

일반 사각 단면 형상을 갖는 박판보의 끝단효과에 관한 연구

김진홍* · 김윤영**
(1999년 9월 20일 접수)

End Effects of Thin-Walled Beams with General Quadrilateral Cross Sections

Jin Hong Kim and Yoon Young Kim

Key Words: Thin-Walled Beam(박판보), Quadrilateral Cross Section(사각단면), Distortion(찌그러짐), Warping(뒤틀림), End Effects(끝단효과)

Abstract

End effects due to sectional deformations of thin-walled beams with closed cross section are analysed by a one-dimensional theory. In particular, end effects associated with warping (out of plane motion) and distortion (in plane motion) are investigated. The exact solutions as a vector form are newly derived to reveal slowly-decaying nature of the end effects in a thin-walled beam loaded by a couple. Several examples of thin-walled beams under various loading conditions indicate that the local end effect zone due to warping and distortion is approximately ten times the typical beam width.

1. 서론

박판보는 적은 질량에 비해 큰 강성을 갖기 때문에 자동차, 항공기, 교량, 건물 등의 구조물에서 많이 사용되고 있다. 그러나 박판보는 고전적인 보 이론(오일러 보 이론)으로 설명하기 어려운 단면 변형 현상이 발생하는데 이 특성으로 결합부가 있는 박판보 구조물의 응력, 진동해석시 심각한 영향을 받는다.⁽¹⁾ 이 단면 변형에는 크게 두 가지로 나눌 수 있는데 단면에 수직한 방향으로의 변형 뒤틀림(warping)^(2,3)과 단면 내에서의 변형 찌그러짐(distortion)⁽³⁾이라고 할 수 있다. 이 두 가

지 변형으로 끝단효과 발생하게 된다. 통상 뒤틀림 현상에 대해서는 많은 연구^(2,3)가 진행되었으며, 최근까지 국내에서도 유한요소를 이용한 수치적 접근⁽⁴⁾이 이루어져왔다. 반면 찌그러짐에 의한 현상들은 아직도 많이 연구되고 있는 실정이다.

Fig. 1은 짝힘이 작용하는 경우 힘의 분포를 나타내는데, 이 경우 비틀림과 동시에 찌그러짐이 발생한다. 이 찌그러짐을 일으키는 힘은 경계 조건을 만족시키기위해 존재하는 힘으로서 그 합력은 0이 된다. 이 찌그러짐이 끝단효과로서 작용하여 박판보의 비틀림 거동에 상당한 영향을 미치게 된다. Fig. 2(a,b)는 각각 강체 회전으로 인한 변형과 찌그러짐에 의한 변형으로 나타나는데, 이 중에서 찌그러짐 변형은 주로 폐단면에서 발생한다.^(3,5-7) 이와 아울러 단면의 수직 방향으로 뒤틀림 변형도 발생한다.

Boswell과 Zhang^(8,9)은 실험 및 1차원 유한요소법을 이용하여 찌그러짐과 뒤틀림을 고려한 해석

* 서울대학교 정밀기계설계공동연구소

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부, 정밀기계설계공동연구소

E-mail : yykim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

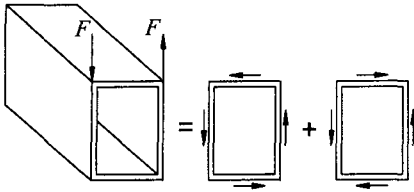


Fig. 1 A thin-walled beam under a couple

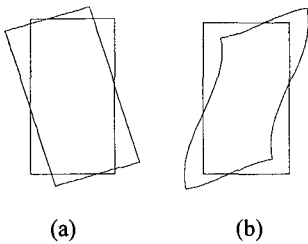


Fig. 2 (a) Rigid body rotation and (b) distortional deformation

을 수행하였다. 일반적으로 이러한 변형은 보가 비틀릴 때 수반되는 변형으로, 비틀림, 뒤틀림, 찌그러짐을 고려한 1차원 유한요소해석을 수행한 유사한 연구 결과들이 보고된 바 있다.^(5-7,10,11)

Balch와 Steele⁽¹²⁾은 이런 찌그러짐 변형 등에 의한 끝단 효과를 고찰하기 위해 판이론에 기초한 점근적인 방법(asymptotic approach)을 수행한 적이 있으나, 1차원 이론으로 일반 사각 단면에 대한 엄밀한 해석은 보고된 바 없다.

본 연구의 목적은 Kim과 Kim⁽⁷⁾이 제안한 1차원 이론에 의거하여 임의의 사각 단면 박판보의 비틀림에 수반되는 찌그러짐, 뒤틀림에 의한 끝단 효과를 규명하였다. 이를 위해 엄밀해를 유도하였고, 뒤틀림과 찌그러짐이 실제 비틀림에 의한 강제 회전량에 끼치는 끝단 효과를 정량적으로 분석하였다. 또한 같은 비틀림 모멘트를 가하는 경우라도 경계 조건에 따라 그 끝단 효과가 보의 전체 비틀림 유연성에 어떠한 영향을 끼치는지를 규명하였다.

2. 기본 가정

2.1 단면 변형 정의

Fig. 3은 직사각 단면의 두께 중립선의 임의의 점의 변위를 보여주고 있다. 여기서는 수선방향

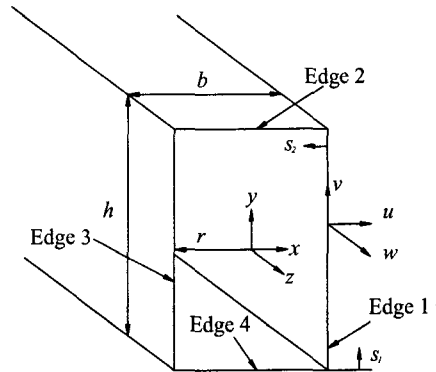


Fig. 3 Displacements on the middle line of rectangular box beam (The thickness of each edge is not shown.)

변위 $u(s, z)$, 축방향 변위 $w(s, z)$, 중심선의 접선 방향 변위 $v(s, z)$ 를 고려한다.

폐단면 박벽축에 일어날 수 있는 변형을 i) 강제 회전량을 나타내는 $\Theta(z)$, ii) 뒤틀림량을 나타내는 $U(z)$, iii) 찌그러짐의 양을 나타내는 $\chi(z)$ 에 의한 3가지 변형으로 나눌 수 있다. 폐단면의 중심선에 발생하는 변위 u, v, w 를 다음과 같이 3가지 변형의 합으로 표현한다. 단면 상의 s 좌표의 함수 $\psi(s)$ 와, z 의 함수의 곱으로 놓을 수 있다.⁽⁷⁾

$$\begin{Bmatrix} u(s, z) \\ v(s, z) \\ w(s, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_n^\Theta(s) \\ \psi_s^\Theta(s) \\ \psi_z^\Theta(s) \end{Bmatrix} \Theta(z) + \begin{Bmatrix} \psi_n^U(s) \\ \psi_s^U(s) \\ \psi_z^U(s) \end{Bmatrix} U(z) + \begin{Bmatrix} \psi_n^\chi(s) \\ \psi_s^\chi(s) \\ \psi_z^\chi(s) \end{Bmatrix} \chi(z) \quad (1)$$

식 (1)에서 ψ 의 함수는 단면 변형을 나타내는 함수로서 단지 s 만의 함수로 표기된다.

먼저 강제 회전만 발생하는 경우를 살펴보자. Fig. 3의 사각 단면이 도심을 중심으로 회전할 때, ($\Theta \neq 0, U = \chi = 0$)

$$\psi_n^\Theta(s_i) = -\bar{s}_i + s_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2a)$$

$$\psi_s^\Theta(s) = r(s) \quad (2b)$$

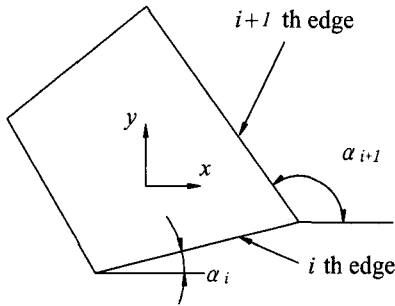


Fig. 4 The middle line of a general quadrilateral cross section

$$\psi_z^\theta(s) = 0 \tag{2c}$$

식 (2)에서 s_i 는 i 번째 변의 꼭지점에서부터 측정한 국부 좌표계이며, s_i 는 단면의 도심을 중심으로 반시계 방향으로 향하는 것으로 가정한다. 그리고 \bar{s}_i 는 i 번째 변의 꼭지점에서 r 이 i 번째 변과 수직으로 만나는 점까지의 거리를 나타낸다.

다음으로 축 방향의 뒤틀림 변형은 ($U \neq 0, \Theta = \chi = 0$) 다음과 같이 될 수 있다.^(7,13)

$$\psi_n^U = 0, \quad \psi_s^U = 0 \tag{3a,b}$$

$$\psi_z^U(s) = \int (r - r_n) ds + \psi_{z0}^U \tag{3c}$$

여기서

$$r_n = \frac{\oint_s r ds}{\oint ds}$$

식 (3c)에서 상수 ψ_{z0}^U 는 뒤틀림에 의해 발생하는 응력은 축방향의 가상일에 대해서 0이라는 조건으로 구할 수 있다.

$$\oint \psi_z^U(s) ds = 0$$

다음으로 단면의 찌그러짐에 의해 발생하는 변형 형태를 살펴보자 ($\chi \neq 0, \Theta = U = 0$). 식 (1)에 있는 $\chi(z)$ 는 물리적으로 인접하는 단면의 중심선들이 찌그러지는 평균각을 나타내는 양이다. 단면이 면내에서만 찌그러지는 경우, 축 방향의

변위는 없다고 볼 수 있다. 따라서,

$$w(z, s) = 0 \tag{4a}$$

$$\psi_z^x = 0 \tag{4b}$$

그리고 Fig. 2(b)에 묘사된 것처럼 단면의 찌그러진 형상을 기술하기 위해서 수선 방향의 변위와 접선 방향 변위를 나타내는 ψ_n^x 와 ψ_s^x 를 각각 3차식 및 상수로 놓을 수 있다.

$$\psi_{s_i}^x(s_i) = C_{i0}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{4c}$$

$$\psi_{n_i}^x(s_i) = D_{i0} + D_{i1}s_i + D_{i2}s_i^2 + D_{i3}s_i^3 \tag{4d}$$

식 (4c,d)에서 s 대신 국부좌표 s_i 를 사용하였으며, 함수들이 각 변에서 정의된다는 것을 강조하기 위해 ψ 에 하첨자 i 를 붙여 놓았다.

식 (4c,d)에는 20개의 미지수를 포함하고 있다. 이 중에서 1개의 미지수를 임의로 놓을 수 있기 때문에 (예: $C_{10} = 1$), 모든 미지수를 구하기 위해서는 19개의 식이 필요하게 된다. 이 식들은 다음의 조건으로부터 구한다.

- (1) 꼭지점에서의 변위 연속 조건: 식 8개
4개의 꼭지점 각각에서 2개의 (평면) 변위 성분이 연속이어야 하므로 8개의 식을 얻는다.
- (2) 꼭지점에서의 회전각 연속 조건: 식 4개
- (3) 꼭지점에서의 굽힘 모멘트 연속 조건: 식 4개
- (4) 찌그러짐 변형에 대한 제한 조건
 - a) 강체 회전이 없을 것: 식 1개
 - b) x 방향 강체 직선 변위가 없을 것: 식 1개
 - c) y 방향 강체 직선 변위가 없을 것: 식 1개

이제 위의 조건들을 식으로 기술해 보자. 편의상, 조건 1을 Fig. 4와 같은 일반 사각단면에 대해서 식을 기술해 보았다.

$$\begin{aligned} \psi_{s_i}^x|_{s_i=l_i} &= \psi_{s_{i+1}}^x|_{s_{i+1}=0} \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \\ &\quad - \psi_{n_{i+1}}^x|_{s_{i+1}=0} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} \psi_{n_i}^x|_{s_i=l_i} &= \psi_{s_{i+1}}^x|_{s_{i+1}=0} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \\ &\quad + \psi_{n_{i+1}}^x|_{s_{i+1}=0} \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \end{aligned} \tag{5b}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; i + 4 = i)$$

조건 2와 3은 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_i} [\psi_{ni}^x(s_i)]_{s_i=l_i} \\ = \frac{d}{ds_{i+1}} [\psi_{ni+1}^x(s_{i+1})]_{s_{i+1}=0} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} M(s_i) |_{s_i=l_i} = M(s_{i+1}) |_{s_{i+1}=0} \quad (7) \\ (i=1, 2, 3, 4; i+4=1) \end{aligned}$$

여기서 $M(s_i)$ 은 길이가 l_i 인 변에서의 굽힘 모멘트로 고전적인 보 이론(오일러 보 이론)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M(s_i) = \frac{Et^3}{12} \frac{d^2 \psi_{ni}^x(s_i)}{ds_i^2} \quad (8)$$

여기서 E 는 재료의 탄성 계수(Young's modulus)이며, t 는 단면의 변의 두께이다.

마지막으로 조건 4는 다음과 같이 가상일의 원리를 이용하여 기술할 수 있다. 즉, 찌그러짐에 의해 발생하는 응력은 가상의 강체 변위에 대해 발생하는 가상일이 0이어야만 한다.

$$0 = \int_A r \sigma_{sz}^x \delta\theta \, dA \quad (9a)$$

$$0 = \int_A \sigma_{xz}^x \delta u_x \, dA \quad (9b)$$

$$0 = \int_A \sigma_{yz}^x \delta u_y \, dA \quad (9c)$$

여기서 $\delta\theta$, δu_x , δu_y 는 z 방향 가상 강체 회전과 x, y 방향의 가상 강체 변위를 나타낸다. 그리고 식 (9b,c)에서 찌그러짐 변형에 의해 발생하는 3차원 전단응력 σ_{xz}^x 와 σ_{yz}^x 는 σ_{sz}^x 으로부터 다음과 같이 구한다. i 번째 변에서는

$$\sigma_{xz}^x = \sigma_{sz}^x \cos \alpha_i, \quad \sigma_{yz}^x = \sigma_{sz}^x \sin \alpha_i \quad (10)$$

식 (9a~c)에서 A 는 축의 단면적을 나타낸다.

식 (10)을 이용하기 위해서는 찌그러짐 변형 $\chi(z)$ 에 의해 발생하는 전단 응력 $\sigma_{sz}^x(n, s, z)$ 를 구해야만 한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^x(n, s, z) &= 2\mu \varepsilon_{sz}^x(n, s, z) \\ &= \mu \psi_s^x(s) \frac{d\chi(z)}{dz} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 n 은 각 변의 중심선에서 두께 방향으로 향하는 좌표이고 μ 는 횡방향 탄성계수(shear modulus)이다. 식 (11)을 식 (9a)에 대입한 결과가

임의의 $\delta\theta$ 에 성립되어야 한다는 조건을 적용하면

$$0 = \int_A r(s) \psi_s^x \, dA = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} r_i \psi_{si}^x(s_i) t \, ds_i \quad (12a)$$

마찬가지로 식 (9b,c)는 각각 다음과 같이 된다.

$$0 = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \psi_{si}^x(s_i) \cos \alpha_i \, t \, ds_i \quad (12b)$$

$$0 = \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} \psi_{si}^x(s_i) \sin \alpha_i \, t \, ds_i \quad (12c)$$

식 (5~7), (12)의 19개의 방정식을 이용하여 식 (4c,d)의 미지수를 구할 수 있다. 직사각 단면(높이가 h , 폭이 b)의 경우에는 C_{01} 를 다음과 같이 놓으면

$$C_{01} \equiv k = \frac{bh}{b+h} \quad (13)$$

ψ_s^x 와 ψ_n^x 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\psi_{s_1}^x(s_1) = k, \quad 0 \leq s_1 \leq h \quad (14a)$$

$$\psi_{s_2}^x(s_2) = -k, \quad 0 \leq s_2 \leq b \quad (14b)$$

$$\psi_{s_3}^x(s_3) = k, \quad 0 \leq s_3 \leq h \quad (14c)$$

$$\psi_{s_4}^x(s_4) = -k, \quad 0 \leq s_4 \leq b \quad (14d)$$

그리고

$$\begin{aligned} \psi_n^x(s_1)/k &= \frac{2}{h^2} \left\{ -\frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{h} \right\} s_1^3 \\ &\quad - \frac{3}{h} \left\{ -\frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{h} \right\} s_1^2 \\ &\quad - \frac{2(b-h)}{bh} s_1 + 1 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \psi_n^x(s_2)/k &= -\frac{2}{b^2} \left\{ \frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{b} \right\} s_2^3 \\ &\quad + \frac{3}{b} \left\{ \frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{b} \right\} s_2^2 \\ &\quad - \frac{2(b-h)}{bh} s_2 - 1 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \psi_n^x(s_3)/k &= \frac{2}{h^2} \left\{ -\frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{h} \right\} s_3^3 \\ &\quad - \frac{3}{h} \left\{ -\frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{h} \right\} s_3^2 \\ &\quad - \frac{2(b-h)}{bh} s_3 + 1 \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \psi_n^x(s_4)/k &= -\frac{2}{b^2} \left\{ \frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{b} \right\} s_4^3 \\ &\quad + \frac{3}{b} \left\{ \frac{2(b-h)}{bh} + \frac{2}{b} \right\} s_4^2 \\ &\quad - \frac{2(b-h)}{bh} s_4 - 1 \end{aligned} \quad (15d)$$

2.2 지배방정식 유도

지금까지 식 (1)에 필요한 함수 $\psi(s)$ 를 모두 구하였다. 최소 포텐셜 에너지의 원리를 이용하여, 평형 방정식, 경계 조건을 유도하고자 한다. 이를 위해서, 식 (1)의 변형에 의해 발생하는 변형률을 구한 후 이를 이용하여 축에 대한 전체 포텐셜 에너지 Π 를 구해야 한다. 단면 상의 임의의 점에서의 3차원 변위를 구해 보자.

$$u_n(n, s, z) \approx u(s, z) = \psi_n^\theta(s) \Theta(z) + \psi_n^x(s) \chi(z) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_s(n, s, z) &\approx v(s, z) - n \frac{\partial u(s, z)}{\partial s} \\ &= \psi_s^\theta(s) \Theta(z) + \psi_s^x(s) \chi(z) \\ &\quad - n \frac{d\psi_n^x(s)}{ds} \chi(z) - n \frac{d\psi_n^\theta(s)}{ds} \Theta(z) \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_z(n, s, z) \approx w(s, z) = \psi_z^U(s) U(z) \quad (18)$$

식 (16~18)의 변위로부터 0이 아닌 변형률 성분을 구하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{zz}(n, s, z) = \frac{\partial w(s, z)}{\partial z} = \psi_z^U(s) \frac{dU(z)}{dz} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{sz}(n, s, z) &\approx \frac{\partial w(s, z)}{\partial s} + \frac{\partial v(s, z)}{\partial z} \\ &= \frac{d\psi_z^U(s)}{ds} U(z) + \psi_s^\theta(s) \frac{d\Theta(z)}{dz} \\ &\quad + \psi_s^x(s) \frac{d\chi(z)}{dz} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss}(n, s, z) &= \frac{\partial v(s, z)}{\partial s} - n \frac{\partial^2 u(s, z)}{\partial s^2} \\ &\approx -n \frac{d^2 \psi_n^x(s)}{ds^2} \chi(z) \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)의 ϵ_{ss} 은 단면 중심선의 찌그러짐에 의해 발생하는 굽힘 변형률을 나타낸다. 만약 이 변형률을 무시하면 모서리에서의 강성을 고려할 수 없게 된다.

식 (19~21)의 변형률로부터 응력을 구하기 위해서 평면 응력 상태를 가정한다. 이것은 n 방향으로의 변의 두께가 매우 얇기 때문에, $s-z$ 평면 상에서의 응력 분포를 평면 응력 상태로 놓을 수 있다.

$$\sigma_{zz} = E^* (\epsilon_{zz} + \nu \epsilon_{ss}) \quad (22)$$

$$\sigma_{ss} = E^* (\epsilon_{ss} + \nu \epsilon_{zz}) \quad (23)$$

$$\sigma_{sz} = 2\mu \epsilon_{sz} \quad (24)$$

여기서 $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ 이다.

길이 L 인 축의 포텐셜 에너지 Π 는 다음과 같이 단면에 대한 적분과 길이 방향에 대한 적분의 곱의 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dA dz \\ &\quad - \int_0^L \int_A (p_z u_z + p_s u_s) dA dz \\ &\quad - \left(\int_A [\bar{\sigma}_{zz} u_z + \bar{\sigma}_{sz} u_s]_{z=L} dA \right. \\ &\quad \left. - \int_A [\bar{\sigma}_{zz} u_z + \bar{\sigma}_{sz} u_s]_{z=0} dA \right) \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)에서 p_z, p_s 는 각각 축 방향 및 접선 방향으로 작용하는 분포 하중이며 $(\bar{\quad})$ 로 표기된 것은 경계에서 주어진 값을 의미한다.

식 (25)에 식 (16~24)을 대입한 후 축의 단면적 A 에 대해 적분을 수행하면

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} a U^2 + \frac{1}{2} c \chi^2 + \frac{1}{2} b_1 U^2 + \frac{1}{2} b_1^* \Theta^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b_5 \chi^2 + b_3 U \chi + b_2 U \Theta + b_4 \Theta \chi \right\} dz \\ &\quad - \int_0^L (p_1 U + q_1 \Theta + q_2 \chi) dz \\ &\quad - \left([\bar{M}_z \Theta + \bar{B} U + \bar{Q} \chi]_{z=L} \right. \\ &\quad \left. - [\bar{M}_z \Theta + \bar{B} U + \bar{Q} \chi]_{z=0} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 (\quad) 는 $d(\quad)/dz$ 를 나타낸다. 식 (26)에 있는 계수 a 등은 직사각 단면에 대해선 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a = E^* \int_A (\psi_z^U)^2 dA = E^* \frac{(b-h)^2 b^2 h^2 t}{24(b+h)} \quad (27a)$$

$$b_1^* = \mu \int_A (\psi_s^\theta)^2 dA = \frac{\mu b h (b+h) t}{2} \quad (27b)$$

$$b_1 = \mu \int_A \left(\frac{d\psi_z^U}{ds} \right)^2 dA = \frac{\mu b h (b-h)^2 t}{2(b+h)} \quad (27c)$$

$$b_2 = \mu \int_A \psi_s^\theta \frac{d\psi_z^U}{ds} dA = -\frac{\mu b h (b-h)^2 t}{2(b+h)} \quad (27d)$$

$$b_3 = \mu \int_A \psi_s^x \frac{d\psi_z^U}{ds} dA = \frac{2\mu b^2 h^2 (h-b) t}{(b+h)^2} \quad (27e)$$

$$b_4 = \mu \int_A \psi_s^\theta \psi_s^x dA = 0 \quad (27f)$$

$$b_5 = \mu \int_A (\psi_s^x)^2 dA = \frac{2\mu b^2 h^2 t}{(b+h)} \quad (27g)$$

$$c = E^* \oint_{n=-h/2}^{n=h/2} n^2 \left(\frac{d^2 \psi_n^x}{ds^2} \right)^2 dn ds \quad (27h)$$

$$= \frac{8E^* t^3}{b+h}$$

그리고

$$p_1 = \int_A p_z \psi_z^U dA, \quad q_1 = \int_A p_s \psi_s^\theta dA, \quad (27i)$$

$$q_2 = \int_A p_s \psi_s^x dA$$

식 (26)의 마지막에 있는 M_z, B, Q 의 정의는 다음과 같다.

$$M_z = \int_A \sigma_{sz} \psi_z^\theta dA \quad (28)$$

$$B = \int_A \sigma_{zz} \psi_z^U dA \quad (29)$$

$$Q = \int_A \sigma_{sz} \psi_s^x dA \quad (30)$$

여기서 M_z 는 비틀림 모멘트이며, B, Q 를 각각 쌍모멘트(bimoment), 횡방향 쌍모멘트(transverse bimoment)라고 부른다. 식 (28~30)의 σ 와 ψ 를 Θ, U, χ 로 표현한 후 단면에 대해 적분하면, 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

$$M_z = b_1^* \Theta + b_2 U + b_4 \chi \quad (31)$$

$$B = a U \quad (32)$$

$$Q = b_5 \chi + b_3 U + b_4 \Theta \quad (33)$$

이제 식 (26)에 대한 1차 변분을 취하면 다음의 지배방정식과

$$-a U'' + b_1 U + b_2 \Theta + b_3 \chi - p_1 = 0 \quad (34a)$$

$$-b_2 U - b_1^* \Theta - b_4 \chi - q_1 = 0 \quad (34b)$$

$$-b_3 U - b_4 \Theta - b_5 \chi + c \chi - q_2 = 0 \quad (34c)$$

그리고 $z=0$ 와 $z=L$ 에서의 경계 조건을 얻는다.

$$M_z = \bar{M}_z, B = \bar{B}, Q = \bar{Q} \quad (35a)$$

또는

$$\delta \Theta = 0, \delta U = 0, \delta \chi = 0 \quad (35b)$$

식 (34)와 (35)는 각각 폐단면 박벽축의 비틀림,

뒤틀림, 찌그러짐이 연성된 변형 문제에 대한 1차원 형태의 지배 방정식이며 이 일차원 이론에 대한 경계 조건이 된다.

2.3 엄밀해의 유도

식 (34)의 연립미분 방정식의 일반해를 구하기 위해서 다음과 같은 변위 벡터 Y 를 정의한다.

$$Y = \begin{Bmatrix} U(z) \\ \Theta(z) \\ \chi(z) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

식 (36)를 이용하여 식 (34)를 다시 쓰면

$$A \cdot \frac{d^2 Y}{dz^2} + B \cdot \frac{dY}{dz} + C \cdot Y = F \quad (37)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b_1^* & b_4 \\ 0 & b_4 & b_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & b_3 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} p_1 \\ -q_1 \\ -q_2 \end{Bmatrix}$$

식 (37)에 있는 계수 행렬 A, B, C 는 상수이기 때문에 이 식의 보조해($F=0$ 인 경우)를 다음과 같은 지수함수로 놓을 수 있다.

$$Y = \Psi e^{\lambda z} \quad (38)$$

식 (38)을 식 (37)에 대입한 후

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C) \cdot \Psi = 0 \quad (39)$$

식 (39)에서 Ψ 가 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 λ 는 다음의 특성 방정식을 만족시켜야만 한다.

$$|\lambda^2 A + \lambda B + C| = 0 \quad (40)$$

식 (40)을 전개하면 다음과 같은 λ 에 대한 6차 다항식을 구할 수 있다.

$$\lambda^6 - 2r^2 \lambda^4 + s^4 \lambda^2 = 0 \quad (41)$$

여기서

$$r^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{b_1^*(b_1 b_5 - b_3^2) - b_1^2 b_5}{ab_5 b_1^*} + \frac{c}{b_5} \right] \quad (42a)$$

$$s^4 = \frac{cb_1}{ab_5} - \frac{cb_1^2}{ab_5 b_1^*} \quad (42b)$$

식 (41)의 근을 구하면

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\bar{\lambda}_1 \quad (43a)$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = 0 \tag{43b}$$

여기서 $(\bar{})$ 는 공액 복소수(complex conjugate)를 나타내며 α, β 는 다음과 같이 정의되었다.

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}} \tag{44}$$

λ 가 0인 아닌 경우(즉, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 의 경우) 식 (39)로부터 Ψ 를 다음과 같은 구할 수 있다.

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_2}{\lambda b_1^*} \\ \frac{b_3 \lambda}{\lambda^2 b_5 - c} \end{pmatrix} \tag{45}$$

여기서 다음의 관계가 성립되는 사실을 쉽게 알 수 있다.

$$\Psi(\lambda_2) = \overline{\Psi(\lambda_1)}, \quad \Psi(\lambda_4) = \overline{\Psi(\lambda_3)}$$

λ 가 0인 경우(λ_5, λ_6)

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

이상의 결과로부터 보조하는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y = C_1 \Psi(\lambda_1) e^{\lambda_1 z} + C_2 \Psi(\lambda_2) e^{\lambda_2 z} + C_3 \Psi(\lambda_3) e^{\lambda_3 z} + C_4 \Psi(\lambda_4) e^{\lambda_4 z} + C_5 \Psi(\lambda_5) z + C_6 \Psi(\lambda_6) \tag{47}$$

그런데 $\Psi(\lambda_2) \exp(\lambda_2 z)$, $\Psi(\lambda_4) \exp(\lambda_4 z)$ 는 각각 $\Psi(\lambda_1) \exp(\lambda_1 z)$, $\Psi(\lambda_3) \exp(\lambda_3 z)$ 의 공액 복소수라는 사실과, 변위 Y 는 실수라는 사실을 이용하여 Y 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y = 2\text{Re} \{ C_1 \Psi(\lambda_1) e^{\lambda_1 z} + C_3 \Psi(\lambda_3) e^{\lambda_3 z} \} + C_5 \Psi(\lambda_5) z + C_6 \Psi(\lambda_6) \tag{48}$$

2.4 끝단 효과의 영향에 관한 고찰

앞에서 유도한 식 (48)의 엄밀해를 이용하여 이제 끝단 효과를 정량적으로 살펴보고자 한다. 만약 찌그러짐과 뒤틀림에 의한 끝단 효과⁽¹⁴⁾가 미치는 영향의 범위, 즉 소멸 거리(decay distance)를 \bar{z} 라 하면 이것은 다음의 식으로 평가할 수 있다.⁽¹⁵⁾

Table 1 Decay distances depending on the various ratios of t/b and h/b

t/b	h/b	\bar{z}
0.2	1	3.51941 b
0.2	0.5	2.08813 b
0.1	1	5.14801 b
0.1	0.5	3.09887 b
0.05	1	7.41088 b
0.05	0.5	5.14801 b
0.01	1	16.8163 b
0.01	0.5	10.2787 b

$$e^{-\text{Re} \lambda \bar{z}} = e^{-\pi} \approx 0.04$$

이 식은 끝단의 효과가 감소되는 소멸 거리를 평가할 수 있는 식이다. 이는 지수항의 실수값이 $-\pi$ 에 도달하면 본래의 값에서 약 4%에 이르는 데 통상적으로 끝단효과 영향의 영역으로 생각할 수 있다. Fig. 3에 있는 직사각 단면의 경우에 대해서 살펴보면

$$\bar{z} = \frac{\pi}{\alpha} \tag{49}$$

여기서 α 는 식 (42)와 (44)를 통해서 구할 수 있다.

$$\alpha = \frac{1}{b} \left[\frac{E^*}{\mu} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \frac{1}{(h/b)^2} + \left(\frac{t}{b} \right) \frac{4\sqrt{3}}{(h/b)(1+h/b)} \right]^{1/2} \tag{50}$$

Table 1에서는 t/b 와 h/b 의 여러 비율에 대한 끝단 \bar{z} 의 값들을 구해 보았다. 통상적으로 3차원 탄성체에서 나타나는 끝단 효과⁽¹⁴⁾와 달리 $t/b=0.01$ 인 경우에는 \bar{z} 가 b 의 10배 이상으로 나타나는 경우도 발생한다. 따라서 폐단면 박판보가 얇은 경우, 그 끝단 효과를 무시하면 심각한 오차가 발생할 수 있음을 알 수 있다.

3. 수치해석

직사각 단면을 갖는 외팔보의 자유단에 짝힘이 작용하는 경우 비틀림 각도와 그 찌그러짐 각도를 구해보았다. 치수와 하중 조건은 다음과 같다. $b=25\text{ mm}$, $h=50\text{ mm}$, $t=1\text{ mm}$, 길이 $L=1000\text{ mm}$, 짝힘에 작용하는 집중하중의 크기 $F=1\text{ kg mm/s}^2$. (Fig. 3 참조)

Fig. 5는 축방향으로의 비틀림에 의한 각도와 찌그러짐 각도 변화를 그린 것이다. 고전적인 St. Venant 이론⁽¹⁶⁾에 의한 결과(그림에서는 점선)로는 끝단에서 발생하는 비틀림각의 심각한 끝단 효과를 제대로 기술할 수 없음을 보여주고 있다. 일점쇄선으로 표시한 결과는 상용유한요소 프로그램인 I-DEAS⁽¹⁷⁾의 판요소 해석결과로서 본 연구 결과와 상당히 근접한 것을 알 수 있다. 아울러 짝힘이 가해지는 경우, 찌그러짐에 의한 변형도 매우 크다는 사실을 알 수 있는데, 고전적인 St. Venant 이론으로는 이러한 현상을 전혀 예측할 수 없다. Fig. 5에 있는 C_t 는 폐단면 박판보의 비틀림 강성값으로 다음과 같다.

$$C_t = \frac{4\mu\bar{A}^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\mu b^2 h^2 t}{2(b+h)}$$

여기서 \bar{A} 은 단면 형상을 이루는 단면 두께 중심선 내부면적을 가리킨다.

같은 직사각 단면 형상 및 조건에서 보의 길이를 바꿔가면서 각도의 분포를 구해보았다. Fig. 6(a,b)는 길이가 각각 500mm, 2000mm인 경우에 대한 결과인데, 길이가 단면치수에 상당히 긴 경우인데도 (각각 $b/L=0.1, 0.025$) 비틀림 각도에 상당한 영향을 주고 있음을 알 수 있다. 식 (49)와, (50)을 이용해 구한 소멸거리(이 단면의 경우: $\bar{z} \approx 14.45b$)로부터 쉽게 확인할 수 있다.

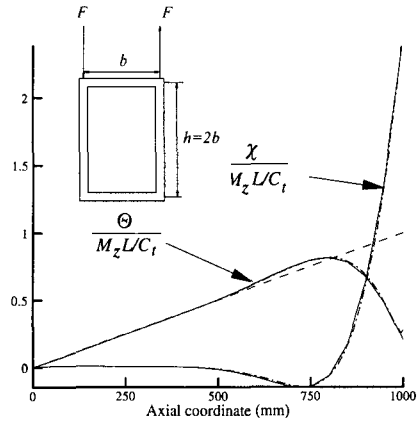


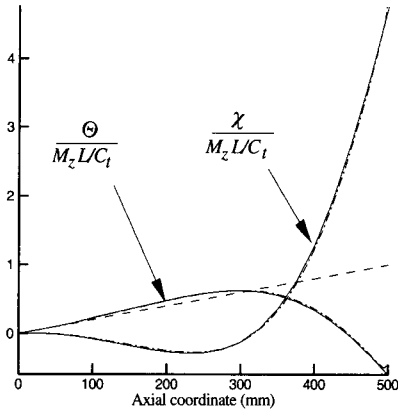
Fig. 5 The rotational (Θ) and distortional (χ) angles of a rectangular box beam under a couple. (Dotted: by the St. Venant torsion theory. Dash-dotted: by plate finite elements)

같은 형상에 대해서 수평방향으로 짝힘을 가하는 경우에 대해서 살펴보고자 한다. (단, 비틀림의 크기가 같게 하기 위해 집중하중의 크기는 $F/2$ 로 취한다.) Fig. 7은 짝힘의 방향을 수직으로 가했을 때와 수평방향으로 가했을 때의 비틀림 회전각도를 비교한 것으로 수평방향과 수직 방향의 짝힘이 서로 비틀림각도에 정반대의 영향을 주는 것을 확인할 수 있다.

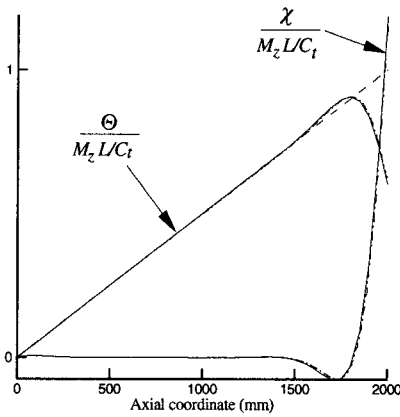
이것은 이 두 하중 조건이 같은 크기와 방향을 갖는 비틀림 모멘트를 주지만 횡방향 쌍모멘트 Q 의 부호가 서로 반대로 얻어지게 되어 끝단에서의 비틀림 각도의 증감현상이 다르게 나타나기 때문이다. 이러한 현상은 끝단 효과에 의한 역학적 거동이 크게 달라질 수 있다는 중요한 사실을 보여주고 있다.

다음으로 Fig. 8과 같은 형상과 크기를 갖는 사다리꼴 단면의 박판보에 짝힘이 작용하는 경우에 대해서 살펴보았다.

짝힘을 주기 위해서 외팔보 자유단의 양 모서리에 수직 방향으로 $F=1\text{ kg mm/s}^2$ 크기로 집



(a)



(b)

Fig. 6 The rotational and distortional angles with varying beam length. (a) $L=500$ mm (b) $L=2000$ mm (Dotted: by the St. Venant torsion theory. Dash-dotted: by plate finite elements)

중 하중을 가하였다. Fig. 9는 비틀림 회전 각도와 찌그러짐 각도를 그린 것으로 이 경우 찌그러짐의 각도는 편의상, 찌그러짐을 받을 때 한쪽 변이 찌그러지는 정도 γ 의 크기로 나타냈다. 이 경우 소멸거리는 약 300mm (단면 치수 h

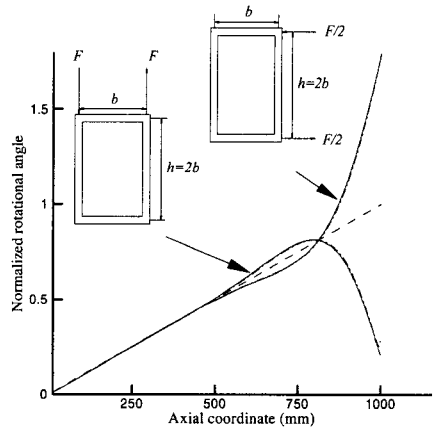


Fig. 7 Normalized rotational angle $\frac{\Theta}{M_2 L / C_t}$ for two different conditions (Dotted: by the St. Venant torsion theory Dash-dotted: by plate finite elements)

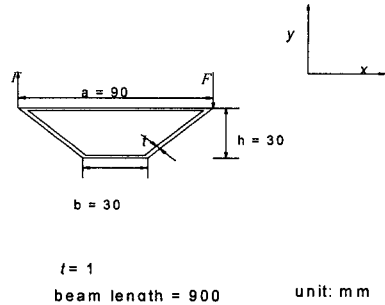


Fig. 8 Dimensions of a trapezoidal beam

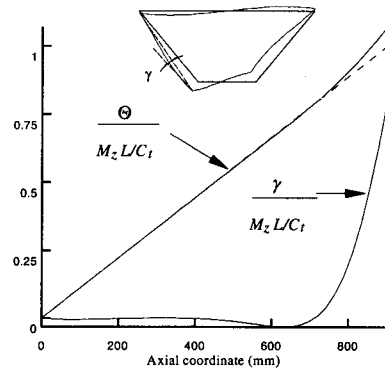


Fig. 9 The rotation (Θ) and distortion (γ) angles of a trapezoidal beam under a couple (Dotted: by the St. Venant torsion theory)

의 약 10배) 정도인데, 그림에서 끝단 거리를 잘 확인할 수 있다. 이 경우는 직사각 단면에서 수평방향으로 짝힘을 준 경우와 유사한 형태로 볼 수 있다. 즉 비틀림 회전각도가 고전 St. Venant 비틀림 이론의 결과보다 크게 나타나게 된다.

4. 결론

본 연구에서는 사각 단면을 갖는 박판보가 비틀림을 받는 경우 찌그러짐과 뒤틀림을 고려한 1차원 보이론으로부터 벡터 형태의 엄밀해를 유도하였다. 엄밀해를 바탕으로 보 내부에서 발생하는 끝단 효과를 규명하였다. 끝단 효과는 찌그러짐, 뒤틀림에 의해 발생하는데 보의 길이가 단면 치수에 비해 상당히 긴 영역(단면 치수에 비해 약 10배 지역)에서도 소멸되지 않는다는 사실을 보였다. 또한 같은 비틀림 모멘트 크기가 가해진다 하더라도 하중 경계 조건 형태에 따라 비틀림 회전각의 증감 현상이 다르게 나타날 수 있음을 밝혔다.

참고문헌

- (1) 김윤영, 김진홍, 강정훈, 임홍재, 1995, "박스 보 T형 조인트의 강성 평가에 관한 연구," 한국자동차공학회논문집, 제3권 제4호, pp. 68~77.
- (2) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1963, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill 2nd ed.
- (3) Vlasov, V. Z., 1961, *Thin Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Trans lations 2nd ed, Jerusalem.
- (4) 양용필, 신호철, 1996, "임의 형상의 단면을 갖는 박판보의 유한요소해석," 대한기계학회논문집, 제 20권, 제 1호, pp. 100~114.
- (5) 김윤영, 김진홍, 송상현, 1998, "비틀림을 받는 직사각 폐단면 박판보 유한요소 개발," 대한 기계학회논문집, 제22권, 제6호, pp. 947~954.
- (6) Kim, Y. Y. and Kim, J. H., 1999, "Thin-Walled Closed Box Beam Element for Static and Dynamic Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 473~490.
- (7) Kim, J. H. and Kim, Y. Y., 1999, "Analysis of Thin-Walled Closed Beams with General Quadrilateral Cross Sections," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, No. 4, pp. 904~912.
- (8) Boswell, L. F. and Zhang, S. H., 1983, "A Box Beam Finite Element for the Elastic Analysis of Thin-Walled Structures," *Thin-Walled Structures*, Vol. 1, pp. 353~383.
- (9) Boswell, L. F. and Zhang, S. H., 1985, "An Experimental Investigation of the Behavior of Thin-Walled Box Beams," *Thin-Walled Structures*, Vol. 3, pp. 35~65.
- (10) Mikkola, M. J. and Paavola, J., 1980, "Finite Element Analysis of Box Girders," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 106, (ST6), pp. 1343~1357.
- (11) Paavola, J., 1992, "A Finite Element Technique for Thin-Walled Girders," *Computers & Structures*, Vol. 44, (1/2), pp. 159~175.
- (12) Balch, C. D. and Steele, C. R., 1987, "Asymptotic Solutions for Warping and Distortion of Thin-Walled Box Beams," *ASME Journal of applied mechanics*, Vol. 54, pp. 165~173.
- (13) Gjelsvik, A., 1981, *The Theory of Thin Walled Bars*, John Wiley & Sons, New York.
- (14) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill 3rd ed., New York.
- (15) Steele, C. R. and Balch, C. D., 1988, *Shells of Revolution With Axisymmetric Loading*, Stanford University Lecture Notes.
- (16) Oden, J. T., 1967, *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill, New York.
- (17) SDRC, 1993, *I-DEAS FEM User's Guide*, Structural Dynamics Research Corporation, Milford.