

데이터베이스를 이용한 사각평판의 자유진동 해석

노승훈* · 조한중** · 최은환***
(1999년 11월 19일 접수)

Analysis of the Free Vibrations of Rectangular Plates Using Database

Seung Hoon Ro, Han Joong Cho and Eun Hwan Choi

Key Words: Natural Frequency(고유진동수), FEM(Finite Element Method, 유한요소법), Rectangular Plate(사각평판), Lateral Vibration(횡진동), Hole(구멍), Rib(보강재), Frequency Response Function(주파수 응답 함수)

Abstract

In this study, the free vibrations of the cantilever plate, which is one of the most frequently used elements in various machine structures, are analyzed and further the results are utilized to develop the methodology to predict and control the natural frequencies for designing stabilized systems. The proposed method has three major steps. The first step is the frequency response test to investigate the natural frequencies of some plates, then the database is constituted from experiments and the FEM, and finally the natural frequencies are predicted using the database to be cross-checked by the identification test. The result of this study will help design many different stable structures without any complicated calculations.

기호설명

ω : 사각평판의 고유진동수(Hz)
 ω' : 구멍이 있는 사각평판의 고유진동수(Hz)
 R_w : 진동수비(ω' / ω)
 E : 탄성계수(N/m²)
 I : 면적관성모멘트(m⁴)
 $w(x,y)$: 평판의 두께방향 변위 함수(m)
 R_{lx} : 고정단방향(x축 방향)에서의 거리비(%)
 R_{ly} : 자유단방향(y축 방향)으로의 거리비(%)
 R_v : 평판체적에 대한 구멍의 체적비(%)
 a : 평판의 가로(x축 방향) 길이(m)

b : 평판의 세로(y축 방향) 길이(m)
 h : 평판의 두께(m), z축 방향
 Δ : R_{ly} 에 대한 R_w 의 기울기($\Delta R_w / \Delta R_{ly}$)

1. 서론

산업현장에서 사용되는 각종 기계장치는 물론 항공기, 자동차, 선박 및 건축물 등의 모든 구조물은 많은 구성요소가 조합되어 고유의 목적을 수행하게 된다. 이러한 구조물들은 구성요소들에 대한 동특성이 제대로 고려되지 않으면 가진원과 구성요소간 혹은 구성요소들 상호간의 공진으로 인해 파손과 같은 심각한 문제를 초래할 수 있다. 따라서 구조물의 대표적인 기본 구성요소인 보와 평판의 동특성을 해석하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. 하지만 평판의 경우는 균일한 단면형상을 갖는 단순평판이라도 모든 경계조건

* 회원, 금오공과대학교 기계공학부
 ** 회원, 금오공과대학교 대학원
 E-mail : magtopia@knut.kumoh.ac.kr
 TEL : (054)467-4029 FAX : (054)467-4231
 *** 회원, 구미기능대학 전산응용기계과

에 대해 수학적 해를 구하는 것은 불가능하다.⁽¹⁾

초기에 수행된 평판의 동특성 해석에 관한 연구는 사각평판의 수학적 해를 구하는 것이었으나 최소 한 쌍의 대칭면이 단순지지 되는 특별한 경우들에 대해서만 그 해를 구할 수가 있어 다른 경계조건에 대해서는 수치적 방법인 Rayleigh-Ritz 법이 적용되었으며 본 연구에서 해석하고자 하는 외팔 평판의 경우도 외팔 평판의 경계조건을 얇은 평판의 운동방정식에 적용하여 고유치를 구하는 수학적 방법으로는 그 해를 구할 수가 없다.⁽²⁾ 따라서 외팔 평판의 해석에는 Rayleigh-Ritz법과 같은 근사법이 사용되며 이 해석법에서는 진동모드를 표현하기 위해 기하학적 조건을 만족하는 최소의 형상함수들의 선형조합이 이용되므로 각각의 고유진동형에 대해 적절한 근사치가 형상함수로 이용되면 결과의 정확도는 향상될 수 있지만 그렇지 않을 경우는 큰 오차가 발생할 수 있다. 이러한 해석법에 대한 초기 연구는 Kantorovich⁽³⁾와 Leissa⁽⁴⁻⁵⁾ 등에 의해 이루어져 현재까지 많은 연구⁽⁶⁻⁸⁾가 수행되어 왔다. 그러나 이 방법들의 주요 결점은 고차 행렬의 고유치 문제에서의 해석이 수치적으로 어렵다는 것이다. 따라서 고주파수의 진동을 해석하기 위해 통계적 에너지 해석법⁽⁹⁾과 전달영향계수법⁽¹⁰⁾ 등과 같은 다양한 방법들이 연구되어 왔다.

평판에 구멍이나 보강재와 같은 불균일 영역이 존재할 경우의 동특성 해석에는 유한요소법이 가장 많이 사용되지만 해석에 소요되는 시간의 단축은 아직도 해결해야 할 과제로 남아 있다. 하지만 다양한 경계조건과 불균일 영역에 광범위하게 활용될 수 있고 컴퓨터의 연산속도가 눈부신 발전을 거듭함에 따라 유한요소법⁽¹¹⁾은 현재 가장 많이 사용되는 해석 방법 중 하나가 되었다. 유한요소법 이외의 해석 방법은 대부분 형상함수를 이용하여 구조물의 진동을 해석⁽¹²⁻¹⁵⁾하게 된다. 하지만 형상함수들의 적절한 선택여부가 해의 정확성을 크게 좌우하므로 여러 가지 지지조건이나 외부의 영향 그리고 평판의 불균일 영역의 존재에 따라 적절한 형상함수들의 조합이 바뀌어야 하므로 유한요소법에 비해 전문성과 많은 노력이 필요하게 된다.

본 연구에서는 평판의 노달라인(nodal line) 부근에 구멍이 있을 경우는 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 상대적으로 작아져 고유진동수

가 감소하고 구멍이 노달라인(nodal line)에서 멀어지면 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 상대적으로 커져 고유진동수가 증가하는 물리적 현상을 이용하여 평판의 고유진동수를 쉽게 제어하는 방법을 소개한다.

첫 번째 단계에서는 외팔 평판에 대해 구멍의 위치와 크기를 변경시키며 주파수 분석 실험을 하여 고유진동수를 측정한다. 두 번째 단계에서는 FEM을 이용한 해석을 통해 데이터베이스를 구축한다. 그리고 세 번째 단계에서는 구멍의 위치와 크기를 변경하여 외팔 평판의 고유진동수를 제어하고 데이터베이스를 이용하여 예측한 결과와 실험 결과를 비교하여 신뢰성을 확인한다.

실제 구조물의 외력은 대부분 조화가진력의 형태로 나타난다. 이러한 외력이 구조물 자체의 고유진동수와 유사한 진동수를 갖는다면 이는 공진현상을 유발할 수 있고 구조물은 심하게 진동하게 되어 경우에 따라서는 구조물의 파괴로 이어질 수 있다.

구조물의 대표적인 구성요소인 외팔 평판의 경우는 본 연구에서 제안한 해석 방법을 이용하여 평판에 구멍이나 보강재의 크기와 위치를 결정함으로써 쉽게 고유진동수를 제어할 수 있다. 따라서 외팔 평판의 사용이 많은 산업 현장에서 안정된 구조물의 설계에 활용이 가능할 것으로 사료된다.

2. 이론적 배경

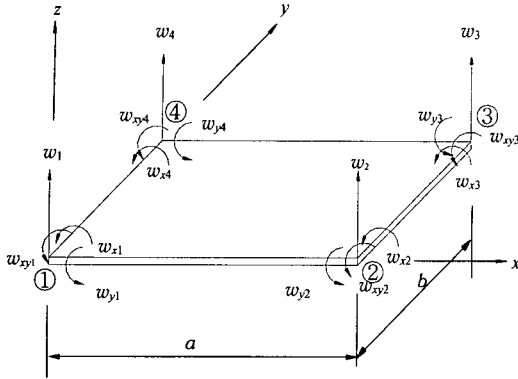
2.1 변위함수

Fig. 1의 (a)와 같은 얇은 평판의 미소구간을 Fig. 1의 (b)로 표기하여 미소변형이론에 기초한 얇은 평판의 운동방정식을 구하면 (1)과 같다.

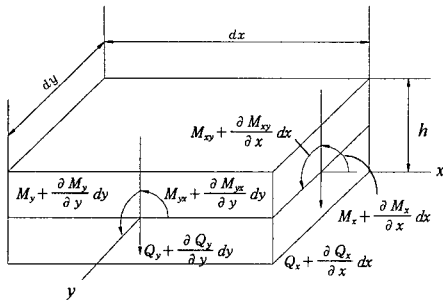
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1)$$

여기서 x, y 는 평판의 양변의 방향좌표이고 w 는 두께방향의 변위, 그리고 p 는 두께방향의 분포하중이고 ν 는 Poisson 비이며 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 이다.

평판에 어떠한 외력도 작용하지 않는 자유진동의 경우에는 $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ 이다. 그리고 굽힘 모멘트 M_x 와 M_y 는 평판의 가로 변형률(ϵ_x)과 세로 변형률(ϵ_y)의 향으로 표시할 수 있고 비틀림 모멘트(M_{xy})는 전단변형률(γ_{xy})의 향으로 나타낼 수



(a) Four-node rectangular plate bending element



(b) Differential element of a thin plate in bending

Fig. 1 Four-node rectangular plate⁽¹⁶⁾

있다. 따라서 자유진동의 경우에는 모멘트와 변형률의 관계로부터 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Fig. 1(a)에 나타낸 바와 같이 평판은 4개의 절점(node)을 갖고 각각의 절점(node)은 w, w_x, w_y, w_{xy} 의 4개 변위로 동적 거동이 표시되므로 16자유도를 갖는 요소로 가정할 수 있고 변위함수는 x 와 y 의 3차 다항식의 곱인 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x,y) &= (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3) \\ &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y \\ &\quad + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}x^2y^2 + c_{13}xy^3 \\ &\quad + c_{14}x^3y^2 + c_{15}x^2y^3 + c_{16}x^3y^3 \end{aligned} \quad (3)$$

단, w 는 평판의 횡방향으로의 변위를 나타낸다. 그리고 w_x 는 $\partial w / \partial x$ 이며 w_y 는 $\partial w / \partial y$, 그리고

w_{xy} 는 $\partial^2 w / \partial x \partial y$ 이다.

Fig. 1의 (a)에서 절점(node) ①의 좌표를 $x=0, y=0$ 이라 하면 절점(node) ①에서의 변위는 (4)와 같다.

$$w_1 = c_1, \quad w_{x1} = \frac{\partial w}{\partial x} = c_2 \quad (4)$$

$$w_{y1} = \frac{\partial w}{\partial y} = c_3, \quad w_{xy1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c_5$$

절점(node) ②의 좌표를 $x=a, y=0$ 이라 하고 ③의 좌표를 $x=a, y=b$ 라 하고 ④의 좌표를 $x=0, y=b$ 라 하여 각 절점에 대해서도 마찬가지로 방법으로 변위를 구하면 $\{w\} = [x]\{c\}$ 와 같이 행렬식으로 표시되며 $\{c\} = [x]^{-1}\{w\}$ 이다. 여기서 구한 $\{c\}$ 를 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \frac{1}{a^3 b^3} [(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_1 \\ &\quad + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_2 \\ &\quad + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 3y^3)w_3 \\ &\quad + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_4 \\ &\quad + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_{x1} \\ &\quad + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_{x2} \\ &\quad + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_{x3} \\ &\quad + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3)w_{x4} \\ &\quad + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-b)^2w_{y1} \\ &\quad + b(3ax^2 - 2x^3)y(y-b)^2w_{y2} \\ &\quad + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2)w_{y3} \\ &\quad + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2)w_{y4} \\ &\quad + abxy(x-a)^2(y-b)^2w_{xy1} \\ &\quad + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2w_{xy2} \\ &\quad + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by)w_{xy3} \\ &\quad + abxy(x-a)^2(y^2 - by)w_{xy4}] \end{aligned} \quad (5)$$

(5)는 보통 (6)과 같이 표기되며, 여기서 f_1, f_2, \dots, f_{16} 을 형상함수라 한다.

$$w(x,y) = f_1 w_1 + f_2 w_2 \dots + f_{16} w_{xy4} \quad (6)$$

2.2 강성 방정식

평판요소에 대한 강성방정식은 Castigliano의 정리를 사용해서 구한다.

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (\text{단, } q_i: \text{절점의 변위}) \quad (7)$$

단, q 는 4개의 변위 w, w_x, w_y, w_{xy} 를 나타내며 아래첨자 i 는 절점(node)의 번호이다.

평판요소에 대한 변형에너지는 (8)과 같다.

$$U = \int_0^b \int_0^a \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (8)$$

절점(node) ①의 두께방향 외력인 Y_1 의 경우를 예로 들면 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$Y_1 = \frac{\partial U}{\partial w_1} = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial w_1} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + 2(1-\nu) 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial}{\partial w_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = D \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \quad (9)$$

절점(node) ②, ③, ④에 대해서도 같은 방법으로 두께 방향의 외력(Y)과 굽힘모멘트(M) 그리고 비틀림모멘트(T)에 대해 Castigliano의 정리를 사용하면 (9)와 같이 정리할 수 있으며 그 결과는 $\{F\} = [K]\{w\}$ 와 같은 행렬식으로 나타낼 수 있고 행렬 $[K]$ 의 각 항은 (10)과 같다.

$$k_{ij} = D \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \right) + \nu \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \quad (10)$$

2.3 질량방정식

평판요소에 대한 질량방정식은 (11)의 운동에너지의 정리와 (12)의 Lagrange의 식으로부터 구한다.

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^b \int_0^a \{ \dot{w}(x) \}^2 dx dy \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (12)$$

절점(node) ①의 두께방향 외력인 Y_1 의 경우를 예로 들면 (13)과 같이 구할 수 있다.

$$Y_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_1} \right) + \frac{\partial U}{\partial w_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho h}{2} \right) \int_0^b \int_0^a 2 \{ \dot{w}(x) \} \frac{\partial}{\partial \dot{w}_1} \{ \dot{w}(x) \} dx dy + \frac{\partial U}{\partial w_1} = \rho h \left[\int_0^b \int_0^a f_{11} f_1 dx dy \quad \int_0^b \int_0^a f_{12} f_2 dx dy \quad \dots \quad \int_0^b \int_0^a f_{16} f_{16} dx dy \right] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \vdots \\ \ddot{w}_{16} \end{Bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial w_1} = [m_{11} \ m_{12} \ \dots \ m_{15} \ m_{16}] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \vdots \\ \ddot{w}_{16} \end{Bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial w_1}$$

절점(node) ②, ③, ④에 대해서도 동일한 방법으로 m_{ij} 를 구하면 행렬 $[M]$ 의 각 항은 (14)와 같은 운동방정식 (12)는 (15)와 같이 표시할 수 있다.

$$m_{ij} = \rho h \int_0^b \int_0^a f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy \quad (14)$$

$$\{F\} = [M]\{\ddot{w}\} + [K]\{w\} = [[K] - \omega^2[M]]\{w\} \quad (15)$$

(15)로부터 고유진동수 ω 를 구할 수 있다.

3. 주파수 분석 실험

본 연구에서는 외팔 평판의 구멍의 크기 및 위치가 고유진동수 변화에 미치는 영향을 주파수 분석 실험을 통하여 확인하였다. 실험에 사용된 측정 장치와 실험 방법 그리고 실험 결과는 다음과 같다.

3.1 실험 평판과 측정 장치

실험에 사용된 평판은 기계구조용 탄소강(S45C)이며 폭과 길이가 모두 200×200(mm)이고 두께는 2.2(mm)이다. 구멍의 크기가 너무 작으면 구멍에 의한 고유진동수의 변화량이 너무 작아 해석 과정에서 실험 결과와 비교가 어렵고 너무 크면 평판 내에서의 위치 선정에 제약을 받게 되므로 구멍의 크기는 평판의 크기 200×200×2.2(mm)에 대한 체적비가 0.5625, 2.25, 5.0625(%)

Table 1 Specifications of the plate and the analyzer

Spec. of the plate	Mass Density	7850	kg/m ³
	Length	200	mm
	Width	200	mm
	Thickness	2.2	mm
	E	205	GPa
Spec. of the analyzer	Analyzer	DSA 212	Difa Measuring Systems
	Accelerometer	8634b5	Kistler
	Impact Hammer	DYTR-PULSE	Dytran

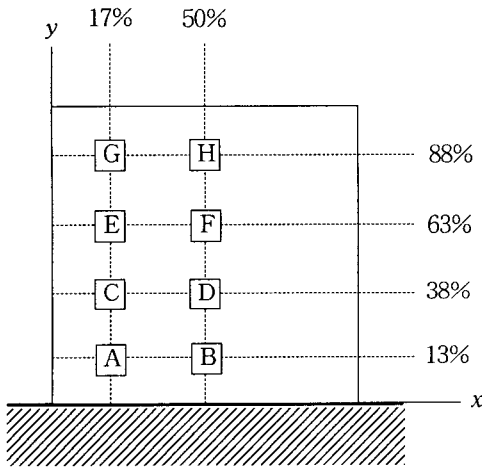


Fig. 2 Locations of the holes

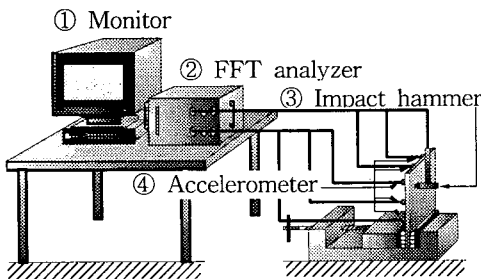


Fig. 3 Schematic diagram of the experimental setup

가 되도록 15× 15, 30× 30, 45× 45(mm)의 크기를 갖는 정사각형 구멍으로 하였다. 구멍의 위치는 1차 진동형~5차 진동형의 노달라인(nodal line)에 대해 가까운 곳과 먼 곳에 구멍의 중심이 위치하도록 Fig. 2와 같이 x축 방향으로 17, 50(%) 그리

고 y축 방향으로 13, 38, 63, 88(%)에 위치하도록 하였다. 본 연구에 사용된 Fig. 2의 외팔 평판은 좌우대칭이므로 왼쪽에 구멍이 존재하는 경우에 대해서만 실험을 하였으며 실험에 사용된 평판과 주파수 분석 장치의 사양은 Table 1과 같고 실험 장치의 개략도는 Fig. 3과 같다.

3.2 실험 방법

Fig. 3의 개략도에 나타난 바와 같이 바이스 내에 봉을 넣어 평판을 고정시켰으며 센서는 5곳에 부착하고 센서 반대면을 타격하여 5점에서 측정된 FRF 신호를 분석하여 고유진동수를 얻었다. 구멍의 크기는 평판의 넓이에 대해 그 비가 0.5625, 2.25, 5.0625(%)가 되도록 15, 30, 45(mm)의 변 길이를 갖는 정사각형 구멍으로 하였으며 1차에서 5차 고유진동수까지를 측정하였다.

3.3 실험 결과

1차 진동형의 경우는 구멍의 위치가 고정부에서 멀어질수록 고유진동수가 증가하여 구멍의 중심위치가 y축 방향으로 63%의 위치에서는 거의 비슷하거나 약간 큰 결과를 나타내며, 88%의 위치에 있으면 구멍이 없는 외팔 평판의 고유진동수보다 커져 구멍이 있는 외팔보의 1차 진동형에서 나타나는 변화양상과 동일한 결과를 나타낸다.⁽¹⁷⁾

2차 진동형 이상의 경우는 복잡한 양상을 보이지만 구멍의 크기는 고유진동수의 변화량에 영향을 미치고 진동수의 증감은 구멍의 위치에 의해 결정됨을 Table 2의 결과로부터 확인할 수 있다.

4. 구멍이 있는 평판의 진동 해석

4.1 유한요소법에 의한 구멍의 영향 해석

유한요소법 해석에서는 외팔 평판을 36개의 요소로 분할하였다. 각각의 요소는 Fig. 1(a)에서 나타난 바와 같이 4자유도의 4개 절점(node)이 있고 외력이 작용하지 않으며 절점(node)에서의 횡방향 변위 w 는 (3)과 같이 거리 x 와 y 의 3차 다항식의 곱이고 주기함수인 것으로 가정하였다. 각각의 요소에 대한 강성행렬식 (10)과 질량행렬식 (14)를 (15)에 대입하면 구멍이 있는 평판의 고유진동수를 구할 수 있다. 주파수 분석 실험을 한 시편 중 평판의 면적에 대한 구멍의 면적비가 가장 큰 5.0625%(45× 45)(mm)인 구멍에 대해 유한요소

Table 2 The results of the experiments

Hole Location	Hole size	Natural frequencies[Hz]					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	
A x= y=	0	45.3	114.1	279.3	373.4	407.0	
	17%	15×15	44.5	112.5	277.0	372.7	403.0
	13%	30×30	43.0	110.2	273.4	370.3	396.9
		45×45	40.6	106.3	266.1	367.2	389.1
B x= y=	0	45.0	113.0	276.5	367.0	402.0	
	50%	15×15	43.8	111.7	274.2	366.4	399.2
	13%	30×30	42.2	110.9	272.0	364.1	397.7
		45×45	39.8	110.2	268.0	360.2	394.5
C x= y=	0	45.3	114.1	279.0	374.0	406.3	
	17%	15×15	45.3	113.3	278.1	371.1	405.5
	38%	30×30	44.5	112.5	277.3	366.4	407.0
		45×45	43.0	110.2	276.6	358.6	413.3
D x= y=	0	45.3	113.2	277.0	371.1	402.3	
	50%	15×15	44.5	112.5	275.8	369.5	401.6
	38%	30×30	43.8	110.2	274.2	365.6	400.8
		45×45	43.0	107.8	272.7	362.5	399.2
E x= y=	0	45.3	114.1	279.0	373.0	407.0	
	17%	15×15	45.3	114.1	276.6	371.1	404.7
	63%	30×30	45.3	114.1	273.4	365.6	402.3
		45×45	46.1	115.0	268.0	352.3	402.3
F x= y=	0	45.3	117.2	280.0	369.0	409.4	
	50%	15×15	45.3	116.4	278.1	365.0	409.0
	63%	30×30	45.3	114.1	273.4	355.5	404.0
		45×45	46.1	111.5	266.4	346.9	396.1
G x= y=	0	45.3	113.0	276.0	368.0	402.0	
	17%	15×15	45.3	112.5	276.0	368.0	402.0
	88%	30×30	47.0	115.6	276.6	367.2	403.1
		45×45	48.4	121.9	276.6	360.0	414.1
H x= y=	0	45.3	113.3	277.0	373.0	405.0	
	50%	15×15	46.1	112.7	279.0	367.2	402.3
	88%	30×30	46.9	111.7	280.5	350.8	392.2
		45×45	49.2	108.0	286.7	333.6	367.0

Table 3 Comparison of the natural frequencies (Hz) from the experiments and the FEM

Hole Location	Method	1st	2nd	3rd	4th	5th
A	Experiment	40.6	106.3	266.1	367.2	389.1
	FEM	41.2	106.8	270.7	357.1	398.4
	Error(%)	1.5	0.5	1.7	2.8	2.4
B	Experiment	40.8	111.2	273.0	365.2	401.5
	FEM	41.4	112.7	277.1	356.5	410.4
	Error(%)	1.5	1.3	1.5	2.4	2.2
C	Experiment	43.0	110.2	276.6	358.6	413.3
	FEM	43.7	110.5	283.8	351.1	423.0
	Error(%)	1.6	0.3	2.6	2.1	2.3
D	Experiment	43.0	107.8	272.7	362.5	399.2
	FEM	43.9	109.9	281.4	357.7	412.5
	Error(%)	2.1	1.9	3.2	1.3	3.3
E	Experiment	40.6	106.3	266.1	367.2	389.1
	FEM	46.7	115.5	275.4	349.4	410.4
	Error(%)	1.5	0.5	1.7	2.8	2.4
F	Experiment	40.8	111.2	273.0	365.2	401.5
	FEM	46.9	110.3	272.9	345.0	404.2
	Error(%)	1.5	1.3	1.5	2.4	2.2
G	Experiment	43.0	110.2	276.6	358.6	413.3
	FEM	49.6	124.7	286.1	361.0	434.3
	Error(%)	1.6	0.3	2.6	2.1	2.3
H	Experiment	43.0	107.8	272.7	362.5	399.2
	FEM	49.8	109.8	293.8	330.4	380.0
	Error(%)	2.1	1.9	3.2	1.3	3.3

에 나타냈다. 최대 오차는 3.6%로 시편의 내부 불균일과 이론처럼 완벽한 지지조건의 구현이 현실적으로 어렵다는 점 등을 감안할 때 타당성 있는 값이라 할 수 있다.

4.2 유한요소법에 의한 데이터베이스 구축

Geometry가 200×200×2.2(mm)인 평판에 대해 구멍이 고유진동수의 변화에 미치는 영향을 유한요소법을 이용하여 해석하였다.

50×50(mm)(6.25%)인 구멍이 1차에서 5차까지의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 확인하였으며 그 결과를 Fig. 5~Fig. 9에 나타냈다. Fig. 5~Fig. 9의 진동수비 R_0 는 구멍이 있는 평판의 고유진동수(ω')를 구멍이 없는 평판의 고유진동수(ω)로 나눈 진동수비(ω'/ω)이므로 R_0 가 1보다

법을 이용하여 해석하였으며 그 결과를 Table 3

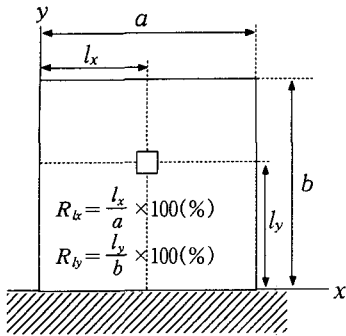


Fig. 4 Locations of the holes on the plate

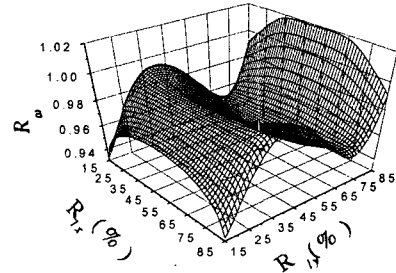


Fig. 7 Variation of the third natural frequencies with the positions of the hole

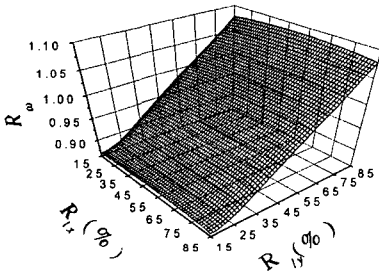


Fig. 5 Variation of the first natural frequencies with the positions of the hole

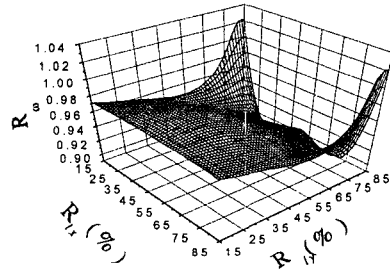


Fig. 8 Variation of the fourth natural frequencies with the positions of the hole

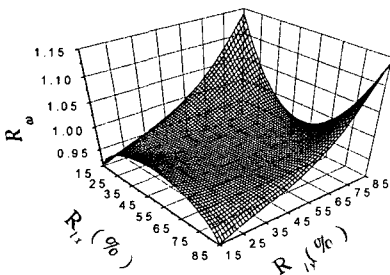


Fig. 6 Variation of the second natural frequencies with the positions of the hole

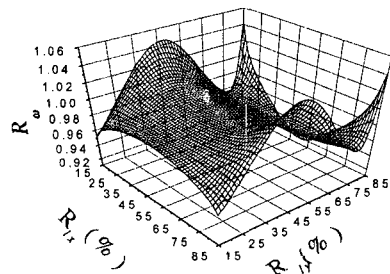


Fig. 9 Variation of the fifth natural frequencies with the positions of the hole

크면 고유진동수가 증가하였음을 의미하고 R_0 가 1보다 작으면 고유진동수가 감소하였음을 나타낸다. Fig. 4에서 나타낸 것처럼 R_x 는 평판의 x 축 방향 전체 길이 a 에 대한 구멍 중심까지의 거리 l_x 의 비이고 R_y 는 평판의 y 축 방향 전체 길이 b 에 대한 구멍 중심까지의 거리 l_y 의 비이다.

따라서 Fig. 5~Fig. 9를 이용하면 구멍의 위치

에 따른 고유진동수의 변화 양상을 예측할 수 있어 공진 영역을 피하여 안전한 구조물을 설계하는 데에 활용이 가능하지만 정확한 진동수의 제어는 불가능하므로 다음 절(4.3)에서 진동수를 정확히 제어하는 방법을 소개한다.

4.3 데이터베이스를 이용한 평판의 진동제어

구조물을 설계하는 경우에는 구성요소의 형상과 크기를 결정하여 구성요소들 간의 공진이 발생하지 않도록 하여야 한다. 그러나 제한된 공간 등의 문제로 구성요소의 형상과 크기를 변경할 수 없는 경우에는 구멍이나 보강재를 이용하여 간단히 고유진동수를 제어할 수 있다. 본 연구에서는 Fig. 2의 구멍 위치를 기준으로 고유진동수를 제어하고자 한다. 각 진동형별로 고유진동수를 증가시키거나 감소시키기 위해서는 2개의 구멍 위치가 필요하며 이 위치는 FEM 해석 결과로부터 구축된 데이터베이스를 이용하여 구할 수 있다.

외팔 평판의 고유진동수를 구멍을 이용하여 제어하는 방법은 다음과 같다.

우선 구멍이 없는 외팔 평판의 고유진동수를 (16)의 식을 이용하여 구한다.⁽¹⁸⁾

$$\omega_i = f_i \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}} \quad (16)$$

단, 정사각형의 외팔 평판의 $f_1=3.494, f_2=8.547, f_3=21.44, f_4=27.46, f_5=31.17$ 이다. (16)을 이용하여 계산한 구멍이 없는 외팔 평판의 고유진동수에 데이터베이스로부터 구한 진동수비를 곱하면 구멍이 있는 평판의 고유진동수를 예측할 수 있다.

4.3.1 1차 진동형의 고유진동수 제어

Fig. 5에서 확인된 바와 같이 1차 진동형의 구멍에 의한 고유진동수의 변화는 고정단으로부터 구멍 중심까지의 거리인 R_b 의 영향을 크게 받으며 R_k 가 고유진동수의 변화에 미치는 영향은 R_b 에 비해 극히 작다. 따라서 1차 진동형의 경우는 고정단으로부터 구멍중심까지의 거리(R_b)와 구멍의 크기(R_v)가 고유진동수의 변화에 직접적으로 큰 영향을 미치고 있음을 Table 2와 Fig. 5를 통해 확인할 수 있다. 단, R_v 는 구멍의 체적을 평판의 총 체적으로 나눈 백분율이다.

크기가 50×50(mm)인 정사각형 구멍에 대해 R_k 가 50%인 지점에서 R_b 를 변화시키며 진동수비의 변화를 표시하면 Fig. 10과 같고 직선으로 선형화하여 기울기(Δ)를 구할 수 있다. 그리고 30×30, 40×40, 58×58(mm)인 구멍에 대해서도 50×50(mm)과 동일한 방법으로 그 기울기를 구하고 평판의 체적에 대한 구멍의 체적비인 R_v 와의 관계를 나타내면 Fig. 11과 같고 Fig. 11의 도표는 (17)과 같이 수식으로 표시할 수 있다.

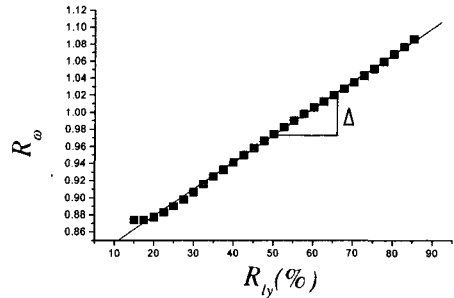


Fig. 10 Variation of the first natural frequencies with the positions of the hole($R_k=50\%$)

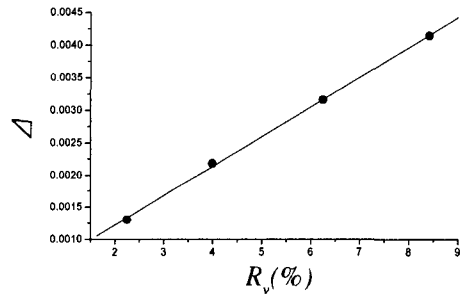


Fig. 11 Variation of the slope Δ with the hole size for the first mode vibration

$$\Delta = 0.000457622R_v + 0.000302783 \quad (17)$$

Fig. 10에서 R_ω 가 1인 경우의 R_b 는 평균값이 58.38%이고 R_b 가 “0” 일 때의 진동수비를 R_ω' 라 하면 (18)로 나타낼 수 있다.

$$R_\omega' = 1 - 58.38\Delta \quad (18)$$

$$R_\omega = R_\omega' + \Delta R_b \quad (19)$$

그리고 진동수비 R_ω 는 (19)이므로 (17), (18), (19)로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$R_\omega = 1 + \frac{(4.57622R_v + 3.02783)(R_b - 58.38)}{10000} \quad (20)$$

가로, 세로의 길이가 같은 외팔 평판의 경우는 (20)을 이용하여 쉽게 1차 고유진동수를 구할 수 있으며 가로, 세로의 길이가 다른 외팔 평판의 경우도 역시 동일한 방법으로 수식화가 가능하다.

4.3.2 2차 진동형의 고유진동수 제어

Geometry가 200×200×2.2(mm)인 외팔 평판에 크기가 15×15, 20×20, 25×25, 30×30, 35×35, 40×40, 45×45, 50×50(mm)인 구멍이 Fig. 2의

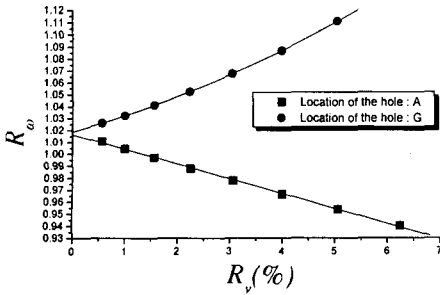


Fig. 12 Variation of the second natural frequencies with the hole sizes

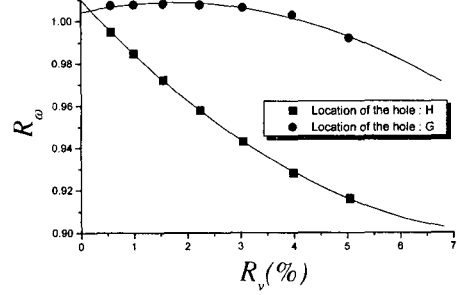


Fig. 14 Variation of the fourth natural frequencies with the hole sizes

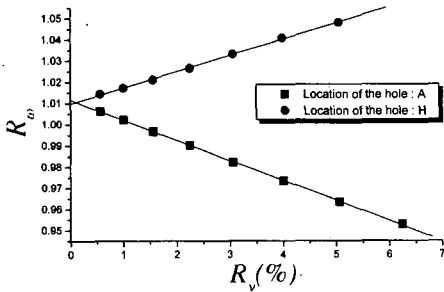


Fig. 13 Variation of the third natural frequencies with the hole sizes

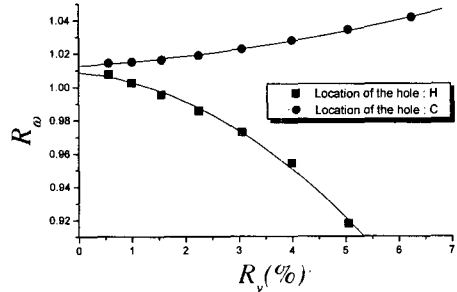


Fig. 15 Variation of the fifth natural frequencies with the hole sizes

위치 A와 G에 있는 경우에 대해 구멍의 크기와 진동수 비와의 관계를 FEM을 이용하여 해석하였고 그 결과를 Fig. 12에 나타냈다. Fig. 12에서 확인할 수 있는 바와 같이 구멍이 A에 위치하면 고유진동수는 감소하며 구멍의 크기와 진동수 비와의 관계는 다음과 같다.

$$R_{\omega} = 1.01656 - 0.01241R_v \quad (21)$$

또한 구멍이 G에 위치하면 고유진동수는 증가하며 (22)로 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.01903 + 0.0121R_v + 0.00117 R_v^2 \quad (22)$$

4.3.3 3차 진동형의 고유진동수 예측

Geometry가 200× 200× 2.2(mm)인 외팔 평판에 크기가 15× 15, 20× 20, 25× 25, 30× 30, 35× 35, 40× 40, 45× 45, 50× 50(mm)인 구멍이 Fig. 2의 위치 A와 H에 있는 경우에 대해 구멍의 크기와 진동수비의 관계를 Fig. 13에 나타냈으며 구멍이 A에 위치하면 고유진동수는 감소하며 (23)과 같

이 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.01157 - 0.00947R_v \quad (23)$$

구멍이 H에 위치하면 고유진동수는 증가하며 (24)로 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.00971 + 0.0076R_v \quad (24)$$

4.3.4 4차 진동형의 고유진동수 예측

Geometry가 200× 200× 2.2(mm)인 외팔 평판에 크기가 15× 15, 20× 20, 25× 25, 30× 30, 35× 35, 40× 40, 45× 45(mm)인 구멍이 Fig. 2의 위치 G와 H에 있는 경우에 대해 구멍의 크기와 진동수비의 관계를 Fig. 14에 나타냈으며 구멍이 H에 위치하면 고유진동수는 감소하며 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.00996 - 0.02696R_v + 0.00165 R_v^2 \quad (25)$$

구멍이 G에 위치하면 고유진동수는 부분적으로 증가하며 (26)으로 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.00426 + 0.00497R_v - 0.00144 R_v^2 \quad (26)$$

Table 4 Comparison of the natural frequencies from the experiments and the database

Mode	Hole Position	Hole Size	Natural frequencies[Hz]		
			Exp.	Data	Error(%)
1st	B	15×15	43.8	45.2	3.2
		30×30	42.2	43.6	3.3
		45×45	39.8	40.9	2.8
	H	15×15	46.1	47.2	2.4
		30×30	46.9	48.2	2.8
		45×45	49.2	50.0	1.6
2nd	A	15×15	112.5	114.6	1.9
		30×30	110.2	112.2	1.8
		45×45	106.3	108.2	1.8
	G	15×15	112.5	116.5	3.6
		30×30	115.6	119.4	3.3
		45×45	121.9	126.0	3.4
3rd	A	15×15	277.0	286.5	3.4
		30×30	273.4	281.9	3.1
		45×45	266.1	274.3	3.1
	H	15×15	279.0	288.7	3.5
		30×30	280.5	292.3	4.2
		45×45	286.7	298.4	4.1
4th	H	15×15	367.2	362.9	1.2
		30×30	350.8	349.2	0.5
		45×45	333.6	333.9	0.1
	G	15×15	368.0	367.0	0.3
		30×30	367.2	367.6	0.1
		45×45	360.0	361.9	0.5
5th	H	15×15	402.3	417.9	3.9
		30×30	392.2	408.7	4.2
		45×45	367.0	380.8	3.8
	C	15×15	405.5	419.7	3.5
		30×30	407.0	421.8	3.6
		45×45	413.3	427.8	3.5

Where,

"Exp." is the results of the experiments

"Data" is the results of the database

4.3.5 5차 진동형의 고유진동수 예측

Geometry가 200×200×2.2(mm)인 외팔 평판에 크기가 15×15, 20×20, 25×25, 30×30, 35×35, 40×40, 45×45, 50×50(mm)인 구멍이 Fig. 2의

Table 5 Comparison of the natural frequencies from the database and the FEM

Mode	Hole Position	Natural frequencies[Hz]			Size
		Data	FEM	Error(%)	
1st	B	75.2	76.2	1.3	Plate : 200× 200×4 (mm)
	H	91.9	91.9	0.0	
2nd	A	199.2	196.9	1.2	Hole : 45×45 (mm)
	G	231.9	229.3	1.1	
3rd	A	504.9	499.2	1.1	Hole : 45×45 (mm)
	H	549.3	543.0	1.2	
4th	H	614.6	607.5	1.2	Hole : 45×45 (mm)
	G	666.1	658.6	1.1	
5th	H	705.6	691.3	2.1	Hole : 90×90 (mm))
	C	787.4	779.0	1.1	
1st	B	18.7	19.0	1.6	Plate : 400× 400×4 (mm)
	H	22.9	23.0	0.4	
2nd	A	50.1	49.2	1.8	Hole : 90×90 (mm))
	G	58.4	57.3	1.9	
3rd	A	126.2	124.8	1.1	Hole : 90×90 (mm))
	H	137.2	135.7	1.1	
4th	H	153.0	151.9	0.7	Hole : 90×90 (mm))
	G	165.8	164.6	0.7	
5th	H	177.0	172.8	2.4	Hole : 90×90 (mm))
	C	197.5	194.7	1.4	

Where,

"Data" is the results of the database

"FEM" is the results of the FEM

위치 C와 H에 있는 경우에 대해 구멍의 크기와 진동수비의 관계를 Fig. 15에 나타냈으며 구멍이 H에 위치하면 고유진동수는 감소하며 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.00883 - 0.00184R_v - 0.00286 R_v^2 \quad (27)$$

구멍이 C에 위치하면 고유진동수는 증가하며 (28)로 나타낼 수 있다.

$$R_{\omega} = 1.01272 + 0.00184R_v + 0.000451 R_v^2 \quad (28)$$

Geometry가 200×200×2.2(mm)인 외팔 평판에 대해 (16)을 이용하여 구멍이 없는 외팔 평판의 고유진동수를 구하면 $\omega_1=46.4$, $\omega_2=113.5$, $\omega_3=284.7$, $\omega_4=364.6$, $\omega_5=413.9$ 이다. 동일한 Geometry의 외팔 평판에 크기가 15×15($R_v=0.5625\%$), 30×30($R_v=2.25\%$), 45×45($R_v=5.0625\%$)인 구멍을 이용하여

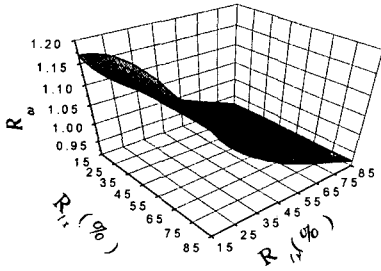


Fig. 16 Variation of the first natural frequencies with the positions of the ribs

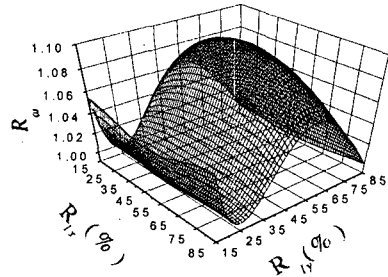


Fig. 18 Variation of the third natural frequencies with the positions of the ribs

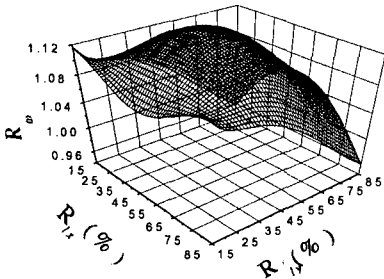


Fig. 17 Variation of the second natural frequencies with the positions of the ribs

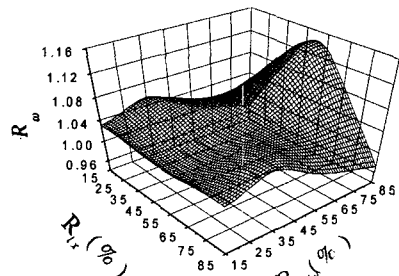


Fig. 19 Variation of the fourth natural frequencies with the positions of the ribs

고유진동수를 제어하는 경우에는 (20)~(28)을 이용하여 1차~5차 고유진동수비를 구한 후 구멍이 없는 외팔 평판의 고유진동수에 곱하면 된다. 이와 같은 방법으로 예측한 결과를 Table 4에 실험 결과와 함께 나타냈다.

4.4 치수가 다른 외팔 평판의 진동제어

Geometry가 200×200×4(mm), 400×400×4(mm)인 외팔 평판의 고유진동수를 (20)~(28)을 이용하여 제어하였으며 그 결과를 FEM 해석 결과와 함께 Table 5에 나타냈다. 해석에 사용된 구멍의 크기는 45×45, 90×90(mm)으로 전체 평판의 체적에 대한 구멍의 체적비(R_v)가 5.0625%가 되도록 하였다.

4.5 보강재에 의한 평판의 고유진동수 변화

보강재가 외팔 평판의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 확인하기 위해 Geometry가 200×200×2.2(mm)인 평판에 대해 FEM 해석을 하였다.

해석에 적용한 보강재의 크기는 50×50×2.2

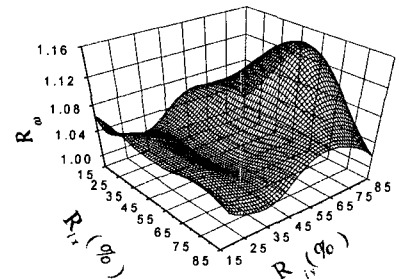


Fig. 20 Variation of the fifth natural frequencies with the positions of the ribs

(mm)($R_v=6.25\%$)이고 평판의 양면에 동일한 두께(1.1mm)의 보강재가 부착되도록 하였으며 보강재의 위치에 따른 고유진동수의 변화를 해석하여 그 결과를 Fig. 16~Fig. 20에 나타냈다.

외팔 평판의 보강재에 의한 고유진동수 변화는 구멍에 의한 고유진동수의 변화와는 거의 반대로 나타나는데 이는 노달라인(nodal line) 부근의 보강재가 평판의 강성을 증가시켜 고유진동수를 증

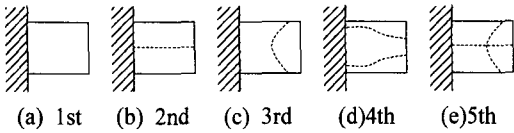


Fig. 21 Nodal lines of the cantilever plate

가시키는 반면 노달라인(nodal line) 부근의 구멍은 반대로 강성을 저하시켜 고유진동수를 감소시키기 때문이다.

5. 결과 및 고찰

5.1 구멍에 의한 평판의 고유진동수 변화

평판의 고유진동수 증감에는 구멍의 위치가 영향을 미치고 고유진동수의 변화량은 구멍의 크기와 관계가 있음을 FEM 해석 결과와 Table 2의 실험 결과에서 확인할 수 있다. 이는 물리적으로 Fig. 21에 나타낸 평판의 노달라인(nodal line) 부근에 구멍이 있을 경우는 강성이 저하되어 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 상대적으로 작아 고유진동수가 감소하고 구멍의 위치가 노달라인(nodal line) 부근에서 멀어질수록 강성이 증가하여 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 커져 고유진동수가 증가하기 때문이며 Fig. 5~Fig. 9의 도표에서 진동수비 R_0 가 낮은 영역이 모두 Fig. 21의 노달라인(nodal line) 부근임을 쉽게 확인할 수 있다.

5.2 보강재에 의한 평판의 고유진동수 변화

보강재에 의한 외팔 평판의 고유진동수의 변화 역시 보강재의 위치에 의해 증감이 결정됨을 Fig. 16~Fig. 20의 FEM 해석 결과로부터 확인할 수 있다. 구멍과는 반대로 평판의 노달라인(nodal line) 부근에 보강재가 존재하면 강성이 증가하여 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 상대적으로 커져 고유진동수는 증가하고 보강재의 위치가 노달라인(nodal line) 부근에서 멀어질수록 강성이 저하되어 운동에너지에 대한 변형에너지의 비가 작아져 고유진동수는 감소하게 됨을 Fig. 16~Fig. 20의 해석 결과와 Fig. 21의 노달라인(nodal line) 위치로부터 확인할 수 있다.

5.3 구멍 및 보강재에 의한 모드형상의 변화

평판에 구멍이 있는 경우는 구멍 주위의 강성

이 감소하여 구멍 부근의 변화가 급격한 진동모드형상(mode shape)을 나타내고 평판에 보강재가 있는 경우는 보강재로 인해 강성이 증가하므로 보강재 부근의 변화가 완만한 진동모드형상(mode shape)을 보인다.

또한 Fig. 21과 같은 외팔 평판에서 구멍이 가로 방향으로 길게 위치하게 되면 2차 진동형과 유사한 형상의 진동이 발생하기 쉬워지므로 5차 진동형이 3,4차 진동형보다 앞서 나타난다.

6. 결론

본 연구에서는 자동차, 항공기, 선박, 공작기계, 전용기, 교량, 건물 등 다양한 구조물의 구성요소로 활용도가 매우 높은 평판의 고유진동수와 구멍의 관계를 해석하여 평판의 고유진동수를 제어하는 방법을 제시하고자 하였으며 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 평판의 경우 구멍에 의한 고유진동수의 변화 양상은 구멍의 위치와 밀접한 관계를 갖고 있다. 구멍이 노달라인(nodal line) 부근에 존재하면 고유진동수는 감소한다. 이와는 반대로 구멍이 노달라인(nodal line)에서 멀어지게 되면 고유진동수는 증가한다.

FEM 해석 결과인 Fig. 5~Fig. 9에서 고유진동수가 낮은 부분은 모두 평판의 노달라인(nodal line) 부근임을 Fig. 21을 통해 확인할 수 있고 고유진동수를 상대적으로 증가시키는 구멍은 모두 노달라인(nodal line)에서 먼 곳에 위치함을 확인할 수 있다.

(2) 평판의 고유진동수 변화량은 구멍의 크기에 의해 결정된다. Table 2의 실험 결과와 Fig. 10~Fig. 15의 FEM 해석 결과에서 확인할 수 있는 것처럼 평판내의 동일 위치에서 구멍의 크기만을 변화시키며 고유진동수의 변화량을 확인하면 고유진동수의 변화량과 구멍의 크기는 일정한 관계를 갖고 있어 수식화가 가능함을 알 수 있다.

(3) 본 연구에서 제안한 데이터베이스를 이용한 수식 (20)~(28)을 이용하면 평판에 구멍의 위치와 크기를 결정하여 고유진동수를 제어할 수 있어 안정된 시스템의 설계에 활용이 가능하다.

(4) 평판에서 보강재가 고유진동수의 변화에 미치는 영향은 구멍과는 거의 반대임을 Fig. 16~Fig. 20을 통해 확인할 수 있다. 보강재가 노달

라인(nodal line) 부근에 존재하면 고유진동수는 증가하고 이와는 반대로 구멍이 노달라인(nodal line)에서 멀어지게 되면 고유진동수는 감소한다. 따라서 구멍과 보강재는 고유진동수의 변화에 상반되는 영향을 미치게 된다.

(5) 본 연구의 결과를 이용하여 평판구조물의 고유진동수를 예측 및 제어함으로써 산업 현장에서 구조물을 설계할 때 컴퓨터나 전용소프트웨어를 사용하지 않고도 간단하게 동적으로 안정된 시스템을 구성할 수 있다. 또한 다른 형상의 구성요소들에 대해서도 여러 가지 지지조건과 보다 더 다양한 구멍의 크기와 위치 그리고 형상에 대해 데이터베이스를 구축한다면 그 활용도는 더욱 더 클 것이므로 앞으로도 지속적인 연구가 필요하리라 사료된다.

참고문헌

- (1) Stephen P. Timoshenko and Woinowsky-Krieger S., 1959, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill.
- (2) Rajalingham C., Bhat R. B. and Xistris G. D. , 1996, "Vibration of Rectangular Plates using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 193, No. 2; pp. 497~509.
- (3) Kantorovich L. V. and Krylov V. I. , 1964, *Approximate Methods in Higher Analysis*, Groningen, The Netherlands, Noordhoff.
- (4) Leissa A. W. , 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP 160, Washington D.C.: U.S. Government Printing Office.
- (5) Leissa A. W. , 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, pp. 257~293.
- (6) Rajalingham C., Bhat R. B. and Xistris G. D. , 1996, "Closed Form Approximation of Vibration Modes of Rectangular Cantilever Plates by the Variational Reduction Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 197, No. 3, pp. 263~281.
- (7) Lee J. M. and Kim K. C. , 1995, "Vibration Analysis of Rectangular Isotropic Plates using Mindline Plate Characteristic Functions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 187, No. 5, pp. 865~877.
- (8) Kato Y. and Honma T., 1998, "The Rayleigh-Ritz Solution to Estimate Vibration Characteristics of Building Floors," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 2, pp. 195~206.
- (9) 김현실, 강현주, 김재승, 1993, "Power Flow Method를 이용한 평판의 고주파수 진동 해석," 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 3, pp. 568~575.
- (10) 문덕홍, 여동준, 1993, "전달영향계수법에 의한 사각형 평판구조물의 자유진동해석," 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 3, pp. 559~567.
- (11) 김용우, 박건순, 민옥기, 1991, "판 및 셸의 편심 보강 유한 요소," 대한기계학회논문집, Vol. 15, No. 3, pp. 771~788.
- (12) Sakiyama T. and Huang M., 1998, "Free Vibration of Rectangular Plates with Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, No. 3, pp. 379~397.
- (13) Wu J.-S. and Luo S.-S., 1997, "Use of Analytical-and-Numerical-Combined Method in the Free Vibration Analysis of a Rectangular Plate with Any Number of Point Masses and Translational Springs," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 200, No. 2, pp. 179~194.
- (14) Striz A. G., Chen W. L. and Bert C. W., 1997, "Free Vibration of Plates by the High Accuracy Quadrature Element Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 202, No. 5, pp. 689~702.
- (15) Guo S. J., 1997, "Vibration Analysis of Stepped Thickness Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 204, No. 4, pp. 645~657.
- (16) Kwon Young W. and Bang Hyochoong, 1996, *The Finite Element Method Using Matlab*, CRC Press, New York, pp. 235~242.
- (17) 조한중, 노승훈, 1999, "등단면 및 변단면 외팔보의 고유진동수 변화에 미치는 설계변수의 영향," 대한기계학회논문집, Vol. 23, No. 4, pp. 697~708.
- (18) Cyril M. Harris, 1988, *Shock and Vibration handbook*, McGraw-Hill, p. 7.34.