미터 변동이 포함된 입출력 데이터로부터 규명된 모델

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0.9959 & 0.0806 \\ 4.5214 \times 10^{-3} & 0.9122 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 3.2111 \times 10^{-2} & 7.4490 \times 10^{-6} \\ -3.4960 \times 10^{-2} & -8.1298 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 4.8084 \times 10^{-1} & -5.6355 \times 10^{-1} \\ 5.2054 \times 10^{-1} & 4.7773 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} -1.2112 \times 10^{-5} & -7.7547 \times 10^{-7} \\ -1.0798 \times 10^{-6} & -1.6649 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (16)
 \end{aligned}$$

모델규명에 있어서 입출력 데이터가 실 규명대상에 대한 실측치가 아니라 제약조건이 있지만, 규명된 상태공간 모델이 입출력간의 비선형 거동을 양호하게 근사화함을 알 수 있다. 이로써 MOESP 알고리즘은 연속 냉간압연기의 건설제어를 위한 상태공간모델 구축에 유용성을 가진다고 할 수 있다.

3.2.4 불확실성의 주파수 특성

Fig. 20에서 실선은 규명된 공칭모델, 점선은 외란을 고려하여 규명된 모델의 최대 특이치 선도를 나타낸 것이며, Fig. 21에서 실선은 공칭

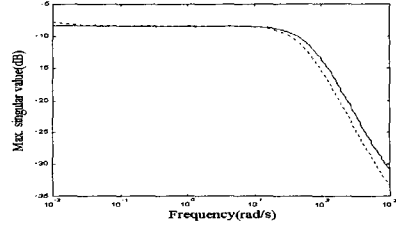


Fig. 20 Maximum singular value plot of the identified model considering disturbances and nominal model

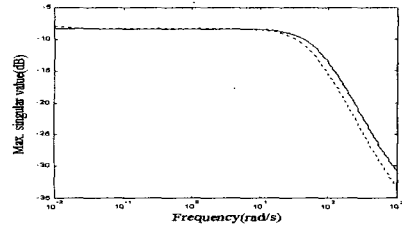


Fig. 21 Maximum singular value plot of the identified model considering the variation of system parameters and nominal model

모델, 점선은 시스템 파라미터 변동을 고려하여 규명된 모델의 최대 특이치 선도를 각각 나타낸다. 두 그림에서 모두 10rad/s 이상의 주파수 영역에서는 공칭모델보다 게인값이 적어짐을 알 수 있다. 이로부터 연속 냉간압연기의 건설 제어를 설계할 경우 롤과 판재와의 마찰계수 및 판재의 변형저항과 같은 시스템 파라미터 변동으로 야기되는 모델링오차가 존재하여도 건설 안정성을 보장하도록 모델링오차에 대한 가중함수를 결정하고, 모재 판두께 변동 및 롤 편심 등의 외란에 대하여 억압 성능을 가지도록 외란에 대한 가중함수를 설정하는데 있어서 규명된 공칭모델과 불확실성을 고려하여 규명된 모델간의 최대 특이치 선도를 바탕으로 하여 10rad/s 이상의 주파수 영역에서 상대적으로 큰 게인값을 가지는 안정한 주파수역 유리함수 형태로 결정할 수 있다.⁽¹⁰⁾ 특히 모델링오차에 대한 가중함수는 공칭모델과의 상대오차로 표현할 수 있으며, 공칭모델의 출력측으로 반영한 승법형오차(multiplicative error)로 표현한다면 다음 Fig. 22와 같다. 여기서 실제 제어대상 $G(z)$ 는 공칭모델 $G_0(z)$ 와 승법형오차 $\Delta_m(z)$ 와 함께 다음과 같은 식 (17)로 기술된다.^(1,10)

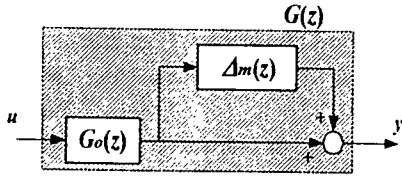


Fig. 22 System with a multiplicative error

$$G(z) = G_o(z) + \Delta_m(z)G_o(z) \quad (17)$$

전실 안정성을 보장하도록 제어기를 설계하기 위하여, $\Delta_m(z)$ 는 안정한 동시에 전 주파수대역에서 그 크기가 주어진 스칼라 유리함수 $W_m(z)$ 의 계인값으로 억제되도록 식 (18)과 같이 설정한다.

$$\overline{\sigma}\{\Delta_m(j\omega)\} \leq |W_m(j\omega)| : \forall \omega \quad (18)$$

여기서 $\overline{\sigma}$ 는 최대 특이치를 의미한다.

본 논문에서 규명된 식 (14)의 공칭모델과 식 (16)의 시스템 파라미터 변동을 고려한 모델간의 승법형오차 $\Delta_m(z)$ 를 식 (17)로부터 구하면, Fig. 23과 같은 주파수역에서의 최대 특이치 선도로 표현할 수 있고, 이를 바탕으로 하여 모델링오차에 대한 가중함수 $W_m(z)$ 는 식 (18)을 만족하도록 선정할 수 있다. Fig. 23의 모델링오차의 최대 특이치 선도를 바탕으로 관심있는 주파수 영역인 10rad/s 이상에서 큰 계인을 가지고, 저주파역에서는 비교적 적은 계인을 가지도록 안정한 가중함수 $W_m(z)$ 를 선정하면 Fig. 24의 점선과 같이 나타낼 수 있고, 이를 이산시간계 전달함수와 상태공간모델식으로 나타내면 각각 식 (19), (20)과 같다. 이와 같은 불확실성의 주파수 영역에서의 정량적인 해석을 바탕으로 연속 냉간압연기에서 불확실성으로 인한 모델링오차가 존재하여도 전실 안정성을 보장하는 H^∞ 제어기 설계에 필요한 가중함수를 결정할 수 있다.

$$W_m(z) = \frac{860z - 860}{1.02z - 0.98} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_w x(k) + B_w u(k) \\ y(k) &= C_w x(k) + D_w u(k) \end{aligned} \quad (20)$$

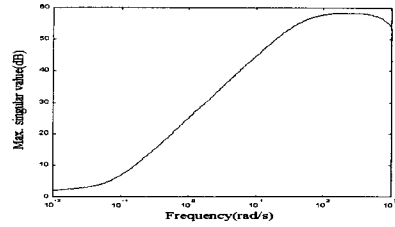


Fig. 23 Maximum singular value of a modeling error represented by multiplicative error

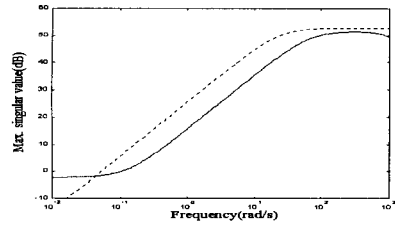


Fig. 24 Determination the weighting function of the modeling errors

$$\begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & D_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.96078 & 1.0 \\ -33.0642 & 843.1373 \end{bmatrix}$$

4. 결 론

본 논문에서는 연속 냉간압연 공정에서 생산되는 판재의 정밀한 두께제어를 위한 건설제어 시스템 설계에 필요한 제어모델을 구축하기 위하여 먼저 비선형 실험식으로 구성된 시뮬레이션을 통하여 냉간압연 공정의 정확한 동특성을 해석하였고, 동시에 롤 편심, 마찰계수 변동과 같은 불확실성에 대한 영향을 평가하였다. 그리고 이러한 동특성 해석을 바탕으로 부분공간법에 기초한 MOESP 모델규명 알고리즘을 적용하여 연속 냉간압연기의 시불변 상태공간모델을 규명하였다. 결과적으로 연속 냉간압연기의 상태공간모델을 규명하는데 있어 부분공간 모델규명 알고리즘의 유효성을 확인할 수 있었으며, 동시에 외란 및 파라미터 변동에 기인한 불확실성을 H^∞ 노음으로 정량적인 평가를 수행함으로써, 건설제어 시스템 설계를 위한 가중함수 선정법을 제안하였다.

후 기

본 연구는 부산대학교 정밀정형 및 금형가공 연구센터와 POSCO 석좌교수 연구기금으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) 多美 勉, 1994, H^∞ 制御, 昭晃堂.
- (2) Smith, R. S., 1995, "Model Validation for Robust Control: an Experimental Process Control Application," *Automatica*, Vol. 31, No. 11, pp. 1637~1647.
- (3) Nagamunne, R., Yamamoto, S. and Kimura, H., 1997, "Identification of the Smallest Unfalsified Model Set with both Parametric and Unstructured Uncertainty," *Proceedings of SYSID'97*.
- (4) Verhaegen, M. and Dewilde, P., 1992, "Subspace Model Identification Part I. The Output-Error State-Space Model Identification Class of Algorithm," *International Journal of Control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1187~1210.
- (5) Hill, R., 1950, "Relations Between Roll Force, Torque and the Applied Tensions in Strip Rolling," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 163, pp. 135~140.
- (6) Bland, D. R. and Ford, H., 1948, "The Calculation of Roll Force and Torque in Cold Strip Rolling with Tensions," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 159, pp. 144~163.
- (7) Torsten Soderstrom and Petre Stoica, 1989, *System Identification*, Prentice-Hall.
- (8) 片山 徹, 1994, *Introduction to System Identification*, 朝倉書店.
- (9) Goldberg, J. L., 1991, *Matrix Theory with Applications*, McGraw-Hill.
- (10) Doyle, J. C., Francis, B. A. and Tannenbaum, A. R., 1992, *Feedback Control Theory*, Macmillan.