비선형 연속축의 조화진동 및 내부공진

이성우*· 김광래**· 손봉세***
(1999년 9월 15일 접수)

Harmonic Resonances of Continuous Rotor with Nonlinearity and Internal Resonances

Seong Woo Lee, Kwang Lae Kim and Bong Sei Son

Key Words: Vibration of Rotating Body(회전체의 진동), Vibration of Continuous System(연속계의 진동), Nonlinear Vibration(비선형 진동), Harmonic Resonance(조화공진), Internal Resonance(내부공진)

Abstract

Harmonic resonances in a continuous rotating shaft with destributed mass are discussed. The restoring force of the shaft has geometric stiffening nonlinearity due to the extension of the shaft centerline. The effect of a distributed lateral force, such as the gravity, is assumed. The possibility of the occurrences of harmonic resonances, the shapes of resonance curves, and intermal resonance phenomena are investigated.

1. 서 론

실제 회전기계의 로터는 그 직경이 장소에 따라 변화하는 축에 회전날개 등의 회전체가 달린 복잡한 구조를 하고 있다. 이와같은 계의 특성을 이론적으로 해석하기 위해서는 그것을 적당히 모델화할 필요가 있다. 대표적인 이론모델로는 전 질량을 회전체에 집중시키고 탄성축의 질량을 무시한 집중정수모델과 전 질량을 축을 따라 균일하게 작용하는 분포정수모델을 생각할 수 있다. 지금까지의 비선형진동의 연구에 있어서 해석의 어려움 때문에 그 대부분이 전자의 모델을 이용하고 있으며 후자의 모델을 이용한 연구는 극히 적다. 그러나, 쌍발 헬리곱터의 동력전달축이나 2극 발전기의 축과 같이 회전체가 없이 거의 일정 단면적을 갖는 계와 축을 따라 많은 원반이 등간격으로 분포하고 있는 계를 다룰 때는 후자의 모델이 적합하다고 생각된다. 이러한 축을 이하 연속회전축이라 하고, 축 중심선의 인장에 의한 비선형성을 기하학적 비선형성이라 한다.

Bolotin[1]은 기하학적 비선형 효과에 기인하고 방향에 따라 탄성이 다른 비대칭형 연속회전축의 진동을 해석했다. Shaw[2~4]는 이와같은 계가 내부감쇄가 있을 때의 계의 안정성과 카오스 진동을 조사했다. 그 연구에는 점근형의 주위험속도 부근의 공진곡선을 이론적으로 얻고 있다.

본 연구에서는 기하학적 비선형 스프링 특성을 갖고 회전관성, 자이로스코프 모멘트를 고려한 연속회전축의 모델을 이용하여 발생하는 비선형 진동에 대해 해석한다. 단, 축 길이에 비해 직경이 작은 탄성축을 대상으로 하고 있기 때문에 그 효과가 적다고 판단되는 전단변형은 무시한다.

또한 어떤 원인으로 축에 횡방향의 힘이 작용하여 정적인 균형의 위치가 베어링 중심선에서 벗어나면, 그 탄성복원력의 방향에 따라 스프링 특성이 다른 비대칭비선형성분도 나타난다. 수평축에 있어서 중력이 작용하는 경우가 그 대표적인 예이나 연직축에 있어서도 조립불량 등에 의해 축에 횡방향의 힘 또는 모멘트가 작용하여 정

* 회원, 서울산업대학교 기계설계학과
E-mail : ylswoo@kornet.net
TEL : (018)367-4265 FAX : (02)496-4265
** 인덕대학 기계과
*** 경원전문대학 소방안전관리학과

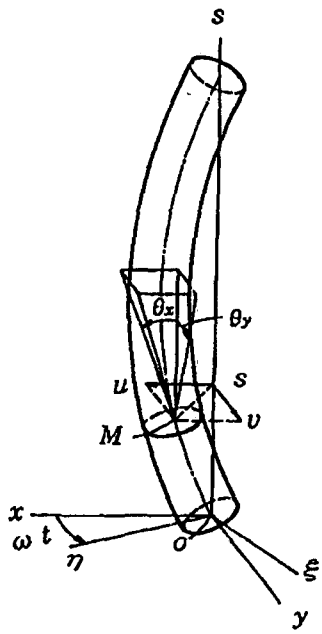


Fig. 1 Rotor and coordinates

지평형위치가 베어링 중심선에서 벗어나는 경우도 같다. 편의상 횡 방향의 힘이 작용하지 않는 경우를 연직축, 작용하는 경우를 수평축이라 한다. 수평축의 경우, 대칭비선형성분 만을 갖는 연직축에서는 나타나지 않는 종류의 비선형진동이 발생할 가능성이 있다.

또한, 일반적으로 다자유도계에서 고유진동수가 간단한 정수비가 되는 경우, 내부공진이 있는 계라고 말한다. 회전체를 갖고 있지 않은 연속회전축에서는 축의 길이에 비해 직경이 가는 경우 전향과 후향의 고유진동수의 크기가 거의 일치하므로 이 내부공진현상이 문제가 된다.

기존의 많은 연구가 연직축에 관한 것이며 비대칭 비선형성을 갖는 수평축에 관한 연구는 찾아 볼 수 없다. 따라서 본 연구에서는 주공진점 부근에서 발생하는 종류의 비선형진동[5]에 대해서 연직축과 수평축에 대해 각각 이론해석을 하고 이를 비교하며 특히 수평축에서 비대칭 비선형성이 있는 경우, 그 크기에 따른 영향 및 내부공진현상의 발생 유무를 조사한다. 또 진동이 발생하는 경우에는 그 진동특성(공진곡선의 형상, 안정성 등)을 조사하여 수치 시뮬레이션과 실험장치를 이용하여 주위험속도의 이론해석결과의 타당성을 검토한다.

2. 운동 방정식과 자유진동해

2.1 운동방정식

길이 l, 직경 d, 단면적 A의 원형단면을 갖는 연직회전축(밀도 ρ, 종탄성계수 E, 단면이차 모멘트 I)을 지정한다. Fig. 1에 나타낸 것과 같이 축의 하단에 원점 O가 일치하고 좌표축 s를 베어링 중심방향으로 잡은 정지직교좌표계 $O-xyz$와 회전축과 함께 각속도 ω로 회전하는 회전좌표계 $O-\xi\eta s$를 생각한다. $O\xi$, $O\eta$ 방향의 불균형 성분을 $e_\xi(s)$, $e_\eta(s)$, 단위 길이 당의 외부점성감쇄계수를 c 로 한다. 전단변형은 무시한다. 시간 t 에서 축의 Ox, Oy 방향의 휨을 $u(s,t)$, $v(s,t)$ 라 하면 다음 방정식[2,6]을 얻는다.

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\rho A d^2}{16}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}+2\omega\frac{\partial^3 v}{\partial s^2\partial t}\right]+c\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{EA}{2l}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right]ds=\rho A\omega^2(e_\xi\cos\omega t-e_\eta\sin\omega t) \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\rho A d^2}{16}\left[\frac{\partial^4 v}{\partial s^2\partial t^2}+2\omega\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\partial t}\right]+c\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{EA}{2l}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right]ds=\rho A\omega^2(e_\xi\sin\omega t+e_\eta\cos\omega t)+g$$

또한, 식 (1)에 대응하는 선형운동방정식은 Eshleman,[6] 비선형항은 Shaw[2]가 구한 것과 같다. 여기서, 발생하는 진폭과 같은 정도의 크기 e_0를 대표량으로 도입하고 다음의 무차원량을 채용하면

$$\bar{u}=\frac{u}{e_0},\quad \bar{v}=\frac{v}{e_0},\quad \bar{s}=\frac{s}{l},\quad \bar{e_\xi}=\frac{e_\xi}{e_0},$$

$$\bar{e_\eta}=\frac{e_\eta}{e_0},\quad \alpha=\frac{Ae_0^2}{2I},\quad \bar{\omega}=\frac{\omega}{\gamma},\quad \chi=\frac{\pi^2 d^2}{16l^2}, \tag{2}$$

$$\bar{t}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t\ (\equiv\gamma t),\quad \bar{c}=\frac{cl^4\gamma}{\pi^4 EI}$$

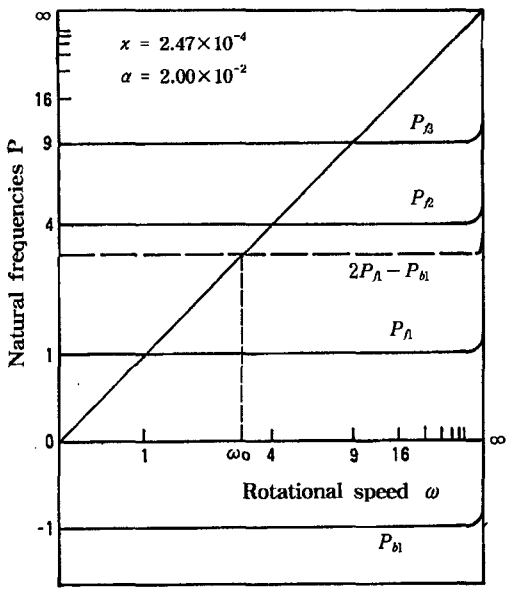


Fig. 2 Relation between natural frequencies p_{fn}, p_{bn} and rotating speed ω

$$\bar{g}=\frac{g}{e_0\gamma^2}$$

이 되며, 여기서, 무차원량에 바를 생략하고 복소수 $z=u+iv$를 도입한다면 다음의 무차원 표시의 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi^4}\frac{\partial^4 z}{\partial s^4}+\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\\&\quad-\frac{x}{\pi^2}\left[\frac{\partial^4 z}{\partial s^2\partial t^2}-2i\omega\frac{\partial^3 z}{\partial s^2\partial t}\right]\\&\quad+c\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\alpha}{\pi^4}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\int_0^1\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial s}\right)ds\\&=\omega^2[e_\xi(s)+ie_\eta(s)]e^{i\omega t}+ig\end{aligned}\tag{3}$$

여기서, $\bar{z}$ 는 z의 공액복소수이다. 또 경계조건은 양단단순지지로 한다

2.2 고유진동수

먼저, 선형, 무감쇄계의 자유진동의 진동수 p를 구한다. 자이로스코프 작용이 작은($x\fallingdotseq 0$) 경우의 모달 형상은

$$\varphi_n(s)=\sin\nu_n\pi s\quad(\nu_n=n,\ n=1,2,\cdots)\tag{4}$$

으로 근사 할 수 있으며 그 자유진동해는

$$z(s,t)=Z\sin\nu_n\pi s\cdot e^{ipt}\tag{5}$$

라 놓을수 있다.[7] 진동수 p 는 특성방정식

$$\begin{aligned}&G_n(p)\equiv\\&\nu_n^4+2x\nu_n^2\omega p-(1+x\nu_n^2)-(1+x\nu_n^2)p^2=0\end{aligned}\tag{6}$$

의 근으로 주어진다. 근 $p_{fn}(>0)$은 전향선회운동에 대응하며, 근 $p_{bn}(<0)$은 후향선회운동에 대응한다. 식 (6)의 계산결과의 한 예를 Fig. 2에 나타낸 것으로 구간$(0,\infty)$을 유한의 길이 a로 표현하기 위하여 좌표 x를 Fig. 2상의 길이 $\bar{x}$의 위치로 나타내는 변환식 $\bar{x}=ax/(a+x)$을 이용했다.[8] 고유진동수 p_{fn}과 직선 $p=\omega$와의 교점이 각 모달의 주위험속도 ω_{fn}이 된다.

2.3 상미분방정식에의 변환

식 (4)로 표현되는 고유함수를 이용해서 운동방정식 (3)을 상미분방정식으로 변환한다. 해를 고유함수로 나타내면 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned}u(s,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\varphi_n(s)\\v(s,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\varphi_n(s)\end{aligned}\tag{7}$$

같은 방법으로 불균형에 대해서도 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned}e_\xi(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(s)\\e_\eta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\varphi_n(s)\\g(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n\varphi_n(s)\end{aligned}\tag{8}$$

이들 식을 운동방정식 (3)에 대입하고 모달형의 직교성을 이용한다면, 모달진폭 u_n, v_n에 관한 다음의 비선형 미분방정식[2,6]을 얻는다.

$$\begin{aligned}&(1+x\nu_n^2)\ddot{u}_n+c\dot{u}_n+2x\omega\nu_n^2\dot{v}_n\\&\quad+\nu_n^4u_n+\alpha\nu_n^2u_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_j^2}{2}(u_j^2+v_j^2)\\&\quad=\omega^2(a_n\cos\omega t-b_n\sin\omega t)\\&(1+x\nu_n^2)\ddot{v}_n+c\dot{v}_n+2x\omega\nu_n^2\dot{u}_n\\&\quad+\nu_n^4v_n+\alpha\nu_n^2v_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu_j^2}{2}(u_j^2+v_j^2)\\&\quad=\omega^2(a_n\sin\omega t-b_n\cos\omega t)+g_n\\&\qquad(n=1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{9}$$

3. 주공진점 부근 [p_{fn}]

3.1 연직축의 경우

주위험속도 $\omega = p_{fn}$근방의 조화진동 [p_{fn}]의 해를

$$u_n = P\cos(\omega t+\beta)$$
$$v_n = P\sin(\omega t+\beta) \tag{10}$$

라 놓는다. 이 표기법 [p_{fn}]는 [ ]안의 진동수를 회전속도 ω와 등치했을 때, 주어지는 공진점에서 발생하는 진동수, 즉 $\omega = p_{fn}$로 결정되는 공진점 근방에서 발생하는 진동임을 표시한다. 이하에서도 같은 표기법을 이용한다.

연직축은 중력과 같은 횡 방향의 힘이 작용하지 않으므로 식 (9)에서 $g_n = 0$로 한다. 식 (10)을 식 (9)에 대입하고 진동수 ω에 대하여 조화바란스법을 이용한다면 다음 식을 얻는다.

$$2\omega P\dot{\beta} = G(\omega)P + (1/2)\alpha\nu_n^4 P^3 - \omega^2(a_n\cos\beta + b_n\sin\beta)$$
$$2\omega\dot{P} = -c\omega P - \omega^2(a_n\sin\beta - b_n\cos\beta) \tag{11}$$

여기서 $G(\omega)$는 식 (6)에서 p 대신 ω를 대입하여 얻은 값이며, $\dot{P} = \dot{\beta} = 0$라고 두면 정상해 $P = P_0, \beta = \beta_0$를 얻는다. 이 정상해의 안정성은 정상해로부터의 미소 편차를 생각하며 그 미소 편차의 미분방정식의 특성근을 조사하므로서 판별할 수 있다. 공진곡선의 한 예를 Fig. 3에 보인다. 실선은 안정해, 파선은 불안정해를 나타낸다. 모두 점경형의 공진곡선이며 그 기울기의 정도는 운동방정식 (3)의 비선형항의 계수 α에 의존한다. 직경 d을 변화시켰을 때, 파라미터 α는 직경 d의 자승에 역비례하기 때문에 직경 d가 작을수록 기울기는 크게 된다. 단, Fig. 3에서 횡축에 직경 d에 비례하는 량 γ로 무차원화한 축의 각속도를 잡고 있기 때문에 공진점은 직경 d에 관계 없이 언제나 1이 되며 그 무차원화의 변환에 따라 공진곡선의 기울기도 변화한다. 따라서 Fig. 3에서 축 직경 d가 변화할 때의 공진곡선의 기울기는 직접 비교할 수는 없지만 실제로 관측할 때와 같이 유차원의 축 각속도를 잡고 Fig. 3에 대응하는 공진곡선을 그리면 직경 d가 작을수록 공진곡선의 경사가 크게 되는 것을 나타낼 수 있다. 또, Fig. 3 중의 ○표시는 식 (9)을 수치 시뮬레이션한 결과이다. 이 결과와 공진곡선의 근사해와는 잘 일치하고 있다.

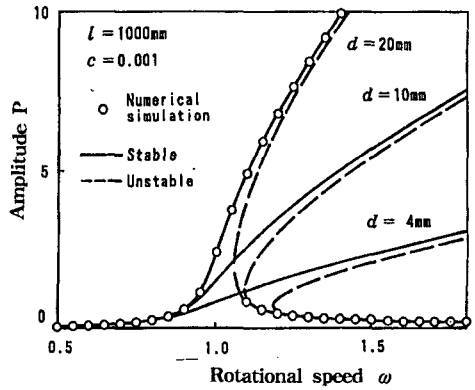


Fig. 3 Harmonic resonance of vertical shaft

3.2 수평축의 경우

여기서는 축의 길이에 비해 직경이 작은 경우를 생각한다. 이때 앞에서 말한 것과 같이 전향 고유진동수와 후향 고유진동수가 거의 일치하므로 $p_{fn} \fallingdotseq |p_{bn}|$의 내부공진의 관계가 성립한다. 축에 횡방향의 힘이 작용하면 비대칭 비선형성이 나타나며 그 결과, 주공진점 부근에서 내부공진에 의한 변화가 발생한다. 이 공진점 부근에서 전향과 후향의 조화진동이 동시에 발생한다고 가정하고 $O(\varepsilon)$의 정확도의 해를 다음과 같이 놓는다. 여기서, ε 은 미소량을 대표하는 파라미터이며, ε과 같은 정도의 크기인 것을 $O(\varepsilon)$로 나타낸다.

$$u_n = R_{fn}\cos(\omega t+\delta_{fn}) + R_{bn}\cos(-\omega t+\delta_{bn}) + Q_x$$
$$= A\cos\omega t + B\sin\omega t + Q_x$$
$$v_n = R_{fn}\sin(\omega t+\delta_{fn}) + R_{bn}\sin(-\omega t+\delta_{bn}) + Q_y$$
$$= C\cos\omega t + D\sin\omega t + Q_y \tag{12}$$

여기서

$$\delta_{fn} = \tan^{-1}\frac{C-B}{A+B},\quad \delta_{bn} = \tan^{-1}\frac{C+B}{A-D}$$
$$R_{fn} = (1/2)\{(A+D)^2 + (B-C)^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$R_{bn} = (1/2)\{(A-D)^2 + (B+C)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

이다. 식 (12)을 식 (9)에 대입하고 조화바란스법을 이용하여 진동수 ω의 항을 $O(\varepsilon)$의 정밀도로 비교하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\omega\dot{A} &= -E_nB - c_nA - x_nC + \frac{1}{2}\omega^2 b_n \\
&\quad + \alpha_n\{3B(A^2+B^2+D^2) \\
&\quad + BC^2 + 2ACD + 4BQ_y^2\} \\
\omega\dot{B} &= E_nA - c_nB - x_nD + \frac{1}{2}\omega^2 a_n \\
&\quad - \alpha_n\{3A(A^2+B^2+C^2) \\
&\quad + AD^2 + 2BCD + 4AQ_y^2\} \\
\omega\dot{C} &= -E_nD - c_nC + x_nA - \frac{1}{2}\omega^2 a_n \\
&\quad + \alpha_n\{3D(B^2+C^2+D^2) \\
&\quad + A^2D + 2ABC + 12DQ_y^2\} \\
\omega\dot{D} &= E_nC - c_nD + x_nB + \frac{1}{2}\omega^2 b_n \\
&\quad - \alpha_n\{3C(A^2+C^2+D^2) \\
&\quad + B^2C + 2ABD + 12CQ_y^2\}
\end{aligned} \tag{14}$$

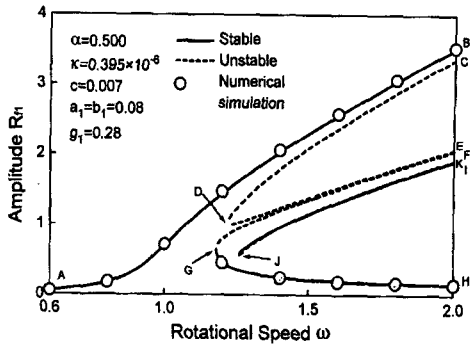
또, 정수항에 대해서 $O(\varepsilon^0)$의 정밀도로 비교하면

$$\begin{aligned}
Q_x &= 0 \\
Q_y &= g_n/\nu_n^4
\end{aligned} \tag{15}$$

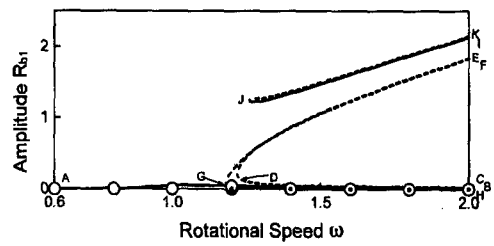
을 얻는다. 여기서 $E_n=\{(1+x\nu_n^2)\omega^2-\nu_n^4\}/2$, $c_n=c\omega/2$, $x_n=x\omega^2\nu_n^2$, $\alpha_n=(1/16)\alpha\nu_n^4$ 이다.

식 (14)에서 $\dot{A}=\dot{B}=\dot{C}=\dot{D}=0$라 놓으면 정상해를 구할 수 있다. 또, 그 정상해에서의 약간 벗어나는 경우를 고려하여 그 변분식을 유도한다. 그 특성방정식을 얻은 후, Routh-Hurwitz의 판별법을 적용하면 해의 안정성을 판별할 수 있다. 얻은 공진곡선을 Fig. 4에 나타낸다. 또한 파라메타의 값으로는 $d=4$mm, $l=500$mm, $E=210$ GPa, $\rho=7.2\times10^3$kg/m^3, $e_0=1$mm, $g=9.8$m/s^{2}에서 얻은 무차원량의 값을 이용한다.

Fig. 4(a)는 전향 조화진동 성분의 진폭 R_{f1}, Fig. 4(b)는 후향 조화진동 성분의 진폭 R_{b1}의 공진곡선을 나타낸다. 여기서, 실선은 안정해, 파선은 불안정해를 표시한다. 식 (9)을 Runge-Kutta-Varner법으로 직접수치적분하여 얻은 시뮬레이션 결과를 기호○로 나타낸다. 이 Fig.에서 3종류의 진동상태가 존재한다는 것을 알 수 있다. 그 첫 번째는 분지AB, CD, GH로 내부공진이 없으며 전향의 조화진동 만이 발생하는 경우에 해당한다.



(a) Forward whirling motion



(b) Backward whirling motion

Fig. 4 Harmonic resonance of horizontal shaft

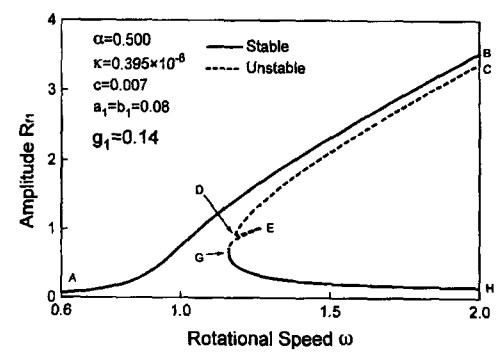
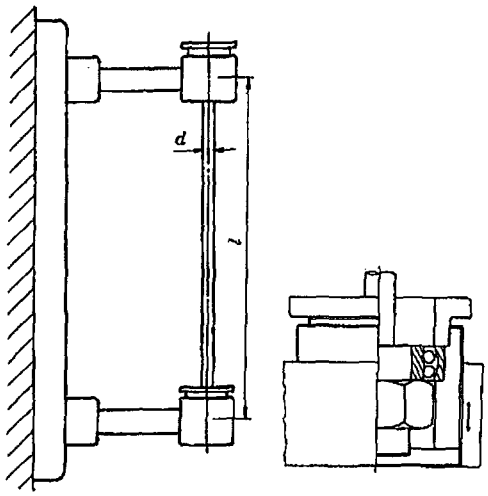


Fig. 5 Harmonic resonance of horizontal shaft (g_1 = 0.14)

이때 공전하는 후향 조화진동 성분은 매우 작다. 두 번째는 분지 IJ, JK로 진폭 R_{f1} 과 R_{b1}이 같은 정도의 크기로 발생하고 있는 경우이다. 이것은 내부공진의 영향으로 발생한 것이며 연직축에서는 나타나지 않는다. 세 번째는 분지 DE, FG로 이것도 내부공진의 영향으로 나타난 것이다. 전부 불안정으로 연직축에서도 나타난 불안정해에서 분기(分岐)하고 있다. Fig. 5의 g_1은 중력을



(a) Rotor system (b) Deltails of bearing and the pedestal

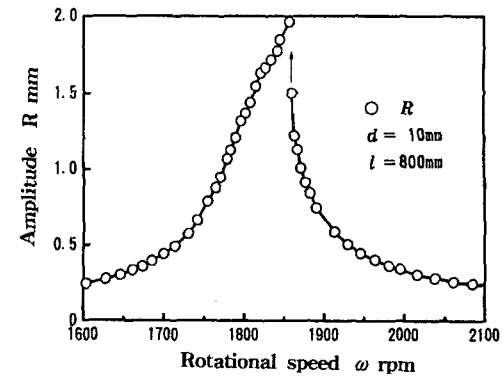
Fig. 6 Experimental set-up

모달 함수로 전개했을 때의 1차 성분이지만 그것을 0.5배 했을 때의 전향 조화진동 성분의 공진곡선을 Fig. 5에 나타낸다. 이때 축의 휨이 작아지기 때문에 비대칭비선형성이 작아져서 그 결과 내부공진의 영향도 작아진다. 즉 Fig. 1에서 분지 IJ, JK가 소멸하고 분지 DE, FG는 축소하여 DE, EG가 된다. 중력성분 g_1이 더 작아지면 분지 DE, EG는 소멸하여 전향 조화진동 만이 발생하다.

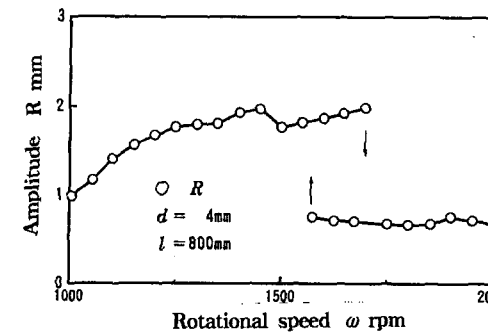
4. 실 험

4.1 실험장치

본 연구에 이용한 실험장치를 Fig. 6 에 보인다. 일정한 원형단면의 탄성 회전축을 연직으로 지지했다. 축의 길이는 $l=800$mm(상하의 베어링 중심선 사이의 거리)이며, 축의 직경은 $d=10$ mm 와 4mm의 두 종류를 사용했다. 축의 상하단은 복열 자동조심 볼베어링(#1200)으로 단순지지 했다. Fig. 6(b)에서 알 수 있는 것과 같이 하부 베어링은 상하로 이동 가능한 베어링 박스에 넣어 초기장력이 발생하지 않도록 했다. 단, 회전중에는 상하의 베어링이 축방향으로 이동할 수 없도록 작은 나사를 이용하여 고정했다. 축이 진동하면 축 중심선이 늘어나는 것 때문에 기하학적 비선형성이 나타난다.



(a) Case of $d=10$mm



(b) Case of $d=4$mm

Fig. 7 Harmonic resonance of vertical shaft (experimental results)

4.2 실험결과

주 위험속도 부근의 공진곡선의 측정결과 Fig. 7(a)는 직경 10mm의 축, Fig. 7(b)는 직경 4mm의 축의 경우이다. 어느 쪽도 점경형이나, 축이 가늘수록 현저하게 기울어진다. 특히 Fig. 7(b)에서는 이력현상과 도약현상이 확실하게 알 수 있다.

5. 결 론

기하학적 비선형성을 갖는 연속회전축의 주 공진점 부근에서의 비선형 진동에 대해 다음의 결론을 얻었다.

(1) 베어링의 이동을 구속하면 기하학적 비선형성이 나타난다.

(2) 축 직경이 가늘수록 비선형성이 강해지며 공진곡선의 경사가 현저한 점경형이 된다.

(3) 횡 방향의 힘을 받지않는 연직축에서는 대

칭형의 기하학적 비선형성 만 존재하지만 횡 방향의 힘을 받는 수평축에서는 대칭 및 비대칭형의 기하학적 비선형성이 나타난다.

(4) 축이 가늘어지면 전향과 후향의 고유진동수가 거의 일치하게 되지만 연직축의 경우에는 내부 공진현상이 발생하지 않으나, 수평축의 경우에는 대칭형뿐 아니라 비대칭형의 비선형성이 동시에 존재하여 내부공진현상을 일으켜 공진곡선이 복잡하게 되어 3종류로 분류된다.

(5) 실험에서는 주공진 부근의 공진곡선이 점경형이 되어 그 기울기가 축의 직경이 작을수록 커지게 된는 것을 확인했다.

참고문헌

(1) Boltin, V.V., 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco, CA.

(2) Shaw.J. and Show. S.W., 1989, "Instabilities and Bifurcation in a Rotating Shaft," *Journal of Sound and Vibration.*, Vol. 132, pp. 227~244.

(3) Shaw.J. and Show. S.W., 1991, "Non-Linear Resonance of an Unbalance Rotating Shaft with Internal Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 147, pp. 435~451.

(4) Shaw, S.W., 1988, "Chaotic Dynamics of a Slender Beam Rotating about Its Longitudinal Axis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124, pp. 329~343.

(5) Yamamoto, T. and Ishida, Y., 1977, "Theoretical Discussion on Vibration of a Rotating Shaft with Nonlinear Spring Characteristics," *Ingenieur Archiv*, Vol. 46, pp. 125~135.

(6) Eshleman, R. L. and Eubanks, R. A., 1969, "On the Critical Speeds of a Continuous Rotor," *ASME Journal of Engineering For Industry*, Vol. 91, pp. 1180~1188.

(7) Dimentberg, F. M., 1961, *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, Butterworths, London.

(8) Tondl, A., 1965, *Some Problems of Rotor Dynamics*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague.