

병렬형 역진자의 비선형 H_2/H_∞ 강인제어

김 종 식* · 한 성 익**
(1999년 8월 10일 접수)

Robust Nonlinear H_2/H_∞ Control for a Parallel Inverted Pendulum

Jong Shik Kim and Seong-Ik Han

Key Words : Parallel Inverted Pendulum(병렬형 역진자), Describing Function(기술함수), H_2/H_∞ Control(H_2/H_∞ 제어), Dry Friction(건마찰)

Abstract

A robust nonlinear H_2/H_∞ control method for a parallel inverted pendulum with structured perturbation and dry friction is proposed. By the random input describing function techniques, the nonlinear dry friction is approximated into the quasi-linear system. Introducing the quadratic robustness theorem, the robust H_2/H_∞ control system is constructed for the quasi-linear perturbed system. But it is difficult to design a controller due to the nonlinear correction term in Riccati equation. With some transformations on the Riccati equation containing nonlinear correction term, the design of the robust nonlinear controller can be done easily. Hence when the stiffness and mass of the parallel inverted pendulum vary in certain ranges, the proposed control scheme has the robustness for both the structured perturbation and dry friction. The results of computer simulation show the effectiveness of our proposed control method.

1. 서론

역진자 시스템은 로켓 발사대의 제어, 주행로봇 등과 상사되는 불안정성, 기하학적인 비선형, 건마찰(dry friction) 특성이 존재하는 대표적인 기계시스템으로 다변수 제어이론 및 비선형 제어이론을 적용, 검증하기에 적합하고 타 관련분야로의 응용성이 크고 실험으로 구현하기가 용이하므로 많은 연구가 수행되고 있다. LQ 최적제어,⁽¹⁾ 신경망 제어,⁽²⁾ 입출력 선형화 제어,⁽³⁾ H_∞ 제어,⁽⁴⁾ 등의 여러 제어 방법들이 단일형(single type), 이중 직렬형(double-series type),⁽⁵⁾ 그리고 삼중 직렬형(triple-series type)⁽⁶⁾ 역진자에 대해 적용되었다. 그런데 대부분 연구의 경우 주로 단일입출력 역진자 모델

에 대해 적용하였고 시스템의 섭동(perturbation)에 대한 강인성을 취급하는 문제와 구동부에서 발생하는 건마찰(dry friction)을 동시에 고려한 다입출력 비선형 모델에 대한 연구는 많지 않다. 건마찰만을 고려하고 시스템 섭동은 고려하지 않는 시스템의 제어를 위한 연구는 주로 단일입출력 시스템에 대한 연구가 많이 진행되었다. 그리고 다입출력 시스템에 대한 다변수 제어이론을 적용한 예는 Kim⁽⁶⁾ 이 QLQG/LTR 제어방법을 연구하였고 Han⁽⁷⁾ 등이 QLQG/ H_∞ /LTR 제어방법을 연구하였다.

불연속 비선형 특성을 갖는 건마찰을 준-선형화(quasi-linearization)하는 방법으로는 대표적으로 SIDF (sinusoidal input describing function)와 RIDF (random input describing function)가 있다.⁽⁸⁾ SIDF를 이용한 준-선형 모델에 H_∞ 제어를 적용할 경우⁽⁹⁾에는 작동조건에 따라 여러 개의 제어기를 구해야 하는 단점이 있다. 그리고 RIDF 방법은 입력신호의 형태에 제한이 없어 이용하기가 편리하지만

* 회원, 부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소
E-mail : jskim@hyowon.pusan.ac.kr
TEL : (051)510-2317 FAX: (051) 512-9835

** 회원, 순천제일대학 기계전기제어과

H_2 노름(norm)에 대한 최적화를 통해 근사화 시키기 때문에 RIDF를 이용한 준-선형 모델에 H_∞ 제어방법을 직접 적용하기는 어렵다. 그래서 RIDF를 이용한 준-선형 모델에는 H_2 제어방법이 더 적합하다. 그렇지만 H_2/H_∞ 제어를 이용하면 RIDF를 이용한 근사오차를 어느 정도 줄이면서 H_∞ 제어의 장점도 얻을 수 있다.

선형시스템에 대한 H_2/H_∞ 최적제어방법으로는 Khargonekar,⁽¹⁰⁾ Berntein⁽¹¹⁾ 그리고 Doyle⁽¹²⁾의 연구가 주로 알려져 있으며, 일반적으로 비구조화된 섭동과 구조화된 섭동을 취급하는 문제로 분류된다. 그 중에서 구조화된 섭동에 대한 강인제어방법은 μ -합성법⁽¹³⁾과 Lyapunov 안정이론에 근거한 방법⁽¹⁴⁾ 등이 있다.

본 논문에서는 건마찰과 시스템의 구조화된 섭동이 동시에 존재하는 병렬형 역진자 시스템에 대해 RIDF를 이용하여 건마찰을 준-선형화 시키고 구조화된 섭동에 대해 Lyapunov 안정성에 근거한 2차 안정성(quadratic stability)을 보장하는 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어기 설계방법을 제안하고자 한다. 먼저 건마찰을 고려한 병렬형 역진자의 공칭 모델을 구하고 역진자 모델의 구조화된 섭동 모델을 구하여 선형 H_2/H_∞ 제어를 적용한 후 건마찰과 섭동을 동시에 고려할 수 있는 제어방법을 제안한다. 그리고 합성된 비선형 H_2/H_∞ 제어시스템에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 건마찰과 시스템 섭동에 대해 제안한 제어기법이 강인성을 유지할 수 있음을 보이고자 한다.

2. 건마찰 고려한 역진자 모델링

우선 건마찰 비선형 요소를 RIDF를 이용하여 모델링하기로 한다. Fig. 1은 RIDF 기법의 기본 개념을 나타낸 것이다.

$$f(x(t)) \cong N_m \cdot m(t) + N_r \cdot r(t) \tag{1}$$

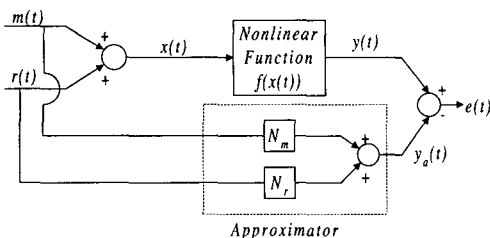


Fig. 1 The essential concept of RIDF technique

Fig. 1에서 $m(t)$ 는 $x(t)$ 의 기대값, $r(t)$ 는 $x(t)$ 의 0-평균 랜덤값을 나타낸다. 기술함수계인 N_m 과 N_r 은 다음과 같은 가격함수 J 로 정의되는 제곱오차의 기대값을 최소화하는 관점에서 구한다.

$$J = E[e^2] \tag{2}$$

여기서

$$e(t) = f(x(t)) - N_m \cdot m(t) - N_r \cdot r(t) \tag{3}$$

그리고 $E[\cdot] = \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) p(x) dx$, $p(x)$ 는 $x(t)$ 의 확률밀도함수(probability density function)이다. 가격함수 J 를 N_m 과 N_r 에 대해 최소화 시키면 N_m 과 N_r 을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_m = \frac{E[fm]}{m} \tag{4}$$

$$N_r = \frac{E[fr]}{E[r^2]} \tag{5}$$

랜덤입력에 대한 기술함수계인을 구하기 위해서는 $x(t)$ 의 통계학적 특성을 알아야 하거나 가정되어야 한다. 일반적으로 제어대상 시스템은 충분한 저주파 통과 필터(low-pass filter) 역할을 하므로 확률밀도함수 $p(x)$ 를 Gaussian 분포로 가정할 수 있다. 이 때, 스칼라의 경우 확률밀도함수 $p(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \tag{6}$$

여기서 σ_x 는 x 의 표준편차(standard deviation)이다.

이제 식 (5), (6)을 이용하여 건마찰 비선형요소에 대한 기술함수계인 N_r 을 구하기로 한다.

$$N_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx \tag{7}$$

여기서 비선형 함수 $f(x)$ 는 $T_f \text{sgn}(x)$ 이므로, 이것을 식 (7)에 대입하면 건마찰에 대한 기술함수계인 N_r 은 다음과 같이 얻어진다.

$$N_r = \frac{T_f \sqrt{2/\pi}}{\sigma_x} \tag{8}$$

여기서 T_f 는 건마찰 토크의 크기이다.

이제 본 연구대상 시스템인 Fig. 2에 표시된 병렬형 역진자를 모델링하기로 한다. 길이 l 인 역진자의 선단에 가변질량 m_i 인 팁(tip)이 부착되어 있고, 각각의 역진자가 회전축으로부터 a 인 위치에 강성값이 k 인 가변스프링으로 고정되어 있다.

모터부의 관성과 선단 질량을 연결하는 암(arm)의 질량 그리고 스프링의 질량을 무시하면, 미소 회전각과 임의의 값 m_i, k, a 에 대한 비선형 운동

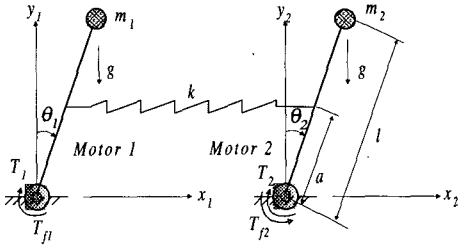


Fig. 2 Schematic diagram of the parallel inverted pendulum

방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 = m_1 g l \dot{\theta}_1 - T_{f1} \text{sgn}(\dot{\theta}_1) - k a^2 [\theta_1 - \theta_2] + T_1$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 = m_2 g l \dot{\theta}_2 - T_{f2} \text{sgn}(\dot{\theta}_2) - k a^2 [\theta_2 - \theta_1] + T_2 \quad (9)$$

여기서 T_i 는 모터의 입력토크, T_{fi} 는 건마찰 토크의 크기를 나타낸다.

그리고 식 (8)을 이용하여 건마찰 비선형 요소를 준-선형화 하면 식 (9)는 다음과 같이 준-선형 운동방정식으로 표현할 수 있다.

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 = m_1 g l \theta_1 - N_1 \dot{\theta}_1 - k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + T_1$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 = m_2 g l \theta_2 - N_2 \dot{\theta}_2 - k a^2 (\theta_2 - \theta_1) + T_2 \quad (10)$$

여기서

$$N_i = \frac{T_{fi} \sqrt{2/\pi}}{\sigma_{\dot{\theta}_i}} \quad (i=1, 2).$$

그리고 섭동을 고려하지 않은 공칭모델에 대한 준-선형 운동방정식 (10)을 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{N}_A \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{N}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{g} - \frac{k a^2}{m_1 l^2}\right) & \frac{N_1}{m_1 l^2} & \frac{k a^2}{m_1 l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k a^2}{m_2 l^2} & 0 & \left(\frac{1}{g} - \frac{k a^2}{m_2 l^2}\right) & \frac{N_2}{m_2 l^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1 l^2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2 l^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}(t) = [T_1 \ T_2]^T, \quad \mathbf{x}(t) = [\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2]^T.$$

3. 비선형 H_2/H_∞ 강인제어

3.1 준-선형 모델에 대한 선형 H_2/H_∞ 강인제어

H_2 제어는 시스템의 성능에 관심을 두며 H_∞ 제어는 시스템의 강인성에 관심을 두는 제어기법으로 알려져 있다. 그리고 2 가지 제어를 절충한 방법으로서 H_2/H_∞ 제어가 연구되었다. 그런데 이러한 방법들은 직접적으로 구조화된 섭동과 불연속 비선형 요소를 포함한 시스템의 제어를 시도하기에는 어려움이 있다. 이 절에서는 Doyle⁽¹²⁾ 등이 연구한 선형 H_2/H_∞ 제어를 구조화된 섭동과 건마찰이 존재하는 병렬 역진자의 강인제어에 적용할 수 있는 제어 방법을 제안하기로 한다.

우선 식 (11)을 역진자의 선단 질량과 스프링 강성값의 섭동을 포함한 준-선형 모델로 전환하고 가중행렬(weighting matrix)들을 첨가하기로 한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{N}_A + \Delta \mathbf{N}_A) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_0(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1(t) + (\mathbf{B}_2 + \Delta \mathbf{B}_2) \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{20} \mathbf{w}_0(t) + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}_1(t) \quad (12)$$

여기서 $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{20}, \mathbf{D}_{21}$ 은 적당한 차원을 갖는 가중행렬, \mathbf{C}_2 는 플랜트 출력행렬, $\mathbf{w}_0(t), \mathbf{w}_1(t)$ 는 각각 H_2 제어 관점에서의 Gaussian 백색 잡음 입력벡터, H_∞ 제어 관점에서의 한정된 확정적 파워신호(bounded deterministic power signal) 입력 벡터이다. 그리고 $\mathbf{z}(t)$ 는 가중오차(weighted error) 벡터를 나타낸다. 그리고 $\Delta \mathbf{N}_A, \Delta \mathbf{B}_2$ 는 각각 섭동을 나타내는 행렬이다. 시스템 식 (12)에 대해 다음과 같은 가정을 한다.

(1) $(\mathbf{N}_A, \mathbf{B}_1)$ 과 $(\mathbf{N}_A, \mathbf{B}_2)$ 는 안정가능하고,

$(\mathbf{C}_1, \mathbf{N}_A)$ 과 $(\mathbf{C}_2, \mathbf{N}_A)$ 는 검출가능하다.

(2) $\mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{12}^T = \mathbf{0}, \mathbf{B}_0 \mathbf{D}_{20}^T = \mathbf{0}, \mathbf{D}_{21} \mathbf{D}_{21}^T = \mathbf{R}_1 \geq \mathbf{0},$

$\mathbf{D}_{20} \mathbf{D}_{20}^T = \mathbf{R}_0 \geq \mathbf{0}.$

(3) $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}.$

그리고 비선형 제어기 $\mathbf{K}(s)$ 를 다음과 같은 상태공간 모델식으로 표현한다.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{N}_c \mathbf{x}_c(t) - \mathbf{L} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_\infty \mathbf{x}_c(t) \end{cases} \quad (13)$$

이 때 페루프 시스템의 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\tilde{\mathbf{N}}_A + \Delta \tilde{\mathbf{N}}_A) \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}_0 \mathbf{w}_0(t) + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w}_1(t) \\ \mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (14)$$

여기서

$$\tilde{N}_A = \begin{bmatrix} N_A & B_2 F_\infty \\ -LC_2 & N_c \end{bmatrix}, \quad \Delta \tilde{N}_A = \begin{bmatrix} \Delta N_A & \Delta B_2 F_\infty \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ -LD_{20} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ -LD_{21} \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad D_{12} F_\infty], \quad \tilde{x}(t) = [x(t) \quad x_c(t)]^T.$$

이러한 페루프 시스템에 대한 H_2/H_∞ 제어기는 다음의 설계 조건들을 만족해야 한다.

- (1) $w_1(t)$ 로부터 $z(t)$ 로의 전달함수행렬 $T_{zw1}(s)$ 에 대해 $\|T_{zw1}(s)\|_\infty < \gamma$ 를 구속조건으로 하여 $w_0(t)$ 에서 $z(t)$ 의 전달함수행렬 $T_{zw0}(s)$ 의 H_2 노음의 상한치(upper bound)를 최소화.
- (2) 시스템의 구조화된 섭동 $\Delta N_A, \Delta B_2$ 에 대해 강인성을 유지.
- (3) 건마찰에 대한 강인성을 유지.

다음 위의 조건들을 만족시키면서 페루프시스템을 내부적으로 안정화시키는 비선형 제어를 $K(s)$ 를 설계하는 과정을 전개하기로 한다. 먼저 구조화된 섭동의 집합 U 를 다음과 같이 정의한다.⁽¹⁴⁾

$$U = \{(\Delta N_A, \Delta B_2) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times m} : \Delta N_A = \sum_{i=1}^p D_i M_i N_i E_i, \Delta B_2 = \sum_{i=1}^p D_i M_i N_i G_i \quad (15)$$

$$M_i M_i^T \leq \bar{M}_i, N_i^T N_i \leq \bar{N}_i, i=1, \dots, p\}$$

여기서 $D_i \in \mathbf{R}^{n \times r_i}, E_i \in \mathbf{R}^{r_i \times n}, G_i \in \mathbf{R}^{r_i \times m}$ 는 섭동의 구조를 표시하는 상수행렬이고, $\bar{M}_i \in \mathbf{N}^{r_i \times r_i}$ 와 $\bar{N}_i \in \mathbf{N}^{r_i \times r_i}$ 는 주어진 섭동의 한계(bound)를 나타내며, $\bar{M}_i \bar{N}_i = I$ 를 만족한다. 그리고 r_i, s_i, t_i 는 각각 섭동행렬 D_i, E_i, G_i 의 차수에 따라 정해지는 차수를 나타낸다. 그러면 구조화된 섭동의 페루프 구조는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta \tilde{N}_A = \sum_{i=1}^p \tilde{D}_i M_i N_i \tilde{E}_i \quad (16)$$

여기서

$$\tilde{D}_i = \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = [E_i \quad G_i F_\infty].$$

설계조건 (1), (2)에 대해 H_2/H_∞ 강인제어를 위한 최적화문제는 다음의 페루프 시스템에 대한 Riccati 방정식을 구속조건으로 H_2 가격함수의 상한치인 $Tr \tilde{X}, \tilde{R}$ 를 최소화하는 파라미터 $\tilde{X}_r, N_c, L, F_\infty$ 를 결정하는 문제이다.

$$\tilde{N}_A^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \tilde{N}_A + \gamma^{-2} \tilde{X}_r \tilde{R}_\infty \tilde{X}_r + \sum_{i=1}^p (\tilde{E}_i^T \bar{N}_i \tilde{E}_i + \tilde{X}_r \tilde{D}_i \bar{M}_i \tilde{D}_i^T \tilde{X}_r) + \tilde{V} = 0 \quad (17)$$

여기서

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} B_0 B_0^T & 0 \\ 0 & LR_0 L^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_\infty = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & LR_1 L^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T F_\infty \end{bmatrix}.$$

이러한 최적화 문제는 구속조건을 나타내는 Lagrangian 곱셈(multiplier) 대칭행렬 \tilde{P} 를 식 (17)과 결합하고 $Tr \tilde{X}, \tilde{R}$ 을 포함한 다음과 같은 Lagrangian L 을 파라미터 $\tilde{X}_r, N_c, L, F_\infty$ 와 \tilde{P} 각각에 대해 최소화하는 문제로 변환된다.

$$L = Tr\{\tilde{X}, \tilde{R} + [\tilde{N}_A^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \tilde{N}_A + \gamma^{-2} \tilde{X}_r \tilde{R}_\infty \tilde{X}_r + \sum_{i=1}^p (\tilde{E}_i^T \bar{N}_i \tilde{E}_i + \tilde{X}_r \tilde{D}_i \bar{M}_i \tilde{D}_i^T \tilde{X}_r) + \tilde{V}]\tilde{P}\} \quad (18)$$

여기서 \tilde{X}_r 와 \tilde{P} 를 플랜트와 제어기의 상태변수 개수에 따라 부분행렬(submatrices)로 다음과 같이 나누어 최적화를 수행한다.

$$\tilde{X}_r = \begin{bmatrix} X_\infty + Y & Y \\ Y & Y \end{bmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} P + \hat{P} & -\hat{P} \\ -\hat{P} & \hat{P} \end{bmatrix} \quad (19)$$

최종적으로 최적화는 식 (18)을 제어기 파라미터 N_c, L, F_∞ 와 \tilde{X}_r 와 \tilde{P} 의 부분행렬로 표현되는 변수들에 대해 미분하고 정리하면, 다음과 같이 주어지는 3개의 연성된 Riccati 방정식과 제어기 파라미터들을 구할 수 있다. 여기서 $R_1 = \beta^2 R_0$ (β 는 상수)로 두면 전개과정이 편리해진다.

Riccati 방정식 :

$$N_A^T X_\infty + X_\infty N_A + X_\infty (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) X_\infty - X_N^T R_{2N}^{-1} X_N + C_1^T C_1 + E_{1N} = 0 \quad (20)$$

$$[N_A - SP\Sigma + (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) X_\infty]^T Y + Y [N_A - SP\Sigma + (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) X_\infty] + Y [\gamma^{-2} (B_{1N} + \beta^2 SP\Sigma PS^T) + D_M] Y + X_N^T R_{2N}^{-1} X_N = 0 \quad (21)$$

$$[N_A + (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) (X_\infty + Y)] P + P [N_A + (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) (X_\infty + Y)]^T - SP\Sigma PS^T + B_{0N} + \Psi(P, \hat{P}, X_\infty, Y, N, N_c) = 0 \quad (22)$$

제어기 파라미터 :

$$N_c = N_A - B_{2N} R_{2N}^{-1} X_N - SP\Sigma + (\gamma^{-2} B_{1N} + D_M) X_\infty \quad (23)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{C}_2^T \mathbf{R}_0^{-1} \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_\infty = \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N \quad (25)$$

여기서

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I}_n + \gamma^{-2} \beta^{-2} \mathbf{P} \mathbf{Y})^{-1}, \Sigma = \mathbf{C}_2^T \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{C}_2, \mathbf{B}_{1N} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T,$$

$$\mathbf{B}_{0N} = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T, \mathbf{D}_M = \sum_{i=1}^p \mathbf{D}_i \bar{\mathbf{N}}_i \mathbf{D}_i^T,$$

$$\mathbf{R}_{2N} = \mathbf{I}_n + \sum_{i=1}^p \mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{N}}_i \mathbf{G}_i, \mathbf{X}_N = \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty + \sum_{i=1}^p \mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{N}}_i \mathbf{E}_i.$$

그리고 비선형 특성 때문에 Riccati 방정식 (22)에 나타나는 비선형 보정항 $\Psi(\cdot)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi(\cdot) = & 2\text{Tr}[(\mathbf{P} + \hat{\mathbf{P}}) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial (\mathbf{X}_\infty + \mathbf{Y})} (\mathbf{X}_\infty + \mathbf{Y})] \\ & - \text{Tr}[\hat{\mathbf{P}} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{Y}} \mathbf{Y}] - \text{Tr}[\hat{\mathbf{P}} \frac{\partial \mathbf{N}_c^T}{\partial \mathbf{Y}} \mathbf{Y}] \end{aligned} \quad (26)$$

위의 제어를 설계하기 위해서는 미리 표준편차를 가정하고 연성된 Riccati 방정식 (20), (21), (22)를 순환과정(iteration process)을 통해 풀고 다시 페루프 시스템에 대한 Riccati 방정식 (17)을 풀어서 정확한 표준편차와 식 (24), (25)의 계인값을 구해 제어를 합성해야 한다. 그러나 제어를 구하기 위해서는 상태변수들의 가정된 표준편차 값에 대해 식 (20)을 풀고 연성된 식 (21), (22)를 풀어서 제어기 파라미터를 구하여 페루프 시스템을 구성한 후 다시 식 (17)을 풀어서 구한 상태변수들의 표준편차와 비교하여 일정한 오차값 이내로 수렴할 때까지 앞의 계산과정을 반복한다. 여기서 상태변수의 차수가 n 일 때 미지수 $\tilde{\mathbf{X}}$ 의 차수는 $n(2n+1)$ 이고, 식 (22)의 미지수 \mathbf{P} 의 차수는 $n(n+1)/2$ 이므로, 시스템의 차수 n 이 커지면 비선형 보정항이 포함될 경우 각 Riccati 방정식의 해를 수치적으로 풀기가 매우 어렵게 된다. 그러므로 제어기 설계과정에서 이러한 비선형 보정항을 잘 처리할 수 있다면 제어기 설계가 매우 간편해질 수 있다. 따라서 3.2절에서 이러한 비선형 보정항을 처리하는 문제를 전개하기로 한다.

3.2 비선형 H_2/H_∞ 강인제어기 설계

Riccati 방정식에 포함되어 있는 $\mathbf{P}, \mathbf{Y} \in \mathbf{N}^n$ (\mathbf{N}^n 은 음이 아닌 한정행렬(nonnegative definite matrix))에 대해 $\mathbf{Z} \in \mathbf{N}^n = \mathbf{S} \mathbf{P}$ 로 정의하면 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T = \mathbf{P} \mathbf{S}^T$ 이다. 만일 $\mathbf{P} \in \mathbf{P}^n$ (양의 한정(positive definite))이면, $\mathbf{Z} \in \mathbf{P}^n$ 이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{P}^{-1} + \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Y})^{-1} \quad (27)$$

정리 1: 식 (20), (21), (22)를 만족하는 $\mathbf{X}_\infty \in \mathbf{N}^n$,

$\mathbf{Y} \in \mathbf{N}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{P}^n$ 이 존재한다면 $\mathbf{Z} \in \mathbf{N}^n = \mathbf{S} \mathbf{P}$ 와 함께 식 (20), (21), (22)는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}_A^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{N}_A + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty \\ & - \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{E}_N = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{N}_A - \mathbf{Z} \Sigma + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty]^T \mathbf{Y} \\ & + \mathbf{Y} [\mathbf{N}_A - \mathbf{Z} \Sigma + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty] \\ & + \mathbf{Y} [\gamma^{-2} (\mathbf{B}_{1N} + \beta^2 \mathbf{Z} \Sigma \mathbf{Z}) + \mathbf{D}_M] \mathbf{Y} \\ & + \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{N}_A + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty \\ & + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{B}_{0N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{Y}] \mathbf{Z} \\ & + \mathbf{Z} [\mathbf{N}_A + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty \\ & + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{B}_{0N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{Y}]^T \\ & + \mathbf{B}_{0N} - \mathbf{Z} [\Sigma + \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Y} (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M \\ & - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{B}_{0N}) \mathbf{Y}] \mathbf{Z} + \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Z} \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N \mathbf{Z} \\ & + (\mathbf{I}_n - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Z} \mathbf{Y}) \Psi(\cdot) (\mathbf{I}_n - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Y} \mathbf{Z}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (30)$$

증명 : 식 (28)은 식 (20)과 동일한 형태이고 식 (29)는 $\mathbf{Z} \in \mathbf{N}^n = \mathbf{S} \mathbf{P}$ 를 식 (21)에 대입하면 구할 수 있다. 식 (30)은 식 (22)의 좌측에 $(\mathbf{I}_n - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Z} \mathbf{Y})$, 우측에 $(\mathbf{I}_n - \gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Y} \mathbf{Z})$ 를 곱한 식에 식 (21)의 좌측에 $\gamma^{-2} \beta^2 \mathbf{Z}$ 를 곱하고 우측에 \mathbf{Z} 를 곱한 식을 더하여 정리하면 간단하게 얻을 수 있다.

다음 단계로서 다음의 가정을 한다.

$$\beta = 1, \mathbf{B}_{1N} = \mathbf{B}_{0N} \quad (31)$$

그리고 $\mathbf{Y} = \gamma^2 \mathbf{Z}^{-1}$ 로 두면 식 (31)의 가정하에

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\infty \quad (32)$$

로 정의할 수 있다.

정리 2: 식 (31)의 가정이 만족된다면 다음의 Riccati 방정식을 만족시키는 $\mathbf{X}_\infty \in \mathbf{N}^n$ 와 $\mathbf{Z}_\infty \in \mathbf{N}^n$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}_A^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{N}_A + \mathbf{X}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty \\ & - \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{E}_N = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{N}_A + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty] \mathbf{Z}_\infty + \mathbf{Z}_\infty [\mathbf{N}_A \\ & + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty]^T + \mathbf{Z}_\infty (\gamma^{-2} \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N \\ & - \Sigma) \mathbf{Z}_\infty + \mathbf{B}_{1N} + \gamma^2 \mathbf{D}_M = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (34)$$

그리고 제어기 파라미터는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{N}_c = \mathbf{N}_A - \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N - \mathbf{Z}_\infty \Sigma + (\gamma^{-2} \mathbf{B}_{1N} + \mathbf{D}_M) \mathbf{X}_\infty \quad (35)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{Z}_\infty \mathbf{C}_2^T \mathbf{R}_0^{-1} \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_\infty = \mathbf{R}_{2N}^{-1} \mathbf{X}_N \quad (37)$$

증명 : 1) 식 (29)의 좌측에 $\gamma^{-2} \mathbf{Z}_\infty$ 를 곱하고 우측에 \mathbf{Z}_∞ 를 곱하여 정리하면 식 (34)와 동일한

결과를 얻을 수 있다.

2) 식 (31)의 가정과 식 (32)의 정의를 식 (29)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & [N_A + (\gamma^{-2}B_{1N} + D_M)X_\infty \\
 & + (\gamma^{-2}B_{1N} - \gamma^{-2}B_{1N} + D_M)\gamma^2 Z_\infty^{-1}]Z_\infty \\
 & + Z_\infty[N_A + (\gamma^{-2}B_{1N} + D_M)X_\infty \\
 & + (\gamma^{-2}B_{1N} - \gamma^{-2}B_{1N} + D_M)\gamma^2 Z_\infty^{-1}]^T + B_{1N} \quad (38) \\
 & - Z_\infty[\Sigma + \gamma^{-2}\gamma^2 Z_\infty^{-1}X_\infty(\gamma^{-2}B_{1N} + D_M - \gamma^{-2}B_{1N}) \\
 & \gamma^2 Z_\infty^{-1}]Z_\infty + \gamma^{-2}Z_\infty X_N^T R_N^{-1} X_N Z_\infty \\
 & + (I_n - \gamma^{-2}\gamma^2 Z_\infty^{-1})\Psi(I_n - \gamma^{-2}\gamma^2 Z_\infty^{-1})Z_\infty = 0
 \end{aligned}$$

식 (38)을 정리하면 식 (34)와 동일한 결과를 얻을 수 있으며 제어기 파라미터는 주어진 조건들을 대입하면 쉽게 구할 수 있다. □

증명 과정의 식 (38)을 살펴보면 비선형 보정항이 소거됨을 알 수 있다. 그래서 Riccati 방정식 식 (33)과 식 (34)는 선형시스템의 Riccati 방정식과 비교하면 기술함수계인 항이 포함된 것만을 제외하고는 선형시스템의 경우와 동일하므로 쉽게 제어기를 설계할 수 있게 된다. 결과적으로 준-선형 시스템에 대해 선형 H_2/H_∞ 제어를 적용할 수 있음을 보였다.

참조 1: 일반적으로 H_2/H_∞ 제어에서 $\gamma \rightarrow \infty$ 일 경우 H_2/H_∞ 제어는 H_2 제어로 귀착되나 여기서는 $\gamma \rightarrow \infty$ 경우 다른 방법을 사용하여 비선형 보정항을 소거해야 하며 제어기 설계시 Riccati 방정식을 풀 수 없게 된다.

비선형 H_2/H_∞ 제어기를 설계하는 절차는 QLQG/LTR 제어기 설계절차⁽¹⁵⁾와 유사하다. 먼저 Gaussian 백색잡음 입력에 대한 오차출력 $z(t)$ 의 가중강도 R_z 의 적당한 범위를 가정하고 각 R_z 값에 대한 표준편차와 기술함수계인을 가정한다. 다음에 Riccati 방정식 (33)과 식 (34)를 풀고 식 (39)로 주어지는 페루프 시스템에 대한 공분산전파식(covariance propagation equation)인 Lyapunov 식을 동시에 풀어서 새로 계산된 기술함수계인 및 제어계인과 필터계인을 구한 후 가정된 표준편차와 계산된 값의 차이가 특정 값 이하로 수렴할 때 까지 설계과정을 반복한 후 최종적으로 IRIDF (inverse random input describing function)기법⁽¹⁶⁾을 이용하여 비선형 함수를 구하여 비선형 제어기를 합성한다.

$$\tilde{N}_A^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \tilde{N}_A + \sum_{i=1}^p (\tilde{E}_i^T \tilde{N}_i \tilde{E}_i) + \tilde{V}_z = 0 \quad (39)$$

여기서 $\tilde{V}_z = \begin{bmatrix} C_1^T R_z C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T R_z F_\infty \end{bmatrix}$.

4. 시뮬레이션 및 고찰

4 절에서는 3 절에서 유도한 준-선형시스템에 대하여 제안된 강인제어방법을 검증하기 위해서 병렬형 역진자에 대한 비선형 H_2/H_∞ 제어시스템을 설계하여 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 검토하기로 한다. 병렬형 역진자 시스템 파라미터는 모터 축에서 선단까지 길이 l 을 $0.4m$, 선단 질량 값이 m_i 는 $0.3 kg$, 연결스프링의 강성값은 $5 N/m$, 그리고 모터 축에서 스프링이 부착된 지점까지의 길이 a 는 $0.2m$ 로 정하였다. 그리고 각 모터 축에서의 건마찰의 크기 T_{fi} 는 $2N.m$ 이며 선단 질량이 최대 65% 까지 증가하고 연결스프링의 강성 값이 최대 65% 까지 감소하는 경우의 섭동모델을 선정한다. 그리고 일정한 입력에 대해 0-정상상태오차가 되도록 적분기 2 개를 플랜트 출력측에 첨가한 6 차 시스템을 설계플랜트 모델로 설정한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= (N_{AP} + \Delta N_{AP})x(t) + B_{P1}w_1(t) \\
 &+ (B_{P2} + \Delta B_{P2})u(t) \\
 z(t) &= C_{P1}x(t) + D_{P12}u(t) \quad (40) \\
 y(t) &= C_{P2}x(t) + D_{P21}w_1(t)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 N_{AP} &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & C_2 \\ 0_{4 \times 2} & N_A \end{bmatrix}, & B_{P2} &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ B_2 \end{bmatrix}, \\
 C_{P2} &= [I_2 \quad 0_{2 \times 4}], & C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

그리고 설계 파라미터와 가중행렬들은 다음과 같이 정하였다.

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 1.2, & B_{P1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2.083 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.083 \end{bmatrix}^T, \\
 C_{P1} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{P21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \times 10^{-5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

그리고 섭동구조를 나타내는 행렬과 섭동에 대한 가중치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.812 & 0 & -1.812 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.812 & 0 & 1.812 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 E_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 2.865 & 0 \\ 0 & 2.865 \end{bmatrix},$$

$$\bar{M}_i = 13, \bar{N}_i = \frac{1}{M_i} \quad (i=1, 2).$$

4.1 섭동을 무시한 병렬형 역진자의 비선형 H₂/H_∞ 제어

먼저 구조화된 섭동이 없고 건마찰이 존재하는 공칭 병렬형 역진자의 비선형 H₂/H_∞ 제어시스템을 3.2 절에서 제안한 설계방법에서 섭동부분을 무시하고 설계하기로 한다. 설계대상 시스템은 식 (40)에서 구조화된 섭동을 무시한 시스템이다. Table 1 은 가정된 오차 가중 강도 R_z 와 계산된 건마찰의 기술함수계인 N_{c1}, 그리고 제어기의 비선형요소의 입력상태변수 x_{c4} 의 표준편차 σ_{c4} 를 나타낸다. 건마찰의 기술함수계인 N_{c2} 와 제어기의 비선형요소의 입력상태변수의 표준편차 σ_{c6} 사이의 관계는 Table 1 과 동일한 특성을 갖는다. Fig. 3 은 제어기의 비선형요소의 기술함수계인 특성과 IRIDF 를 이용하여 계산된 제어기에 구현된 비선형함수 f_{c4}(x_{c4}) 를 나타낸다.

그리고 각 R_z 에 대해 제어계인과 필터계인을 구한 결과 제어계인요소 F_{∞ij} 중에서 F_{∞14} 와 F_{∞26} 이 동일하게 출력에 민감하게 영향을 주는 비선형 특성을 나타내고 있다. Table 2 는 각 R_z 에 변화에 따른 제어계인 F_{∞14} 와 표준편차 σ_{c4} 를 나타내며

Table 1 DF gains N_{c1} and standard deviations σ_{c4} for the assumed error weighting intensities

R _z	10 ⁸	10 ⁷	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	10 ²
N _{c1}	0.001	0.004	0.011	0.036	0.128	0.627	5.412
σ _{c4}	1462	461	144	44.14	12.46	2.547	0.295

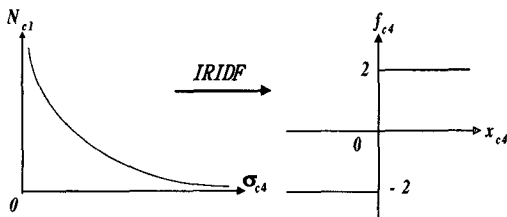


Fig. 3 DF gain characteristics and nonlinear function f_{c4}(x_{c4}) implemented in the controller

Fig. 4 의 좌측에 관계가 나타나 있다. 이러한 제어계인의 비선형성은 사역대 요소로 계산할 수 있다. 사역대의 기술함수계인 F_{∞14} = 1 - erf(δ/σ_{c4}) 이다. 여기서 δ 는 사역대의 간격, σ_{c4} 는 사역대 요소의 입력의 표준편차, 그리고 erf(·) 는 error 함수를 나타낸다. Fig. 4 의 우측 그림은 IRIDF 를 이용하여 구현된 비선형함수이다. 이러한 결과를 토대로 비섭동 플랜트에 대해 비선형 H₂/H_∞ 제어를 설계하였다.

Fig. 5 는 건마찰을 고려하지 않고 설계한 선형 H₂/H_∞ 제어기 K(s) 를 건마찰을 무시한 플랜트 G(s) 와 건마찰을 고려한 플랜트 G_N(s) 에 대해 각각 결합시킨 제어시스템의 정규화된(normalized) 계단응답을 나타내고 있다. 본 논문에서 제시한 계단응답은 모두 입력방향이 [1 1]^T 에서 구하였다.

Table 2 DF gains F_{∞14} and standard deviations σ_{c4} for the assumed error weighting intensities

R _z	10 ⁸	10 ⁷	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	10 ²
F _{∞14}	0.607	0.605	0.60	0.583	0.527	0.352	0.128
σ _{c4}	1462	461	144.3	44.14	12.46	2.547	0.295

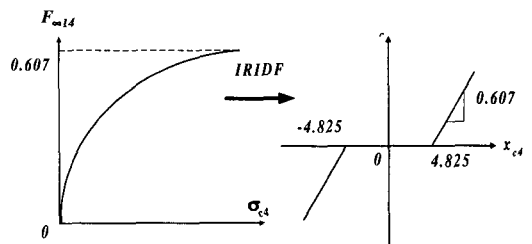


Fig. 4 DF gain characteristics and nonlinear function f_{c14}(x_{c4}) implemented in the controller

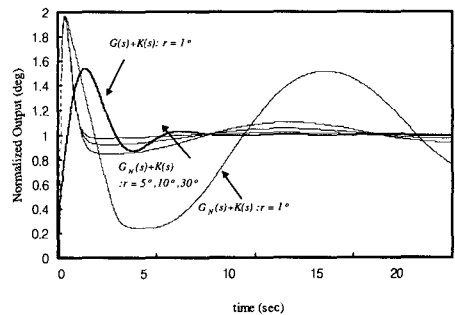


Fig. 5 Normalized step responses of the H₂/H_∞ control system for the linear and nonlinear plants

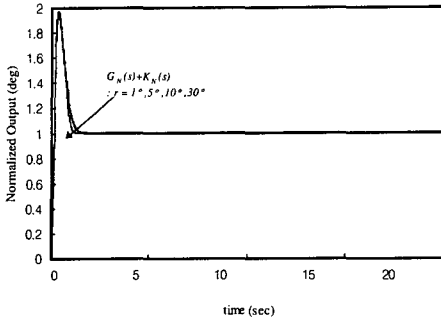


Fig. 6 Normalized step responses of the nonlinear H_2/H_∞ control system for the nonlinear plant

Fig. 5를 살펴보면 작은 각 위치를 제어할 때 건마찰로 인해 오차가 크게 발생하고 있으며 각 위치가 커질수록 오차가 작아지고 있다. 이것은 작은 각 위치를 제어할 경우 제어토크가 작으므로 건마찰에 의한 토크가 제어토크의 동작에 영향을 주기 때문이다. 그래서 특히 제어입력이 작을 경우에 건마찰은 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

이러한 문제에 대해 제안한 비선형 H_2/H_∞ 제어기 $K_N(s)$ 를 이용하여 설계한 제어시스템의 정규화된 계단응답의 결과는 Fig. 6에 제시되어 있다. 선형 H_2/H_∞ 제어시스템에서 발생하는 작은 입력에서의 오차가 거의 나타나지 않고 있으므로 제안된 제어기법이 우수함을 알 수 있다.

4.2 섭동을 고려한 병렬형 역진자의 비선형 H_2/H_∞ 제어

이 절에서는 먼저 병렬형 역진자의 구조화된 섭동만 존재하는 경우에 대한 강인한 H_2/H_∞ 제어 시스템을 설계하고, 다음 구조화된 섭동과 건마찰을 동시에 고려한 병렬형 역진자 시스템에 대해 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어시스템을 설계하여 제안한 제어방법이 강인성을 유지함을 보이고자 한다. 식 (40)의 상태공간모델에서 건마찰의 기술함수를 제외한 구조화된 섭동과 설계 파라미터들은 식 (40) 이하에 제시되어 있다. Fig. 7은 건마찰이 무시된 플랜트에 대하여 구조화된 섭동을 고려하여 설계한 H_2/H_∞ 제어시스템과 구조화된 섭동을 고려하지 않고 설계한 H_2/H_∞ 제어시스템의 단위 계단응답을 나타낸다. Fig. 7에서 병렬형 역진자의 질량과 강성값의 65% 변화에 대해 강인한 선형 H_2/H_∞ 제어시스템은 공칭시스템의 응답과 거의 유사하게 출력성능이 우수하게 나타남을 알 수 있

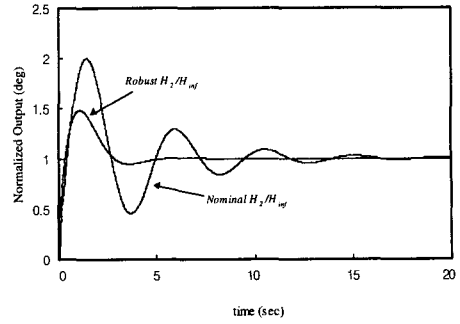


Fig. 7 Unit step responses of the H_2/H_∞ control systems with / without perturbation

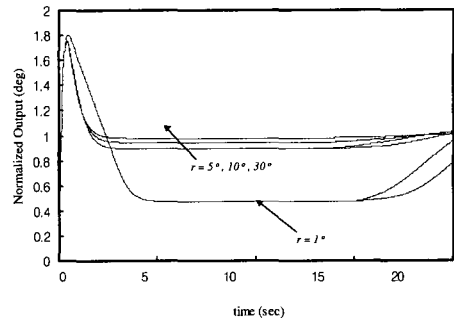


Fig. 8 normalized step responses of the H_2/H_∞ control system with perturbation and dry friction

다. 그래서 제안한 강인한 H_2/H_∞ 제어방법이 구조화된 섭동이 존재할 때 강인한 성능을 유지하는 방법임을 확인할 수 있다.

그런데 병렬형 역진자 시스템에 건마찰이 존재할 때 이러한 비선형성을 고려하지 않은 경우 강인한 선형 H_2/H_∞ 제어시스템은 Fig. 8과 같이 작은 명령입력에 대해 정착시간이 길어지는 현상이 나타나는 것과 같이 출력성능이 악화됨을 알 수 있다.

그러므로 최종적으로 건마찰과 구조화된 섭동에 대해 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어시스템을 설계하기로 한다. Table 3은 가정된 오차가중강도 R_2 와 계산된 건마찰의 기술함수계인 N_{c1} , 그리고 제어기의 비선형요소의 입력변수 x_{c4} 의 표준편차 σ_{c4} 를 나타낸다. Table 3에 주어진 제어기의 비선형요소의 기술함수계인 N_{c1} 특성을 IRIDF를 이용하여 제어기에 구현될 비선형함수 $f_{c4}(x_{c4})$ 로 나타내면 Fig. 3에 표시된 $f_{c4}(x_{c4})$ 의 경우와 동일하

Table 3 DF gains N_{c1} and standard deviations σ_{c4} for the assumed error weighting intensities

R_z	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2
N_{c1}	0.001	0.002	0.008	0.025	0.082	0.344	2.972
σ_{c4}	2057	650	205	64.2	19.35	4.635	0.535

Table 4 DF gains $F_{\infty 13}$ and standard deviations σ_{c3} for the assumed error weighting intensities

R_z	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2
$F_{\infty 13}$	7.524	7.524	7.524	7.526	7.541	7.756	10.41
σ_{c3}	94932	29965	9417	2913	839.6	166.6	14.15

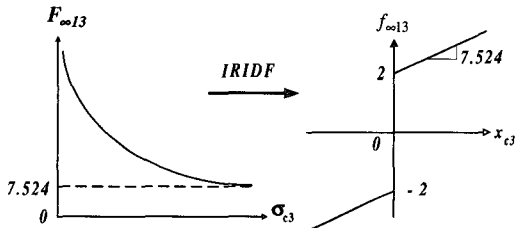


Fig. 9 DF gain characteristics and nonlinear function $f_{\infty 13}(x_{c3})$ implemented in the controller

다. 그리고 N_{c2} 와 σ_{c6} 사이의 관계도 Table 3 과 동일한 특성을 갖는다.

그리고 각 R_z 에 대해 제어게인과 필터게인을 구한 결과 제어 게인요소 중에서 $F_{\infty 13}$ 과 동일하게 Table 4와 Fig. 9의 좌측의 그림과 같이 출력에 민감하게 영향을 주는 비선형 특성을 나타내고 있다.

이러한 비선형 특성은 건마찰과 일정 제어게인이 복합적으로 결합된 것으로서 Fig. 9의 우측 그림과 같이 IRIDF 기법을 이용하여 계산할 수 있다. 그래서 제어게인 요소중 2개의 요소는 Fig. 9의 우측 그림과 같은 비선형 요소로 구성되며 각 R_z 변화에 따른 나머지 제어게인요소와 필터게인 요소들의 변화는 출력성능에 거의 영향을 주지 않고 있으므로 일정 게인요소로 구성하였다.

Fig. 10에는 구조화된 섭동과 건마찰을 고려하여 설계한 강인한 H_2/H_∞ 제어시스템의 정규화된 계단응답이 제시되어 있다. Fig. 10을 살펴보면 명령입력의 크기에 상관없이 플랜트의 구조화된 섭동과 비선형 건마찰에 대해 동시에 강인한 출력성능을 유지하고 있음을 알 수 있다.

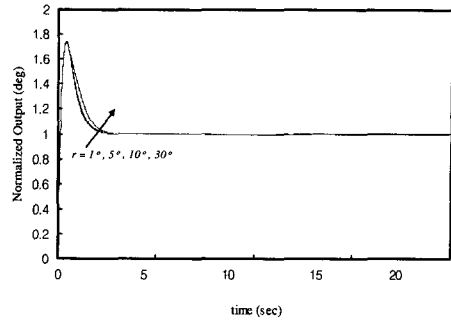


Fig. 10 Normalized step responses of the robust nonlinear H_2/H_∞ control system with perturbation and dry friction

결론적으로 제안한 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어 방법은 건마찰과 구조화된 섭동이 별개로 또는 동시에 존재하는 병렬형 역진자 시스템에 대해 강인한 제어시스템을 설계할 수 있음을 보여 주고 있다. 특히 작은 각 위치제어 같은 정밀한 제어가 필요시 매우 좋은 성능을 발휘함을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 병렬형 역진자 시스템을 모델링 하고 병렬형 역진자의 회전 구동부에서 발생하는 건마찰과 역진자의 시스템 파라미터가 변할 때 구조화된 섭동에 대해 동시에 강인성을 고려하는 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어시스템을 설계할 수 있는 방법을 제안하였다. 비선형 건마찰을 RIDF 기법을 이용하여 준-선형 모델을 구성하였고 구조화된 섭동에 대해 2차 안정성을 보장하는 강인제어를 선형 H_2/H_∞ 제어기법과 결합하여 비선형 보정항이 포함된 연성된 3개의 Riccati 방정식과 제어기 파라미터를 유도하였다. 그리고 Riccati 방정식에 대한 2단계 변환과정을 통해 가중행렬에 대한 일정한 가정하에 Riccati 방정식에 포함된 비선형 보정항을 소거하여 선형 H_2/H_∞ 제어방법과 유사한 제어방법을 유도하여 제어기 설계를 용이하게 할 수 있음을 보였다.

제안된 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어방법을 건마찰과 구조화된 섭동이 동시에 존재하는 병렬형 역진자 시스템에 대해 제어기를 합성하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한 결과 제안한 제어방법을 통해 설계한 강인한 비선형 H_2/H_∞ 제어방법은 구조화된 섭동과 비선형 건마찰이 동시에 존재하더라도 강인한 출력성능을 유지하고 있음을 보였다. 또한

제안한 방법은 정밀한 서보 제어시스템 설계시 매우 효과적이며 더 나아가 다른 유사한 구조화된 섭동과 사역대 같은 불연속 비선형 모델에 대해서도 강인한 제어시스템을 설계할 수 있는 방법임을 알 수 있다.

추후 연구로는 병렬 역진자를 실험적으로 구성하고 DSP 시스템을 이용하여 제안한 제어알고리즘을 구현하여 실시간 연구를 수행할 예정이다. 또한 불연속 비선형이 존재하는 시스템에 대해 H_{∞} 제어와 구조화된 섭동을 고려한 μ -합성법 등을 이용하여 강인한 비선형 제어를 설계할 수 있는 방법에 대한 연구가 지속적으로 되어야 할 것이다.

후 기

이 논문은 1998년 한국 학술진흥재단의 학술연구비에 의해 지원되었으며 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Elthohamy, K. G., Kuo, C. Y., 1998, "Nonlinear Optimal a Triple Link Inverted Pendulum with Single Control Input," *Int. J. Control*, Vol. 60, No. 2, pp. 239-256.
- (2) Anderson, C. W., 1989, "Learning to Control an Inverted Pendulum Using Neural Networks," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, No. 3, pp. 31-37.
- (3) Gurumoorthy, R., Sanders, S. R., 1992, "Controlling Non-Minimum Phase Nonlinear Systems - The Inverted Pendulum on a Cart Example," *Proc. CDC*, pp. 123-128.
- (4) Vander Linden, G. W., Lambrechts, P. F., 1992, " H_{∞} Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry friction," *Proc. CDC*, pp. 123-128.
- (5) Furta, K., Okutani, T., and Sone, H., 1978, "Computer Control of a Double Inverted Pendulum," *Computer and Elect. Engr.*, No. 5, pp. 67-84.
- (6) Kim, J. S., 1994, "QLQG/LTR Control for Hard Non-Linear Multivariable Systems," *Instn. Mech. Engrs., J. Systems and Control Eng.*, Vol. 208, pp. 177-187.
- (7) Han, S. I., Kim, J. S., 1997, " H_{∞} -Constrained Quasi-Linear Quadratic Gaussian Control with Loop Transfer Recovery," *KSME Int. J.*, Vol. 11, No. 3, pp. 255-266.
- (8) Gelb, A., Vander Velde, W. E., 1968, *Multiple Input Describing Function and Nonlinear System Design*, McGraw-Hill.
- (9) Kateb, M. R., Zhang, Y., 1995, " H_{∞} Control Analysis and Design for Nonlinear Systems," *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 2, pp. 459-474.
- (10) Rotea, M. A., Khargonekar, P. P., 1991, " H_2 -Optimal Control with an H_{∞} -Constraint: The State Feedback Case," *Automatica*, Vol. 27, No. 2, pp. 307-316.
- (11) Bernstein, D. S., Haddad, 1989, W. M., "LQG Control with H_{∞} Performance Bound : A Riccati Equation Approach," *IEEE, Trans., A. C.*, Vol. 34, No. 3, pp. 293-305.
- (12) Doyle, J. C., Zhou, K., Bodenheimer, B., "Mixed H_2 and H_{∞} Control," *Proc. ACC*, pp. 2502-2507.
- (13) Packard, A., Doyle, J.C., 1993, "The Complex Structured Singular Value," *Automatica*, Vol. 29, pp. 71-109.
- (14) Bernstein, D. S., Haddad, W. M., 1988, "The Optimal Projection Equations with Petersen-Hollot Bounds : Robust Stability and Performance Compensation via Fixed-Order Dynamic Compensation for Systems with Structured Real-Valued Parameter Uncertainty," *IEEE, Trans., A. C.*, Vol. 33, No. 6, pp. 578-582.
- (15) Kim, J. S., 1989, "The QLQG/LTR Control for Nonlinear Systems with a Non-Gaussian Nature", *KSME*, Vol. 3, No. 2, pp. 113-120.
- (16) Suzuki, A., Hedrick, J. K., 1985, "Nonlinear Controller Design by an Inverse Random Input Describing Function Method," *Proc. ACC*, pp. 1236-1241.