

광탄성 프린지 위상 이동법을 이용한 곡선보평판의 응력해석

백태현* · 김명수** · 김수일***
(2000년 1월 15일 접수)

Stress Analysis of a Curved Beam Plate by using Photoelastic Fringe Phase Shifting Technique

Tae Hyun Baek, Myung Soo Kim and Soo Il Kim

Key Words: 광탄성(Photoelasticity), 응력해석(Stress Analysis), 프린지 이동법(Fringe Shifting Method), 위상이동법(Phase Shifting Method), 원형편광기(Circular Polariscopes), 실험 응력해석(Experimental Stress Analysis), 디지털 영상처리(Digital Image Processing).

Abstract

The method of photoelasticity allows one to obtain principal stress differences and principal stress directions in a photoelastic model. In the classical approach, the photoelastic parameters are measured manually point by point. This is time consuming and requires skill in the identification and measurement of photoelastic data. Fringe phase shifting method has been recently developed and widely used to measure and analyze fringe data in photo-mechanics. This paper presents the test results of photoelastic fringe phase shifting method for the stress analysis of a curved beam plate. The technique used here requires four phase stepped photoelastic images obtained from a circular polariscope by rotating the analyzer at 0°, 45°, 90° and 135°. Experimental results are compared with those of ANSYS and calculated by the simple beam theory. Good agreement among the results can be observed.

1. 서 론

광탄성법은 실험역학에서 응력 및 변형률을 측정하기 위하여 사용되고 있는 방법 중의 하나이며, 전체적인 응력장(whole-field stress)을 가시적으로 관찰할 수 있는 큰 장점이 있다.⁽¹⁻²⁾ 그러나, 광탄성에서 주응력 차이에 의하여 나타나는 등색프린지(isochromatic fringe) 또는 등경프린지(isoclinic fringe)는 광강도(light intensity)가 서로 다른 유한폭의 프린지 밴드를 이루고 있기 때문

에 최대 또는 최소의 광강도를 갖는 위치에서 육안으로 측정하여 응력으로 변환하고자 할 때 많은 시간이 소요되며 실험오차를 배제할 수 없다. 이를 위하여, 등색프린지 차수(isochromatic fringe order)가 반 프린지 이하인 경우에 전체의 응력장으로부터 광탄성 데이터를 자동으로 측정할 수 있는 반프린지 광탄성법(half fringe photoelasticity)⁽³⁾이 개발되어 편리하게 사용되고 있다. 일반적으로 프린지 차수가 많은 경우, 광탄성 데이터의 정밀 측정을 위하여 디지털 영상처리를 적용한 등색선 프린지 증식 및 세션처리에 관한 연구(isochromatic fringe multiplication and sharpening)⁽⁴⁻⁷⁾가 이루어져 정밀 응력해석에 응용되고 있다.

본 논문에서는 최근까지 연구·개발된 여러 가지 광탄성기법⁽⁸⁾중 위상이동법(phase shifting method)⁽⁹⁾에 관한 이론을 곡선보형 평판에 적용하여 응력분포를 측정 후, 이들 측정값을 재래식

* 회원, 산대학교 기계공학부
E-mail : thbaek@ks.kunsan.ac.kr
TEL : (063)469-4714 FAX : (063)469-4727
** 군산대학교 전자공학과
*** 군산대학교 대학원 기계공학과

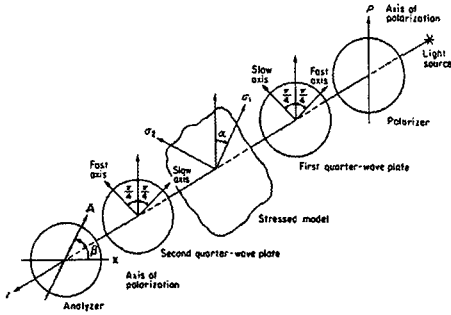


Fig. 1 Circular polariscope (dark-field setup)

광탄성법 및 유한요소해석 결과와 비교하였다.

2. 이론

2.1 타디보간법(Tardy Compensation Method)

광탄성에서 주응력의 차이에 나타나는 등색선 프린지(isochromatic fringe)는 Fig. 1과 같이 편광판(polarizer), 두 개의 4분파판(quarter wave plate), 그리고 검광자(analyzer)로 구성된 원형편광기(circular polariscope)로부터 얻을 수 있다.

원형편광기의 암시야배열(dark-field setup)에서 검광자를 임의의 각도 β 로 회전시켰을 때 광강도(light intensity) I_β 는

$$I_\beta = K(1 - \cos 2\beta \cos \Delta - \sin 2\beta \cos 2\alpha \sin \Delta) \quad (1)$$

위의 식에서 K =비례상수, β =암시야 배열로부터 검광자의 회전각, α =등경각(isoclinic angle), Δ =상대지연(relative retardation)으로 $\Delta = 2\pi N$ 이며, N 은 등색선프린지 차수(isochromatic fringe order)를 의미한다. 편광기를 주응력방향(direction of principal stress)과 일치시켰을 때, 즉 등복각이 $\alpha = 0$ 조건에서는

$$I_\beta = K(1 - \cos 2\beta \cos \Delta - \sin 2\beta \sin \Delta) \quad (2)$$

식 (2)를 정리하면

$$I_\beta = K\{1 - \cos(\Delta - 2\beta)\} \quad (3)$$

2.2 프린지 이동법(Fringe Shifting Method)

원형편광기에서 타디보간법(Tardy compensation)에 관한 식으로부터 프린지 이동법(fringe shifting method)에 관한 식을 구할 수 있다.

식 (3)에서 광탄성 프린지와 관계없는 background noise I_o 를 고려하고, $\phi = 2\beta$ 로 대체시킨 후, 식 (3)을 광강도에 관한 일반적인 식으로 변형하여 나타내면

$$I(x) = I_o(x) + I_f(x) \cos[\Delta(x) + \phi] \quad (4)$$

식 (4)에서 $I_f(x)$ 는 프린지 패턴(fringe pattern)의 광강도를 의미한다. ϕ 는 위상차(phase difference)로서 등색선프린지 차수와 관계되는 $\Delta(x)$ 를 구하기 위하여 0에서 2π 사이의 값을 택할 수 있으며, 여러 가지 알고리즘이 사용되고 있다. 위상차를 $\beta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ 로 변화시켜 가며 이에 해당되는 광강도로부터 다음의 4-프린지 이동법(four-fringe shifting method)에 관한 식⁽⁹⁾을 구할 수 있다.

$$\Delta(x) = \tan^{-1} \left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right) \quad (5)$$

식 (5)로부터 $\Delta(x)$ 에 관한 전체적인 위상맵(whole-field phase map)을 생성할 수 있다. 그러나 식 (5)의 arc tangent 함수는 $-\pi$ 에서 π 범위 이내이므로 위상점프(phase jump)가 나타난다. 이를 펼치면(unwrapping) $\Delta(x)$ 에 관한 위상맵을 얻을 수 있다. 이러한 위상맵은 광탄성에서는 검광자를 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 및 135° 로 회전시킬 때 프린지의 위상이동으로 나타나는 현상을 이용하므로 프린지 위상이동법(fringe shifting method)이라고도 한다.

위의 프린지이동법은 재래적으로 사용되고 있는 타디보간법의 개선된 방법으로 생각할 수 있다. 타디보간법은 등색선차수(isochromatic fringe order)를 구하고자 하는 위치에서 등경각(isoclinic angle)을 결정한 후 편광기를 등경각 또는 주응력 방향에 일치시킨다. 이러한 위치에서 검광자를 회전시켜 흑색프린지(dark fringe)가 구하고자 하는 위치를 통과할 때 검광자의 회전된 각도 β 로부터 소수 프린지(decimal fractional fringe)차수를 다음의 식 (6)과 같이 결정할 수 있다.

$$n = N \pm \frac{\beta}{\pi} \quad (6)$$

식 (6)에서 N 은 육안에 의하여 구분될 수 있는 정수의 프린지차수(integral fringe order)이다. 이와 같이 타디보간법은 수작업(manual operation)에 의존하여 각각의 점에 대해서 개별적으로 계산(pointwise process)하여야 하나, 프린지 이동법은 등경각 프린지 선상의 모든 점에 대한 광강도로부터 등색선프린지, 즉 주응력의 차인 ($\sigma_1 - \sigma_2$)를 구할 수 있다. 즉,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{nf_\sigma}{t} \quad (7)$$

식 (7)에서 $f_\sigma = \lambda/c$ 로서 재료의 프린지상수이며 λ 와 c 는 각각 광원의 파장과 광속을 의미한다. t 는 시편의 두께이다.

3. 실험 및 이론 비교

3.1 광탄성 실험

프린지 이동법의 유효성을 입증하기 위하여 Fig. 2와 곡선보의 평판을 택하였다. 이러한 곡선보 평판에 대해서는 단순보 이론에 의한 응력 계산을 할 수 있으며, 유한요소 모델링도 간편하여 실험과 이론에 의한 응력을 직접 비교할 수 있다. 시험편 재질은 기계가공성과 광탄성 효과가 우수한 폴리카보네이트 계열인 PSM-1⁽¹⁰⁾이고, 두께(t)는 3.18mm, 재료의 프린지상수(f_σ)는 7005N/m 이며 영탄성계수(E)는 2,482MPa이다. 실험에서 사용된 광원은 백색광이며 CCD카메라에 $\lambda=569.5\text{nm}$ 인 단색광 필터(narrow band pass filter)를 설치하여 영상을 얻었다.

시편에 $P=147\text{N}$ 의 하중을 가한 후 명시야 배열의 원형편광기(light field circular polariscope setup)로부터 얻은 등색선프린지 패턴은 Fig. 3과 같다. Fig. 3의 A-B선상에 나타난 광강도 분포는 Fig. 4와 같다. 재래식 광탄성법에서는 광강도가 최대 또는 최소인 지점에서 프린지차수를 측정하여 응력으로 변환한다.

본 연구에서는 Fig. 2의 A-B선상에서 프린지 분포를 결정하기 위하여 프린지이동에 의한 위상 이동법을 적용하였다. Fig. 2의 A-B선상에서는 등

경각이 0° 이므로 명시야 또는 암시야배열의 표준 편광기 배열 상태에서 위상이동법을 적용할 수 있다. 이를 위하여 검광자를 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 및 135° 회전시켜 Fig. 5와 같은 광탄성 영상을 저장하였다. 저장된 영상으로부터 식 (5)에 의하여 계산된 프린지이동으로 인한 위상맵(fringe phase map)은 Fig. 6과 같다.

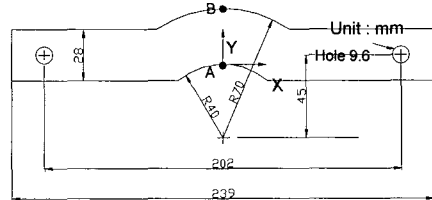


Fig. 2 Curved-beam shaped plate subject to tensile load

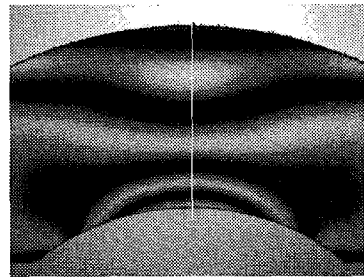


Fig. 3 Isochromatic fringe pattern in light field circular polariscope setup

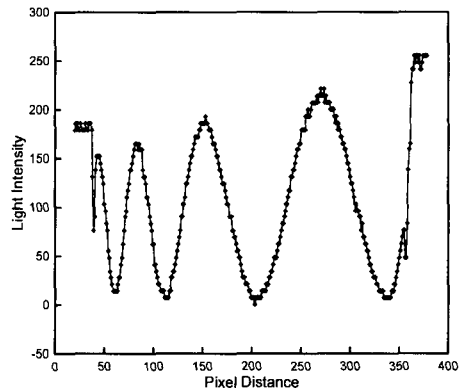
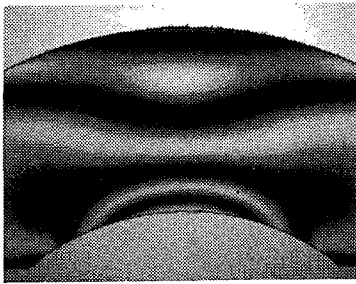
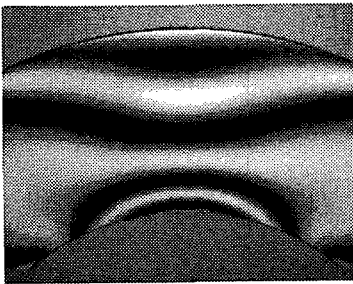


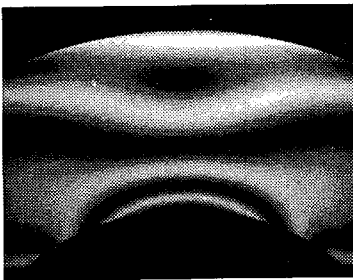
Fig. 4 Light intensity distribution along the line A-B in Fig. 2



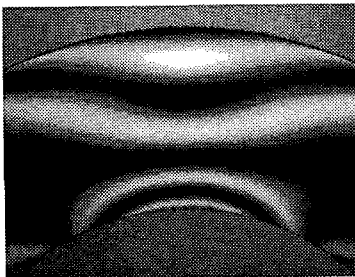
(a) 0°



(b) 45°



(c) 90°



(d) 135°

Fig. 5 Fringe shifted patterns by rotating analyzer

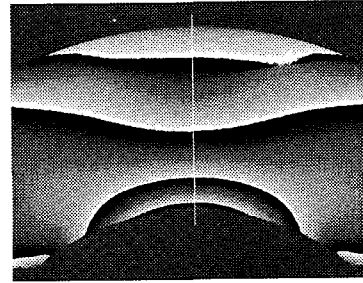


Fig. 6 Isochromatic fringe phase map for Fig. 5 calculated with Eq. (5)

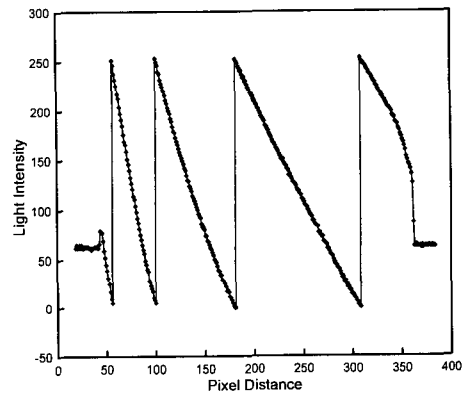


Fig. 7 Light intensities of fringe phase map along the line of A-B in Fig. 2

Fig. 6의 프린지 위상맵으로부터 수직선으로 나타낸 광강도 분포는 Fig. 7과 같다. 원래의 프린지 패턴의 광강도 분포는 Fig. 4에서와 같이 정차수나 반차수의 프린지 위치에 따라 최대 및 최소 광강도가 서로 다르게 나타났다. 즉, 백색프린지 (white fringe) 경우를 예로 들면 최대 광강도가 위치에 따라 서로 다르며, 이는 광원(light source)이 균일하지 않은 것에 기인된 것으로 추정할 수 있다. 그러나, 프린지 위상맵으로부터 얻은 광강도 분포는 Fig. 7에서 보인 바와 같이 최대 또는 최소값이 균일하게 나타나게 되어 상당량의 background noise가 제거되었음을 알 수 있다.

프린지 위상맵은 식 (5)에서와 같이 arc tangent 범위가 $-\pi$ 에서 π 이므로 Fig. 7과 같이 위상점프 (phase jump)가 나타나며, 위상이동에 의한 광강도(phase intensity)를 펼치면(unwrapping)면 Fig. 8

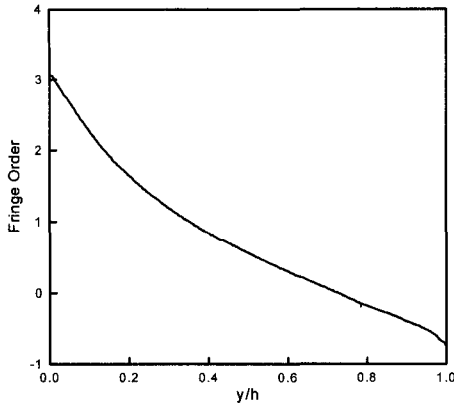


Fig. 8 Unwrapped fringe phase map obtained from Fig. 7

과 같이 A-B선상의 전체적(whole field)인 위상맵을 얻을 수 있다. 즉, Fig. 8은 Fig. 7로부터 phase jump가 일어나는 부분에서 2π 에 해당되는 값을 더해주었으며, 이들을 프린지로 환산하여 A-B선상에서 식 (7)과 같이 주응력의 차이로 인한 프린지 분포를 나타낸 그래프이다. Fig. 2의 A-B 선상에서는 $\sigma_1 = \sigma_x$ 이고, $\sigma_2 = 0$ 이므로 광탄성 실험에 의한 프린지 분포는 시편의 두께(t) 및 재료의 프린지 상수(f_σ)가 일정하므로 σ_x 에 직접 비례한다.

3.2 이론응력 계산

Fig. 2와 같은 시편의 A-B선상에 작용되는 이론 응력을 얻기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 상용 프로그램인 ANSYS⁽¹¹⁾를 이용하여 Fig. 9와 같이 모델링하였다. 해석에 사용된 물성치는 폴리카보네이트(PSM-1)의 물성치($E = 2482$ MPa, $\nu = 0.38$)와 동일하며, 8노드 사변형요소(8 node quadrilateral element)를 사용하였다.

또한, 다음의 식과 같은 단순보이론⁽¹²⁾에 의해서도 Fig. 2의 A-B선상의 응력을 계산하였다.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_z(\rho - R)}{\rho y A} \quad (7)$$

위의 식 (7)에서 P 는 하중, A 는 단면적, M_z 는 모멘트, ρ 는 곡률 중심으로부터 곡선보 임의

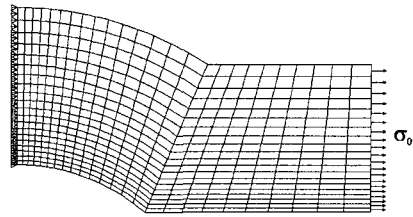


Fig. 9 ANSYS discretization of the plate of Fig. 2

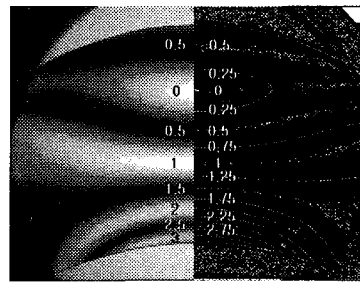


Fig. 10 Original fringes (left) and fringe sharpened lines (right)

위치까지의 거리를 의미한다. 또한, $\bar{y} = R_c - R$ 이며, R_c 는 곡률 중심으로부터 곡선부의 도심(centroid)까지의 거리를 나타낸다. 또한, $R = h / \ln(R_o/R_i)$ 이며, h , R_o 및 R_i 는 각각 시편의 폭, 곡률 중심으로부터 외측반경과 내측반경이다.

3.3 실험결과와 이론해석 비교

위상이동법을 이용한 광탄성 실험결과를 Fig. 10에 나타낸 프린지증식 및 세션처리에 의한 측정값,⁽⁸⁾ 유한요소법과 식 (7)의 단순보 이론등에 의해 계산된 응력과 비교하면 Fig. 11과 같다. Fig. 11에서 나타낸 바와 같이 Fig. 2의 A-B선상의 응력은 시편에 가해진 평균응력($\sigma_0 = A/P$)로 무차원화 하였으며, A-B의 길이도 시편의 폭 h 로 무차원화 하였다.

Fig. 10에서 보인 바와 같이 위상이동법에 의한 응력은 프린지증식 및 세션처리에 의하여 측정된 응력⁽⁷⁾과 정확히 일치하며, 단순보 이론보다는 유

참고문헌

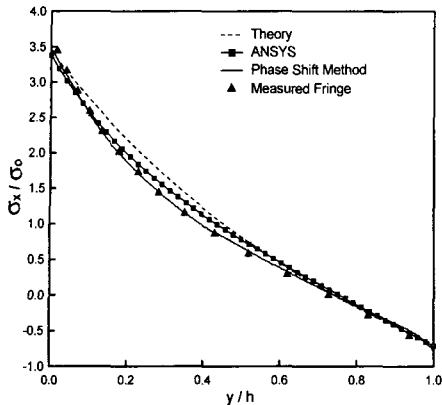


Fig. 11 Normalized axial stress distribution along the line A-B of Fig. 2 obtained from experiment and theory

한요소 결과에 근접하게 나타났다.

4. 결론

본 연구에서는 원형 편광기를 등경선상에 일치시키고, 검광자를 회전시켜 얻은 4개의 광탄성 영상으로부터 프린지 이동에 의한 위상맵을 계산하였다. 위상맵으로부터 얻은 등색선프린지 분포를 응력으로 변환한 후, 아래와 같은 결과를 얻었다.

(1) 프린지 이동에 의한 위상맵으로 측정된 응력은 등색선 프린지의 증식 및 세선처리법에 의한 결과와 잘 일치하였다.

(2) 유한요소 해석결과는 프린지 이동에 의한 위상맵으로 측정된 응력에 근접하였으나, 단순보 이론에 의한 응력은 더 많은 차이를 나타냈다. 그러나, 이들 차이는 정밀 응력 실험시 포함될 수 있는 오차한계 이내로 추정된다.

본 연구에서 사용된 프린지 이동법은 원형편광기를 주응력의 방향, 즉 등경프린지(isoclinic fringe) 선상에서 전체적인 응력분포를 정밀하게 해석할 수 있는 장점이 있다. 그러나, 편광기가 주응력 방향과 일치하지 않을 때는 $\cos 2\alpha \neq 1$ 이므로 식(1)을 식(2)와 같이 단순화시킬 수 없으며, 또한 식(5)도 적용할 수 없다. 이들을 보완하기 위한 추가적인 연구가 필요하다.

- (1) Frocht, M. M., 1967, *Photoelasticity*, Vol. 1 and 2, John Wiley and Sons.
- (2) Dally, J. W. and Riley, W. F., 1991, *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill, Inc.
- (3) Voloshin, A. S. and C. P. Burger, 1983, "Half Fringe Photoelasticity," *Experimental Mechanics*, Vol. 23, pp. 304~314.
- (4) Baek, T. H. and Burger, C. P., 1991, "Accuracy Improvement Technique for Measuring Stress Intensity Factors in Photoelastic Experiment," *KSME International Journal*, Vol. 5, No. 1, pp. 22~27.
- (5) 백태현, 1994, "광탄성 프린지 해석을 위한 영상처리 기법 개발," 대한기계학회 논문집, 제18권, 제10호, pp. 2577~2584.
- (6) Baek, T. H., Kim, M. S., Rhee, J. and R. E. Rowlands, 1999, "Hybrid Full-field Stress Analysis of Perforated Plate by Photoelasticity and conformal Mapping," *International Conference on Advanced Technology in Experimental Mechanics '99 (ATEM'99), JSME-MMD*, Vol. 2, pp. 642-646.
- (7) 백태현, 김명수, 김수일, "광탄성법을 이용한 곡선보 평판의 응력분포 해석," *비파괴검사학회지*, 19권, 3호 (1999. 6), pp. 200~206.
- (8) Ajovalasit, A., Barone, S. and Petrucci, G., 1998, "A Review of Automated Methods for the Collection and Analysis of Photoelastic Data," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 33, No. 2, pp. 75~91.
- (9) Asundi, A., 1993, "Phase Shifting in Photoelasticity," *Experimental Techniques*, Vol. 7, No. 1, pp. 19~23.
- (10) Photoelastic Division, Measurement Group, Inc., Raleigh, NC. 27611, USA.
- (11) ANSYS Program and User's Manual, Version 5.3, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA, USA.
- (12) Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M., 1993, *Advanced Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, pp. 362~373.