

비틀림과 평면외 굽힘을 받는 직사각단면 곡선 박판보 이론

김 윤 영* · 김 영 규**

(2000년 4월 11일 접수)

The Theory of Thin-Walled Curved Rectangular Box Beams Under Torsion and Out-of-Plane Bending

Yoon Young Kim and Youngkyu Kim

Key Words: Curved Box Beam(직사각단면 곡선보), Thin-Walled Beam(박판보), Warping(뒤틀림), Distortion(찌그러짐), Bending(굽힘)

Abstract

We propose a new one-dimensional theory for thin-walled curved box beams having rectangular cross sections, in which torsional, out-of-plane bending, warping and distortional deformations are coupled. The major difference between the present theory and existing theories lies in that the present theory takes into account additional distortion as well as warping. To verify the present theory, a standard finite element based on the present theory is developed and used for numerical analysis. A couple of numerical examples indeed confirm that the consideration of warping and distortional deformations is very important.

1. 서 론

박판보는 질량 대비 강성이 매우 큰 구조로서 하중을 효율적으로 지지할 수 있는 부재이다. 박판보의 이러한 공학적 중요성으로 말미암아 많은 연구가 이루어져 왔다. Vlasov는 개단면과 폐단면 박판보에 대한 기본적 이론을 정리⁽¹⁾한 바 있으며, 최근에는 공학적으로 실제 응용할 수 있는 직선 폐단면 1차원 보이론들^(2~6)이 마련되었다. (이와 관련된 보다 자세한 문헌은 참고문헌(2~6)에서 인용된 문헌을 볼 것)

이러한 연구들^(2~6)은 직선 폐단면 박판보가 비틀림을 받을 때, 통상적인 비틀림 변형만을 고려한 이론만으로는 만족스러운 해를 얻을 수 없다는 점을 지적하고 있다. 즉 정적 문제의 경우에는 통상적인 이론만으로는 끝단 효과를 만족스럽

게 묘사할 수 없고, 동적 문제의 경우에는 저차의 고유진동수도 잘 예측하기 어렵다는 것이며, 이러한 문제점을 해결하기 위해서 비틀림 변형 이외에 뒤틀림(warping) 변형은 물론 찌그러짐(distortion) 변형도 함께 고려해야 한다는 사실을 밝히고 있다.

하지만 이러한 폐단면 박판보가 곡률을 갖는 경우에는 곡률이 없는 직선 폐단면 보와는 달리 변형간의 연성이 심하게 나타난다. 곡률을 갖는 박판보에 대한 기존의 연구 중, 많은 연구들이 주로 개단면에 국한되어 왔다.^(7~11) 폐단면 박판보의 경우 비틀림, 면외 굽힘 변형 외에 뒤틀림 변형을 고려함으로써 단순히 비틀림과 면외 굽힘 변형만을 고려한 고전 보이론이 갖는 문제점을 다소 보완한 연구들^(12~16)이 보고된 바 있지만 뒤틀림 변형만을 추가로 고려한 이러한 이론만으로는 실제로 발생하는 물리적 현상을 만족스럽게 예측할 수 없는 한계점을 갖고 있다.

따라서 본 연구에서는 곡률을 갖는 직사각단면 박판보의 역학적 거동을 제대로 해석할 수 있는 새로운 1차원 보이론을 제시하고자 한다. 본 연

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : yykim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1688 FAX : (02)872-5431

** 서울대학교 대학원 기계항공공학부

구에서는 비틀림과 평면의 굽힘이 연성되는 문제에 국한하였지만, 본 연구에서 제안하는 이론은 기존의 이론과는 달리 뒤틀림 변형 외에 찌그러짐 변형을 추가로 고려한 이론이다. 1차원 이론을 유도하기 위해서 먼저 관심있는 1차원 변형에 상응하는 3차원 근사 변위장을 유도하고 이를 3차원 변분이론에 적용하였다. 그리고 여기서 나타나는 변분식을 단면에 대해 적분함으로써 1차원 이론을 유도하였다. 특히 곡률의 효과가 제대로 반영될 수 있는 체계적인 해석 절차를 제시하였다.

직선 폐단면 박판보가 정적 하중을 받는 경우는 뒤틀림과 찌그러짐 변형이 주로 끝단 주위에서만 영향을 끼치는 특성이 있지만 곡률이 있는 폐단면 박판보의 경우는 뒤틀림과 찌그러짐 변형이 박판보의 전체 거동에 어떠한 영향이 있는지를 이 이론을 이용하여 규명하고자 한다.

2. 단면 변형

2.1 직사각단면 곡선 박판보의 기하학적 형상

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 형상의 직사각 단면 곡선 박판보에 대해 해석하고자 한다. 박벽으로 이루어진 직사각 단면의 폭은 b 이며 높이는 h 이다. 각 박벽의 두께 t 는 일정하며, 중심점 O 에서 단면의 도심까지의 길이는 R 로 주어져 있다. 두께 t 는 단면의 치수보다 충분히 작다고 가정한다.

단면의 변형을 기술하기 위해 O 를 원점으로 하는 원통 좌표계 (ρ, ϕ, y) 와 각각의 박벽에 대해서는 단면 박벽에 부착된 국부 좌표계 (n, s, ϕ) 를 사용한다. 박벽의 중심선을 따라서

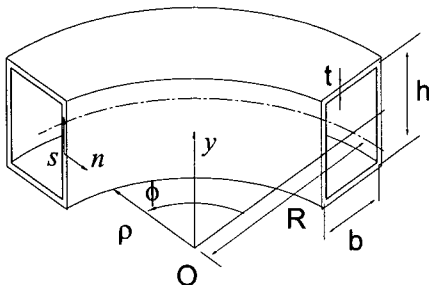


Fig. 1 The coordinate and geometry of a thin-walled curved box beam with a rectangular cross section

접선방향을 s 좌표로 놓고 수직방향을 n 좌표로 기술한다.

직사각 단면을 갖는 곡선 박판보의 경우는 단면의 대칭성으로 인해 곡률 평면($\rho-\phi$ 평면) 내의 굽힘이나 인장에 의한 변형이 다른 자유도와 연성이 되지 않으므로 본 연구에서는 고려하지 않는다. 본 연구에서는 직사각 단면 곡선 박판보가 비틀림 모멘트(ϕ 방향)와 곡률 평면 외의 굽힘 모멘트(ρ 방향)를 받을 때 발생하는 변위와 응력을 구하는 것이 목적이다. 따라서 ϕ 축방향의 회전각 θ , y 축방향의 변위 η , ρ 축방향의 회전각 β 를 기구학적 변수로 사용하며, 이러한 변형과 더불어 단면이 단면 평면($n-s$ 평면 또는 $\rho-y$ 평면) 밖으로 변형하는 뒤틀림 U 와 단면 평면 내에서 변형하는 찌그러짐 χ 을 추가로 고려한 5자유도를 갖는 일차원 폐단면 곡선 박판보 이론을 연구하고자 한다. 아래에서 이러한 변형을 설명하고, 이러한 변형과 관련된 3차원 변위장을 유도하고자 한다.

2.2 단면 변형 형상 함수

일반적으로 보가 하중을 받아서 변형할 때 생기는 변형 모드는 단면이 변형을 하지 않는 모드와 단면이 변형을 하는 모드로 나눌 수 있다. 단면이 변형을 하지 않는 모드는 합력이 0이 아닌 하중에 의한 변형 모드로서 단면은 강체와 같이 거동을 하며, 단면이 변형을 하는 모드는 합력이 0인 하중에 의한 변형 모드로서 일종의 끝단 효과(end effect)에 의한 영향이라고 할 수 있다.

직사각단면 박판보의 경우, 비틀림 모멘트 H 에 의한 단면의 회전 θ , 수직 방향 전단하중 V 에 의한 수직 방향 처짐 η , 굽힘 모멘트 M 에 의한 단면의 회전 β 에 대해서는 단면의 변형은 일어나지 않는다고 간주한다. 그리고 쌍모멘트 B 에 의한 뒤틀림 U 은 단면 평면 밖으로 일어나는 단면의 변형이며, 횡방향 쌍모멘트 Q 에 의한 찌그러짐 χ 은 단면 평면 내의 변형이다.⁽⁶⁾

Fig. 2와 같이 각 박벽에 대해서 박벽의 중심선에서의 법선 방향 변위를 $u_n(s, \phi)$, 접선 방향 변위를 $u_s(s, \phi)$, 보의 길이 방향 변위를 $u_\phi(s, \phi)$ 라고 하고, 편의상 직사각단면을 이루

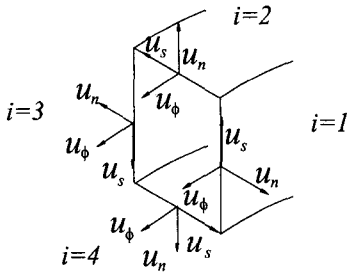


Fig. 2 Local coordinates and the center line of the cross section

고 있는 4개의 박벽을 안쪽 벽부터 반시계방향으로 차례로 번호 i 를 붙이도록 한다.

비틀림 θ , 수직 변위 η , 굽힘 β , 뒤틀림 U 및 찌그러짐 χ 에 의해 발생하는 3차원 변위를 기술하기 위해서 먼저 다음과 같은 2차원 셀변위를 s 와 ϕ 의 함수로 표시하면 편리하다.

$$u_n(s, \phi) = \Psi_n^\theta(s) \theta(\phi) + \Psi_n^\eta(s) \eta(\phi) + \Psi_n^\beta(s) \beta(\phi) + \Psi_n^U(s) U(\phi) + \Psi_n^\chi(s) \chi(\phi) \quad (1a)$$

$$u_s(s, \phi) = \Psi_s^\theta(s) \theta(\phi) + \Psi_s^\eta(s) \eta(\phi) + \Psi_s^\beta(s) \beta(\phi) + \Psi_s^U(s) U(\phi) + \Psi_s^\chi(s) \chi(\phi) \quad (1b)$$

$$u_\phi(s, \phi) = \Psi_\phi^\theta(s) \theta(\phi) + \Psi_\phi^\eta(s) \eta(\phi) + \Psi_\phi^\beta(s) \beta(\phi) + \Psi_\phi^U(s) U(\phi) + \Psi_\phi^\chi(s) \chi(\phi) \quad (1c)$$

식 (1)에서 $\Psi(s)$ 는 단면 평면 내에서의 단면의 변형을 나타내는 형상 함수이며, 상첨자 θ 등은 해당하는 변형에 관련된 양임을 지칭한다. 아래에서는 각 변형별로 단면의 형상함수 $\Psi(s)$ 를 기술하고자 한다.

2.2.1 비틀림

비틀림에 의해 축방향의 강체 단위 회전이 발생하는 경우에 해당하는 형상 함수 $\Psi^\theta(s)$ 는 식 (2)와 같이 표시할 수 있다. 식 (2)에서 편의상 단면 좌표 s 는 각 박벽의 중점에서 반시계 방향으로 증가하는 것으로 놓았다.

$$\Psi_{ni}^\theta(s) = -s \quad (2a)$$

$$\Psi_{si}^\theta(s) = \begin{cases} \frac{b}{2} & i=1 \\ \frac{h}{2} & i=2 \\ \frac{b}{2} & i=3 \\ \frac{h}{2} & i=4 \end{cases} \quad (2b)$$

$$\Psi_{\phi i}^\theta(s) = 0 \quad (2c)$$

2.2.2 수직 변위

수직 방향 변위 $\eta(\phi)$ 는 y 축의 양의 방향으로 단면 전체가 단면 평면 내에서 강체 이동하는 변위이며 단위 변형에 대해서 형상함수 $\Psi^\eta(s)$ 는 식 (3)과 같이 표시할 수 있다.

$$\Psi_{ni}^\eta(s) = \begin{cases} 0 & i=1 \\ 1 & i=2 \\ 0 & i=3 \\ -1 & i=4 \end{cases} \quad (3a)$$

$$\Psi_{si}^\eta(s) = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \\ -1 & i=3 \\ 0 & i=4 \end{cases} \quad (3b)$$

$$\Psi_{\phi i}^\eta(s) = 0 \quad (3c)$$

2.2.3 굽힘

굽힘 변형이 일어나면 단면이 회전하게 되는데, 이 때의 형상함수 $\Psi^\beta(s)$ 를 식 (4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\Psi_{ni}^\beta(s) = 0 \quad (4a)$$

$$\Psi_{si}^\beta(s) = 0 \quad (4b)$$

$$\Psi_{\phi i}^\beta(s) = \begin{cases} -s & i=1 \\ \frac{h}{2} & i=2 \\ s & i=3 \\ \frac{h}{2} & i=4 \end{cases} \quad (4c)$$

2.2.4 뒤틀림

뒤틀림에 의한 변형이 생길 때에는 Fig. 3에 도시된 것과 같이 축방향으로 변위가 발생하게 되

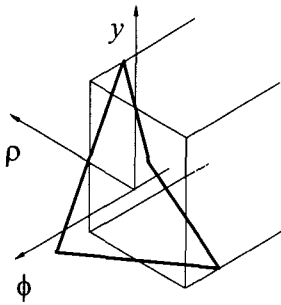


Fig. 3 Warping

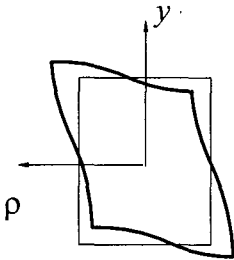


Fig. 4 Distortion

며, 이 때 뒤틀림 변형의 형상함수 $\Psi^U(s)$ 는 단면 중심선 상에서 식 (5)와 같이 가정할 수 있다.

$$\Psi_{ni}^U(s) = 0 \tag{5a}$$

$$\Psi_{si}^U(s) = 0 \tag{5b}$$

$$\Psi_{\phi i}^U(s) = \begin{cases} \frac{b}{2}s & i=1 \\ -\frac{h}{2}s & i=2 \\ \frac{b}{2}s & i=3 \\ -\frac{h}{2}s & i=4 \end{cases} \tag{5c}$$

2.2.5 찌그러짐

Fig. 4와 같은 단면 평면 내의 변형인 찌그러짐 $\chi(\phi)$ 에 의한 변형의 형상 함수 $\Psi^x(s)$ 를 식 (6)과 같이 기술할 수 있다. 식 (6)에서 s 방향 변위는 이웃한 박벽 간의 모멘트 평형을 고려해서 계산한 변위이다.⁽²⁾

$$\Psi_{mi}^x(s) = \begin{cases} \frac{2h}{b+h} \left(\frac{2s^3}{h^2} - \frac{3s}{2} \right) & i=1 \\ -\frac{2b}{b+h} \left(\frac{2s^3}{b^2} - \frac{3s}{2} \right) & i=2 \\ \frac{2h}{b+h} \left(\frac{2s^3}{h^2} - \frac{3s}{2} \right) & i=3 \\ -\frac{2b}{b+h} \left(\frac{2s^3}{b^2} - \frac{3s}{2} \right) & i=4 \end{cases} \tag{6a}$$

$$\Psi_{si}^x(s) = \begin{cases} -\frac{b}{2} & i=1 \\ \frac{h}{2} & i=2 \\ -\frac{b}{2} & i=3 \\ \frac{h}{2} & i=4 \end{cases} \tag{6b}$$

$$\Psi_{\phi i}^x(s) = 0 \tag{6c}$$

3. 변위장과 지배방정식

3.1 3차원 변위장

이상과 같은 셀 변위로부터, 박판보의 임의의 점에서의 3차원 변위를 다음과 같이 놓을 수 있으며 0이 아닌 항을 정리하면 식 (7)과 같다.

$$\tilde{u}_{ni}(n, s, \phi) \simeq u_{ni}(s, \phi) = \Psi_{ni}^\theta(s)\theta(\phi) + \Psi_{ni}^x(s)\chi(\phi) + \Psi_{ni}^\eta(s)\eta(\phi) \tag{7a}$$

$$\tilde{u}_{si}(n, s, \phi) \simeq u_{si}(s, \phi) - n \frac{\partial u_{ni}(s, \phi)}{\partial s} = \Psi_{si}^\theta(s)\theta(\phi) + \Psi_{si}^x(s)\chi(\phi) + \Psi_{si}^\eta(s)\eta(\phi) - n \frac{d\Psi_{ni}^x(s)}{ds} \chi(\phi) \tag{7b}$$

$$\tilde{u}_{\phi i}(n, s, \phi) \simeq u_{\phi i}(s, \phi) = \Psi_{\phi i}^U(s)U(\phi) + \Psi_{\phi i}^\beta(s)\beta(\phi) \tag{7c}$$

식 (7b)의 마지막 항은 찌그러짐에 의해 박벽의 두께 내에서 단면의 중심선의 접선방향으로 선형적으로 분포되는 변위를 나타내고 있다.

3차원 변위장을 벡터 형식으로 나타내면 식 (8)과 같다.

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{u}_{ni} \mathbf{e}_n + \tilde{u}_{si} \mathbf{e}_s + \tilde{u}_{\phi i} \mathbf{e}_\phi \tag{8}$$

식 (8)에서 $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_s$ 과 \mathbf{e}_ϕ 은 단면의 박벽에 부

착된 국부 좌표계 (n, s, ϕ) 의 기저 벡터이다.

3.2 변형률과 응력

식 (7)과 변형률의 정의로부터 변형률은 다음과 같이 표시된다.

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T] \quad (9)$$

식 (9)에서 ∇ 는 원통 좌표계에 대한 미분 연산자이다.

$$\nabla = e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + e_\phi \frac{\partial}{\rho \partial \phi} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (10)$$

각 항을 전개하고 정리하면 6개의 변형률 성분을 얻을 수 있는데 $\epsilon_{\phi\phi}$, ϵ_{ss} 와 $\epsilon_{s\phi}$ 이외의 성분들은 박판보의 기본 가정⁽¹⁾으로부터 무시할 수 있다.

이때 각 박벽에 대해서 미분을 고려해 보면, $i=1,3$ 인 안쪽과 바깥쪽 박벽에서 $\rho = R \mp \frac{b}{2}$ 이므로 테일러 전개의 1차 근사를 이용하고 $z = R\phi$ 로 정의하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\rho \partial \phi} &= \frac{1}{R \mp \frac{b}{2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\simeq \frac{1}{R} \left(1 \pm \frac{b}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} = \left(1 \mp \frac{b}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

와 같다. 그리고 $i=2,4$ 인 위쪽과 아래쪽 박벽에서는 $\rho = R \pm s$ $\left(-\frac{b}{2} \leq s \leq \frac{b}{2} \right)$ 이므로 같은 방법으로

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\rho \partial \phi} &= \frac{1}{R \pm s} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\simeq \frac{1}{R} \left(1 \mp \frac{s}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} = \left(1 \mp \frac{s}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 근사화할 수 있다.

식 (10), (11), (12) 를 식 (9)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 변형률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{zzi} &= \xi_i^2 \left(1 + \xi_i \frac{b}{2R} \right) \left\{ \Psi_{zi}^\beta(s) \frac{d\beta(z)}{dz} + \Psi_{zi}^U(s) \frac{dU(z)}{dz} \right\} \\ &\quad + \zeta_i^2 \left(1 + \zeta_i \frac{s}{2R} \right) \left\{ \Psi_{zi}^\beta \frac{d\beta}{dz} + \Psi_{zi}^U \frac{dU}{dz} \right\} \\ &\quad - \frac{\xi_i}{R} \left(1 + \xi_i \frac{b}{2R} \right) \left\{ \Psi_{ni}^\theta + \Psi_{ni}^\chi \right\} \\ &\quad - \frac{\zeta_i}{R} \left(1 + \zeta_i \frac{s}{2R} \right) \left\{ \Psi_{ni}^\theta + \Psi_{ni}^\chi - n \frac{d\Psi_{ni}^\chi}{ds} \chi \right\} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\epsilon_{ssi} = -n \frac{d^2 \Psi_{ni}^\chi(s)}{ds^2} \chi(z) \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{szi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\Psi_{zi}^U(s)}{ds} U(z) + \xi_i^2 \frac{d\Psi_{zi}^\theta(s)}{ds} \beta(z) \right. \\ &\quad + \xi_i^2 \left(1 + \xi_i \frac{b}{2R} \right) \left\{ \Psi_{si}^\theta(s) \frac{d\theta(z)}{dz} + \Psi_{si}^\chi(s) \frac{d\chi(z)}{dz} \right. \\ &\quad + \left. \Psi_{si}^\eta(s) \frac{d\eta(z)}{dz} - n \frac{d\Psi_{ni}^\chi}{ds} \frac{d\chi}{dz} \right\} \\ &\quad + \frac{\xi_i}{R} \left(1 + \xi_i \frac{s}{R} \right) \left\{ \Psi_{zi}^U(s) U(z) + \Psi_{zi}^\theta(s) \beta(z) \right\} \\ &\quad + \zeta_i^2 \left(1 + \zeta_i \frac{s}{R} \right) \left\{ \Psi_{si}^\theta(s) \frac{d\theta(z)}{dz} + \Psi_{si}^\chi(s) \frac{d\chi(z)}{dz} \right. \\ &\quad \left. - n \frac{d\Psi_{ni}^\chi}{ds} \frac{d\chi}{dz} \right\} \end{aligned} \quad (13c)$$

식 (13)에서 각 자유도는 ϕ 대신 $z=R\phi$ 로 정의되는 변수로 치환하고 $(\prime) = \frac{d}{dz} = \frac{d}{Rd\phi}$ 으 로 놓았다. 또한 ξ_i 와 ζ_i 는 편의상 도입한 변수로서 그 값은 각 변에 대해서 다음과 같다.

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i=2 \\ -1 & i=3 \\ 0 & i=4 \end{cases} \quad \zeta_i = \begin{cases} 0 & i=1 \\ -1 & i=2 \\ 0 & i=3 \\ 1 & i=4 \end{cases}$$

응력 변형률 관계로부터 응력은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{zzi} &= E_1 (\epsilon_{zzi} + \nu \epsilon_{ssi}) \\ \sigma_{ssi} &= E_1 (\epsilon_{ssi} + \nu \epsilon_{zzi}) \\ \sigma_{szi} &= 2 G \epsilon_{szi} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서, $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ 이고 E , G 와 ν 는 각각 종탄성계수, 횡탄성계수, 포아송비를 나타내고 있다.

3.3 지배방정식

평형 방정식은 최소 포텐셜 에너지 원리로부터 유도할 수 있는데, 포텐셜 에너지 Π 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \int_A \sigma_{mn} \varepsilon_{mn} dA dz \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \int_A (p \tilde{u}_z + q \tilde{u}_s) dA dz \\ & - \left(\int_A [\overline{\sigma_{zz} \tilde{u}_z} + \overline{\sigma_{sz} \tilde{u}_s}]_{z=z_2} dA \right. \\ & \left. - \int_A [\overline{\sigma_{zz} \tilde{u}_z} + \overline{\sigma_{sz} \tilde{u}_s}]_{z=z_1} dA \right) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서 p 와 q 는 각각 표면에 작용하는 축방향 및 접선방향의 분포하중을 나타내며, z_1 과 z_2 는 보의 길이방향 좌표를 의미하며, $(\overline{\quad})$ 로 표기된 것은 경계에서 주어진 값을 의미한다. 앞에서 구한 변형률과 응력을 식 (15)에 대입하고 단면에 대해서 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int [E_1(a_1 \beta'^2 + a_2 \theta^2 + 2a_3 \theta \beta') \\ & + G(b_1 \theta'^2 + b_2 \eta'^2 + b_4 \beta^2 + 2b_6 \theta' \eta' + 2b_{12} \eta' \beta \\ & + 2b_{13} \theta' \beta) + E_1\{c_1 U^2 + (c_2 + c_3 + \nu c_4) \chi^2 \\ & + 2c_5 U \theta + 2c_6 \beta' U + 2c_7 \theta \chi + 2c_9 \beta' \chi \\ & + 2c_{11} U \chi\} + G(d_1 U^2 + d_2 \chi^2 + 2d_3 \theta' U \\ & + 2d_4 \eta' U + 2d_5 \beta U + 2d_6 \theta' \chi' + 2d_7 \eta' \chi' \\ & + 2d_8 \beta \chi' + 2d_9 U \chi')] dz \\ & - \int (q_1 \theta + q_2 \eta + p_1 \beta + p_2 U + q_3 \chi) dz \\ & + [\text{Boundary Terms}] \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 a, b, c, d 등은 2.2 절에서 가정한 단면형상 함수를 적분해서 구할 수 있는 단면계수이다. 예를 들어 a_1 의 물리적 의미는 굽힘에 대한 단면의 특성이며 식 (17)과 같이 계산할 수 있다. 나머지 단면계수들도 같은 방법으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_1 = & \sum_{i=1}^4 \int \left\{ \xi_i^2 \left(1 + \xi_i \frac{b}{2R} \right) \Psi_{\phi_i}^{\beta}(s) \right. \\ & \left. + \zeta_i^2 \left(1 + \zeta_i \frac{s}{R} \right) \Psi_{\phi_i}^{\beta}(s) \right\}^2 dA_i \\ = & \frac{h^2 (b^3 + b^2 h + 12 b R^2 + 4 h R^2) t}{24 R^2} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16)에 유도된 포텐셜 에너지 Π 에 변분 원리를 적용하면 식 (18)과 같은 지배방정식을 얻게 된다.

$$E_1(a_2 \theta + a_3 \beta' + c_5 U + c_7 \chi) - G(b_1 \theta'' + b_6 \eta'' + b_{13} \beta'' + d_3 U' + d_6 \chi'') = q_1 \quad (18a)$$

$$-G(b_2 \eta'' + b_6 \theta'' + b_{12} \beta' + d_4 U' + d_7 \chi'') = q_2 \quad (18b)$$

$$-E_1(a_1 \beta' + a_3 \theta' + c_6 U' + c_9 \chi') + G(b_4 \beta + b_{12} \beta' + b_{13} \theta' + d_5 U' + d_8 \chi') = p_1 \quad (18c)$$

$$-E_1(c_1 U' + c_5 \theta' + c_6 \beta' + c_{11} \chi') + G(d_1 U + d_3 \theta' + d_4 \eta' + d_5 \beta + d_9 \chi') = p_2 \quad (18d)$$

$$E_1\{(c_2 + c_3 + \nu c_4) \chi + c_7 \theta + c_9 \beta + c_{11} U\} - G(d_2 \chi'' + d_6 \theta'' + d_7 \eta'' + d_8 \beta' + d_9 U) = q_3 \quad (18e)$$

3.4 단면 하중 및 경계 조건

직사각단면 곡선 박판보의 단면에 작용하는 하중은 비틀림 모멘트 H , 수직 방향 전단 하중 V , 굽힘 모멘트 M , 단면의 축방향 변형을 일으키는 쌍모멘트 B 및 단면 평면 내에서 단면의 찌그러짐을 일으키는 횡방향 쌍모멘트 Q 로 나눌 수 있으며 이것들은 각 자유도와 다음과 같은 관계가 있다.

$$\begin{aligned} H = & \sum_{i=1}^4 \int \sigma_{zsi} \Psi_{si}^{\theta} dA_i \\ = & G(b_1 \theta' + b_6 \eta' + b_{13} \beta + d_3 U + d_6 \chi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = & \sum_{i=1}^4 \int \sigma_{zsi} \Psi_{si}^{\eta} dA_i \\ = & G(b_6 \theta' + b_2 \eta' + b_{12} \beta + d_4 U + d_7 \chi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = & \sum_{i=1}^4 \int \sigma_{zsi} \Psi_{zi}^{\beta} dA_i \\ = & E_1(a_3 \theta + a_1 \beta' + c_6 U + c_9 \chi) \end{aligned}$$

$$B \equiv \sum_{i=1}^4 \int \sigma_{zxi} \Psi_{zi}^U dA_i$$

$$= E_1 \{ c_5 \theta + c_6 \beta' + c_1 U' + c_{11} \chi' \}$$

$$Q \equiv \sum_{i=1}^4 \int \sigma_{zxi} \Psi_{zi}^x dA_i$$

$$= G \{ d_6 \theta' + d_7 \eta' + d_8 \beta + d_9 U + d_2 \chi' \}$$

경계조건으로는 H, V, M, B, Q 또는 $\theta, \eta, \beta, U, \chi$ 를 기술할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는 단면에서 기술할 수 있는 5개의 단면 하중을 묘사하고 있으며 여기서 중방향 쌍모멘트 B 와 횡방향 쌍모멘트 Q 의 합력은 0과 같음을 알 수 있다.

3.5 수치계산

식 (16)과 식 (18)로 주어지는 이론의 타당성을 검증하기 위해서 길이방향으로 2절점을 갖는 유한요소를 개발하였다. 이 유도과정은 통상적인 유한요소 정식화의 절차^(17,18)를 따랐다.

4. 수치 예제

4.1 끝단에 수직하중이 작용하는 경우

Fig. 6과 같이 일단은 고정, 일단은 강체로 구속한 직사각 단면 곡선 박판보에 강체로 구속한 쪽에서 단위 수직 하중 ($V=1N$)이 작용하는 경우에 대해서 길이 방향의 수직 변위를 계산하였다. 본 논문에서 제시한 이론에 입각한 유한요소 해석결과를 단면변형을 고려하지 않은 통상의 보 이론에 따른 유한요소 해석 결과와, I-DEAS의 4절점 평판요소 2400개(단면의 폭방향으로 5개, 단면의 높이방향으로 6개, 보의 길이방향으로 80개의 평판요소로 분할)를 이용하여 상세 모델링하여 해석한 결과와 비교하여 보았다. ($\phi=90^\circ, b=25\text{mm}, h=50\text{mm}, t=1\text{mm}, R=500\text{mm}, E=200\text{GN/m}^2, G=76.9\text{GN/m}^2, \nu=0.3$; Fig. 1 참조)

수치해석에 대한 수렴성은 확인하였으며 그 결과를 Fig. 7과 Fig. 8에 실었다.

단면의 변형을 고려하지 않은 해석 방법은 비틀림 회전각 θ 와 수직 방향 처짐 η 및 굽힘에 의한 회전각 β 의 3개 자유도를 고려하는 통상적인 보 이론에 의한 해석 방법이며 뒤틀림과 찌그러

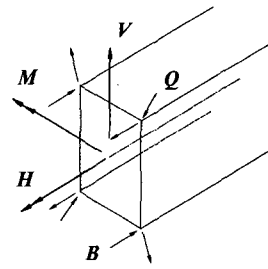


Fig. 5 Forces acting in the cross section

짐을 추가하여 5개의 자유도를 고려하는 방법이다. 본 논문에서 제시한 방법이다.

Fig. 7과 8은 각각 수직 방향의 처짐과 비틀림 각도의 길이 방향 변화를 그래프로 나타낸 것이다. 통상적인 3자유도 보의 결과는 판요소로 상세 모델링한 결과와 많은 오차를 보이고 있으나 본 연구에서 제시된 이론에 따른 5자유도보의 결과는 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

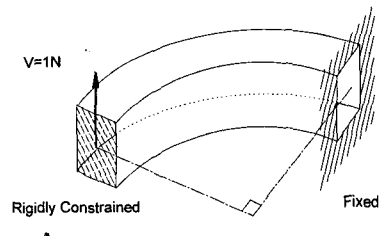


Fig. 6 Thin-walled curved box beam under a vertical shear force at constrained end

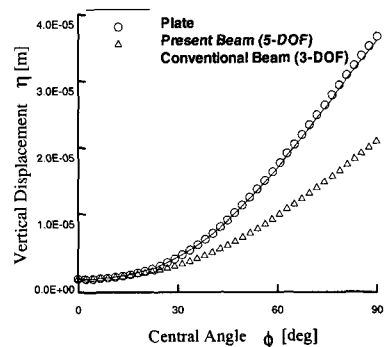


Fig. 7 Axial variation of the vertical deflection under a vertical shear force

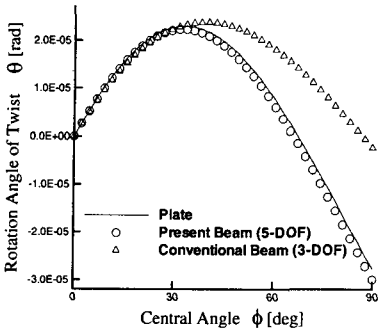


Fig. 8 Axial variation of the rotation angle due to torsion under a vertical shear force

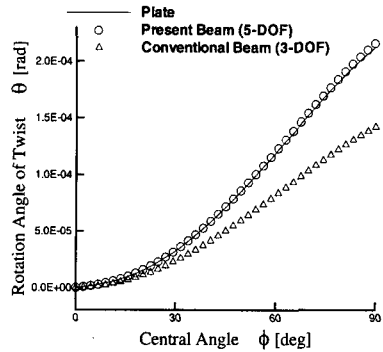


Fig. 10 Axial variation of the rotation angle due to torsion under torsional moment

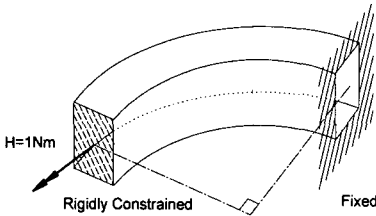


Fig. 9 Thin-walled curved box beam under a torsional moment at the constrained end

이 수치 예제를 통해서 폐단면 곡선 박판보 문제에서는 뒤틀림과 찌그러짐 변형까지 고려해야 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

4.2 끝단에 비틀림 모멘트가 작용하는 경우

Fig. 9는 일단은 고정, 일단은 강체로 구속된 직사각 단면 곡선 박판보에 강체로 구속된 단에 단위 비틀림 모멘트($H=1Nm$)를 받고 있는 경우를 보여 주고 있다. (b, h 등은 앞 절과 동일)

Fig. 10과 11에서 이 경우의 계산 결과 또한 본 논문에서 제시한 보이론의 결과가 I-DEAS의 평판 요소를 이용한 해석 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

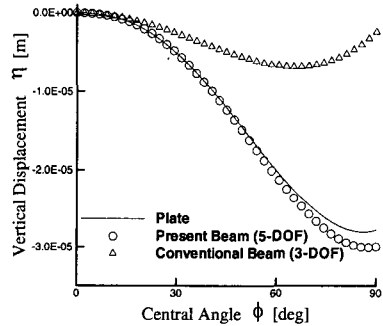


Fig. 11 Axial variation of the vertical deflection under torsional moment

는 새로운 1차원 보이론을 유도하였다. 기존의 연구와는 달리 비틀림, 수직 방향 변위, 평면의 굽힘에 의한 변형과 더불어 뒤틀림과 찌그러짐을 추가로 고려한 이론을 제안하였으며, 이 이론에 의한 해석 결과가 평판이론에 의한 해석결과와 매우 잘 일치함을 보였다. 또한 뒤틀림과 찌그러짐의 국부적인 효과가 큰 폐단면 직선 박판보와는 달리, 폐단면 곡선 박판보에서는 뒤틀림과 찌그러짐이 보 전체에 걸쳐 매우 큰 영향을 끼친다는 중요한 사실을 규명하였다.

5. 결론

본 연구에서는 비틀림과 평면의 굽힘 모멘트를 받는 직사각단면 곡선 박판보를 해석할 수 있는

참고문헌

(1) Vlasov, V. Z., 1961, *Thin Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations,

- Jerusalem.
- (2) 김윤영, 김진홍, 송상현, 1998, "비틀림을 받는 직사각 폐단면 박판보 유한요소 개발," 대한기계학회논문집(A), 제22권, 제6호, pp. 947~954.
 - (3) Kim, Y. Y. and Kim, J. H., 1999, "Thin-Walled Closed Box Beam Element for Static and Dynamic Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 473~490.
 - (4) Kim, J. H. and Kim, Y. Y., 1999, "Analysis of Thin-Walled Closed Beams with General Quadrilateral Cross Sections," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 66(4), pp. 904~912.
 - (5) Kim, J. H. and Kim, Y. Y., "Finite Element Analysis of Thin-Walled Closed Beams with General Cross Sections," to appear in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
 - (6) 김윤영, 2000년 출간예정, 선형 탄성학과 응용, 문운당.
 - (7) Brookhart, G. C., 1967, "Circular-Arc I-Type Girders," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 93, No. ST6, pp. 133~159.
 - (8) El-Amin, F. M., 1976, "Horizontally Curved Beam Finite Element Including Warping," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 1397~1428.
 - (9) Hsu, Y. T., Fu, C. C. and Schelling, D. R., 1990, "An Improved Horizontally-Curved Beam Element," *Computers & Structures*, Vol. 34, No. 2, pp. 313~318.
 - (10) Fu, C. C. and Hsu, Y. T., 1995, "The Development of an Improved Curvilinear Thin-Walled Vlasov Element," *Computers & Structures*, Vol. 54, No. 1, pp. 147~159.
 - (11) Kang, K., Bert, C. W. and Striz, A. G., 1996, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Warping Using DQM," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 122, No. 6, pp. 657~662.
 - (12) Chu, K. H. and Pinjarkar, S. G., 1971, "Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 97, No. ST10, pp. 2481~2501.
 - (13) Zhang, S. H. and Lyons, L. P. R., 1984, "A Thin-Walled Box Beam Finite Element for Curved Bridge Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 6, pp. 1035~1046.
 - (14) Li, W. Y., Tham, L. G. and Cheung, Y. K., 1988, "Curved Box-Girder Bridges," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 6, pp. 1324~1338.
 - (15) Razaqpur, A. G. and Li, H. G., 1994, "Refined Analysis of Curved Thin-Walled Multicell Box Girders," *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 1, pp. 131~142.
 - (16) Mentrasti, L., 1995, "Curved Thin-Walled Open-Closed Cross Section Beams with Finite Width," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, No. 4, pp. 497~524.
 - (17) Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
 - (18) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4th ed., McGraw-Hill, Inc., London.