Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 1, pp. 141-149, March 1999.

N-정책과 준비기간을 갖는 시동계층모형의 분석

윤승현[1] · 이호우[2] · 서원주[2]

[1]한국전자통신연구원 / [2]성균관대학교 시스템 경영공학부

A start-up class model in multiple-class queues with N-policy and general set-up time

Seung Hyun Yoon · Ho Woo Lee · Won Ju Seo

In this paper, we consider multiple-class queueing systems in which the server starts a set-up as soon as the number of customers in the "start-up class" reaches threshold N. After the set-up the server starts his service. We obtain the Laplace-Stieltjes transform and the mean of the waiting times of each class of customers for FCFS and non-preemptive priority disciplines.

1. 서 론

N-정책을 갖는 대기행렬시스템에서는 N명의 고객이 쌓여야만 유휴한 서버가 서비스를 시작한다. N-정책은 단위시간 동안의 시동횟수를 줄임으로써 전체 운용비용을 줄이는 효과를 가져온다. N-정책을 갖는 대기행렬시스템에 관한 분석은 참고문헌 [1]~[7], [9]~[12]를 참조하기 바란다. 그렇지만 서비스하고자 하는 고객들이 다계층이고 계층수가 많으면(실제로 계층의 수가 수백개에 이르는 생산시스템을 찾아볼 수 있다) N-정책을 적용하기 위해서 수많은 계층의 고객들을 일일이 세는 것은 쉽지 않다.

따라서 다계층인 경우의 N-정책은 주로 계층에 관계없이 총고객의 수가 N명이 되면 서비스를 시작하는 모형에 대한 연구가 주를 이루었다. 이러한 문제점을 개선하기 위하여 Lee 등 [8]은 특정한 계층을 시동계층으로 잡고 시동계층의 고객수가 N명이 되면 서비스를 시작하는 모형을 연구하였고 어떤 계층을 시동계층으로 잡으면 운용비용이 최소화하는가를 밝혔다. 본 논문에서는 그들의 연구를 확장하여 시동계층의 고객수가 N명이 되면 일반분포를 따르는 준비기간을 갖는 모형을 분석한다.

r-계층의 고객을 갖는 시스템을 생각하자. 계층 - p($p=1,2,\cdots,r$)의 고객은 도착률 λ_p의 독립포아송과정으로 도착한다. 각 계층은 상이한 독립 서비스시간분포를 따른다. 고객들은 한 명의 서버에 의해 서비스 받는다. 우선순위가 없는 경우는 FCFS를 가정하고 우선순위가 있는 경우는 비축출형(non-preemption)을 가정한다. ($i<j$)에 대해 계층-i의 고객이 계층-j보다 우선권을 갖는다.

동일 계층내에서는 FCFS를 가정한다. 계층-s를 시동계층이라 하자. 여기서 s는 미리 지정된 수이다 ($s\in\{1,2,\cdots,r\}$). 유휴한 서버는 다른 계층 고객수에 관계없이 시동계층 고객수가 N이 되어야만 준비기간을 시작한다. 준비기간은 일반분포를 따른다. 준비기간이 끝나면 즉시 고객들을 서비스하기 시작한다.

본 논문의 기호는 Lee 등 [8]에서 사용된 다음과 같은 기호를 사용하기로 한다. 추가적으로 S를 준비시간을 나타내는 확률변수로 정의하자. S는 일반분포를 따른다. 임의의 고객은 계층-p를 따른다고 하자.

상위고객	계층-$\{1,2,\cdots,p-1\}$에 속하는 고객
등상위고객	계층-$\{1,2,\cdots,p\}$에 속하는 고객
등위고객	계층-p에 속하는 고객
하위고객	계층-$\{p+1,p+2,\cdots,r\}$에 속하는 고객

비시동계층고객 계층-$\{1,2,\cdots,s-1,s+1,\cdots,r\}$에 속하는 고객

s-HC 계층-$\{1,2,\cdots,s-1\}$에 속하는 고객

s-EHC 계층-$\{1,2,\cdots,s\}$에 속하는 고객

s-LC 계층-$\{s+1,s+2,\cdots,r\}$에 속하는 고객

$C_{i(s)}$ 휴기간 동안에 도착한 시동계층고객 중 i번째 고객

$w^*_{i(s)}(\theta)$ $C_{i(s)}$의 대기시간의 Laplace-Stieltjes변환(LST)

$W^*_{q(p)}(\theta)$ 계층-p에 속하는 임의고객의 대기시간에 대한 LST

λ_p 계층-p 고객의 도착률

$\lambda=\sum_{p=1}^{r}\lambda_p$ 총도착률

$\lambda_{-s}=\lambda-\lambda_s$ 비시동계층고객의 도착률

$\rho_p=\lambda_p b_p$ 서버가 계층-p 고객을 서비스하고 있을 확률

$\rho=\sum_{p=1}^{r}\rho_p$ 서버가 바쁠 확률

$\rho_{-s}=\rho-\rho_s$ 서버가 비시동계층고객을 서비스하고 있을 확률

$\rho_p^+=\sum_{k=1}^{p}\rho_k$ 서버가 등상위고객을 서비스하고 있을 확률

$\rho_p^-=\sum_{k=p+1}^{r}\rho_k$ 서버가 하위고객을 서비스하고 있을 확률

$\lambda_p^+=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k$ 등상위고객들의 도착률

$\lambda_p^-=\sum_{k=p+1}^{r}\lambda_k$ 하위고객들의 도착률

$\lambda_{p,-s}^+=\lambda_p^+-\lambda_s$ 등상위계층 중 시동계층을 제외한 고객들의 도착률 ($s\in\{1,2,\cdots,p\}$ 경우에만 적용)

$B_p^*(\theta)$ 임의의 계층-p 고객의 서비스시간의 LST

$B^*(\theta)=\sum_{k=1}^{r}\frac{\lambda_k}{\lambda}B_k^*(\theta)$ 즉, 모든 계층에서 임의로 선택된 고객의 서비스시간의 LST

$B_{-s}^*(\theta)=\sum_{\substack{p=1\\p\neq s}}^{r}\frac{\lambda_p}{\lambda_{-s}}B_p^*(\theta)$ 즉, 모든 비시동계층에서 임의로 선택된 고객의 서비스시간의 LST

$B_p^+(\theta)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{\lambda_p^+}B_k^*(\theta)$ 즉, 등상위계층에서 임의로 선택된 고객의 서비스시간의 LST

$B_p^-(\theta)=\sum_{k=p+1}^{r}\frac{\lambda_k}{\lambda_p^-}B_k^*(\theta)$ 즉, 하위계층에서 임의로 선택된 고객의 서비스시간의 LST

$B_{p,-s}^+(\theta)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p}\frac{\lambda_k}{\lambda_{p,-s}^+}B_k^*(\theta)$ 즉, 등상위계층에서 시동계층을 제외한 임의의 고객의 서비스시간의 LST ($s\in\{1,2,\ldots,p\}$인 경우에만 적용)

b_p 계층-p 고객의 평균서비스시간

$b=\sum_{k=1}^{r}\frac{\lambda_k}{\lambda}b_k$ 임의의 고객의 평균서비스시간

$b_p^{(2)}$ 계층-p 고객을 서비스하는 시간의 2차 모멘트

$b_p^+=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{\lambda_p^+}b_k$ 임의의 등상위고객의 평균서비스시간

$b_p^-=\sum_{k=p+1}^{r}\frac{\lambda_k}{\lambda_p^-}b_k$ 임의의 하위고객의 평균서비스시간

$\Theta_p^+(\theta)=B_p^+[\theta+\lambda_p^+-\lambda_p^+\Theta_p^+(\theta)]$ 등상위고객의 서비스로 시작하여 등상위고객들에 의해 생성되는 지체사이클 (delay cycle)

σ_p $\theta+\lambda_p^+-\lambda_p^+\Theta_p^+(\theta)$

2. FCFS 경우의 분석

2.1 임의의 시동계층고객의 대기시간 (FCFS)

임의의 한 고객을 생각할 때 그는 유휴기간, 준비시간 또는 바쁜 기간의 한 기간 중에 도착한다. 본 시스템에서 일량은 보존되므로 서버가 임의의 시점에 바쁠 확률은 $\rho=\lambda b$이다. 따라서 유휴기간의 평균길이는 N/λ_s이다. PASTA에 의하면 임의고객이 유휴기간에 도착할 확률 $(1-\rho)N/[N+\lambda_s E(S)]$, 준비기간에 도착할 확률은 $(1-\rho)\lambda_s E(S)/[N+\lambda_s E(S)]$이다. 따라서 임의고객의 대기시간의 라플라스-스텔체스변환(LST)은 일반적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W_q^*(\theta) = W_q^*(\theta|\ \text{idle})\frac{(1-\rho)N}{N+\lambda_s E(S)} + W_q^*(\theta|\ \text{set-up})\frac{(1-\rho)\lambda_s E(S)}{N+\lambda_s E(S)} + W_q^*(s|\ \text{busy})\rho \quad (2.1)$$

[8]의 식 (2.6)을 이용하면 유휴기간에 i번째로 도착하는 시동계층고객의 대기시간은 다음과 같은 LST를 갖는다.

$$w_{i(s)}^*(\theta) = \left(\frac{\lambda_s}{\theta+\lambda_s}\right)^{N-i} \cdot \left(\frac{\lambda_s \cdot B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^i \cdot \frac{1}{B_s^*(\theta)} \cdot S^*(\theta) \quad (2.2)$$

유휴기간에 도착하는 임의의 시동계층고객이 N명 중에서 i번째일 확률은 $1/N$이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} W_{q(s)}^*(\theta|\ idle) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_{i(s)}^*(\theta) \\ &= \frac{S^*(\theta)}{N} \cdot \frac{\theta+\lambda_s}{\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta B_s^*(\theta)} \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\theta+\lambda_s}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N\right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

위의 식은 준비기간이 없는 경우보다 준비기간만큼의 길이가 추가된 결과이다([8]의 식 (2.7) 참조).

준비기간에 도착하는 임의의 시동계층고객의 대기시간은 유휴기간 동안에 먼저 도착한 고객들의 서비스시간, 경과준비기간 동안에 도착한 고객들의 서비스시간 및 잔여준비기간의 합으로 나타난다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$W_{q(s)}^*(\theta|\ \text{set-up}) = \left(\frac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N \cdot \frac{S^*(\theta)-S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]}{[\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta]E(S)} \quad (2.4)$$

바쁜 기간에 도착하는 임의의 시동계층고객의 대기시간을 구해보자. 이 경우의 바쁜 기간이란 준비기간 종료시점에 존재하는 고객들의 서비스시간을 최초지체기간으로 갖는 지체 사이클임을 주목할 필요가 있다. 따라서

$$sW_{q(s)}^*(\theta|\ \text{busy}) = \frac{1-\left(\dfrac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N \cdot S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]}{\theta\dfrac{N+\lambda_s E(S)}{\lambda_s}\rho} \cdot \frac{\theta(1-\rho)}{\theta-\lambda+\lambda B^*(\theta)} \quad (2.5)$$

위의 식은 준비기간이 없는 경우보다 준비기간 동안에 도착하는 고객들의 서비스시간 ($S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]$) 만큼 길어진 결과를 보인다([8]의 식 (2.11) 참조).

식 (2.1)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} W_{q(s)}^*(\theta) = &\frac{(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)} \cdot \frac{S^*(\theta)(\theta+\lambda_s)}{\lambda-\lambda B^*(s)-\theta B_s^*(\theta)} \\ &\cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\theta+\lambda_s}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N\right] \\ &+ \frac{(1-\rho)\lambda_s}{N+\lambda_s E(S)} \cdot \left(\frac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N \\ &\cdot \frac{S^*(\theta)-S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]}{\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta} \\ &+ \left[1-\left(\frac{\lambda_s B_s^*(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B_{-s}^*(\theta)}\right)^N \cdot S^*(\lambda-\lambda B^*(\theta))\right] \cdot \frac{1}{\theta-\lambda+\lambda B^*(\theta)} \\ &\cdot \frac{\lambda_s(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

평균값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_{q(s)} = &\frac{[-1+\rho_{-s}-\rho_s+N(1+\rho)+2\lambda_s E(S)](1-\rho)N}{2\lambda_s[N+\lambda_s E(S)]} \\ &+ \frac{(1-\rho)[2NE(S)\rho+\lambda_s E(S^2)(1+\rho)]}{2[N+\lambda_s E(S)]} \\ &+ \frac{N[(1-\rho)(\rho_{-s}^2-\rho_s^2)+\lambda\lambda_s b^{(2)}]+\lambda_s^2\lambda E(S)b^{(2)}}{2\lambda_s(1-\rho)[N+\lambda_s E(S)]} \\ &+ \frac{(1-\rho)\rho^2(N^2+2N\lambda_s E(S)+\lambda_s^2 E(S^2))]}{2\lambda_s(1-\rho)[N+\lambda_s E(S)]} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2. 임의의 비시동계층고객의 대기시간 (FCFS)

준비기간이 없는 모형에서, 유휴기간에 도착하는 비시동계층고객의 대기시간의 LST를 [8]의 2.1.2절에서 구한 바 있다. 준비기간이 있는 경우에는, 유휴기간에 도착하는 임의의 비시동계층고객은 준비기간의 길이만큼 추가로 기다린다. 따라서 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
W^*_{q(-s)}(\theta \mid idle) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^*_{i(s)}(\theta) \\
&= \frac{\lambda_s S^*(\theta)}{N[\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta B^*_s(\theta)]} \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\theta}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s B^*_s(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B^*_{-s}(\theta)}\right)^N\right]
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

위의 식은 준비기간이 없는 경우보다 준비기간만큼의 길이가 추가된 결과이다([8]의 식 (2.19) 참조).

서비스가 FCFS로 진행되므로, 준비기간과 바쁜 기간에 도착하는 임의의 비시동계층 고객의 대기시간은 동일한 기간에 도착하는 시동계층고객의 대기시간과 동일한 분포를 따른다. 따라서 식 (2.4), (2.5), (2.8)을 식 (2.1)에 적용하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
W^*_{q(-s)}(\theta) &= \frac{(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)} \cdot \frac{\lambda_s S^*(\theta)}{\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta B^*_s(\theta)} \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\theta}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s B^*_s(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B^{*(\theta)}_{-s}}\right)^N\right] \\
&\quad + \frac{(1-\rho)\lambda_s}{N+\lambda_s E(S)} \cdot \left(\frac{\lambda_s B^*_s(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B^*_{-s}(\theta)}\right)^N \\
&\quad \cdot \frac{S^*(\theta)-S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]}{(\lambda-\lambda B^*(\theta)-\theta)} \\
&\quad + \left[1-\left(\frac{\lambda_s B^*_s(\theta)}{\lambda-\lambda_{-s}B^*_{-s}(\theta)}\right)^N\right. \\
&\quad \left. \cdot S^*[\lambda-\lambda B^*(\theta)]\right] \cdot \frac{1}{\theta-\lambda+\lambda B^*(\theta)} \\
&\quad \cdot \frac{\lambda_s(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)}
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

평균값은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
W_{q(-s)} &= \frac{[1+\rho_{-s}-\rho_s+N(1+\rho)+2\lambda_s E(S)](1-\rho)N}{2\lambda_s[N+\lambda_s E(S)]} \\
&\quad + \frac{(1-\rho)\{2NE(S)\rho+\lambda_s E(S^2)(1+\rho)]}{2[N+\lambda_s E(S)]} \\
&\quad + \frac{N[(1-\rho)(\rho^2_{-s}-\rho^2_s)+\lambda\lambda_s b^{(2)}]+\lambda_s^2\lambda E(S)b^{(2)}}{2\lambda_s(1-\rho)[N+\lambda_s E(S)]} \\
&\quad + \frac{(1-\rho)\rho^2(N^2+2N\lambda_s E(S)+\lambda_s^2 E(S^2))}{2\lambda_s(1-\rho)[N+\lambda_s E(S)]}
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

3. 비축출 우선순위 서비스인 경우

본 절에서는 비축출형 우선순위(non-preemptive priority)를 생각한다. 여전히 일량은 보존되므로 서버가 바쁠 확률은 ρ이고 식 (2.1)은 유효하다.

3.1. 임의의 시동계층고객의 대기시간

유휴기간에 도착하는 시동계층고객들 중에서 i번째로 도착하는 시동계층고객의 대기시간은 잔여유휴기간, 그보다 먼저 도착한 s-EHC급 고객들과 그들의 s-HC급 자손들의 서비스시간, 그리고 준비기간 동안 도착하는 s-HC급 고객들과 그들의 s-HC급 자손을 서비스하는 시간의 합이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
w^*_{i(s)}(\theta) &= \left(\frac{\lambda_s \cdot B^*_s(\sigma_{s-1})}{\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)}\right)^i \\
&\quad \cdot \left(\frac{\lambda_s}{\theta+\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)}\right)^{N-i} \\
&\quad \cdot \frac{S^*[\theta+\lambda^+_{s-1}-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)]}{B^*_s(\sigma_{s-1})}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

따라서,

$$
\begin{aligned}
&W^*_{q(s)}(\theta \mid idle) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^*_{i(s)}(\theta) \\
&= \frac{1}{N} \cdot \frac{[\theta+\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)] \cdot S^*[\theta+\lambda^+_{s-1}-\lambda^+_{s-1}\theta^+_{s-1}(\theta)]}{\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)-B^*_s(\sigma_{s-1})[\theta+\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)]} \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\lambda_s}{\theta+\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)}\right)^N \cdot \left(\frac{\lambda_s B^*_s(\sigma_{s-1})}{\lambda^+_s-\lambda^+_{s-1}\Theta^+_{s-1}(\theta)}\right)^N\right]
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

준비기간 동안에 도착하는 임의의 시동계층고객의 대기시간은 유휴기간과 경과준비기간 동안에 이미 도착한 s-EHC급 고객들과 잔여준비기간에 도착하는 s-HC급 고객들 및 그들의 s-HC급 자손들의 서비스시간, 그리고 잔여준비기간의 총합이다.

따라서,

$$W^{*}_{q(s)}(\theta|\text{set-up})=\frac{\mathrm{S}^{*}[\theta+\lambda^{+}_{s-1}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]-\mathrm{S}^{*}[\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s}\mathrm{B}^{+}_{s}(\sigma_{s-1})]}{[\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s}\mathrm{B}^{+}_{s}(\sigma_{s-1})-\theta-\lambda^{+}_{s-1}+\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]\mathrm{E(S)}}\cdot\left(\frac{\lambda_{s}\mathrm{B}^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\mathrm{B}^{+}_{s-1}(\sigma_{s-1})}\right)^{N} \tag{3.3}$$

[8]의 2.2.1절에서와 마찬가지 방법을 적용하면 바쁜 기간 동안에 도착하는 임의의 시동계층고객의 대기시간에 대한 LST는 다음과 같다.

$$\rho W^{*}_{q(s)}(\theta|\text{ busy})=\frac{(1-\rho^{+}_{s})\left[1-\left(\frac{\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}B^{+}_{s-1}(\sigma_{s-1})}\right)^{N}\cdot S^{*}[\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s}B^{+}_{s}(\sigma_{s-1})]\right]}{\frac{N+\lambda_{s}E(S)}{\lambda_{s}}\rho^{+}_{s}[\theta-\lambda_{s}+\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})]}\cdot\frac{\rho^{+}_{s}(1-\rho)}{1-\rho^{+}_{s}} \tag{3.4}$$

$$+\frac{(1-\rho^{+}_{s})[1-B^{-}_{s}(\sigma_{s-1})]}{b^{-}_{s}[\theta-\lambda_{s}+\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})]}\cdot\frac{\rho^{-}_{s}}{1-\rho^{+}_{s}}$$

따라서 식 (3.1), (3.2), (3.4)를 식 (2.1)에 적용하면 다음을 얻는다

$$W^{*}_{q(s)}(\theta)=\frac{[\theta+\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]\cdot S^{*}[\theta+\lambda^{+}_{s-1}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)-B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})[\theta+\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]}$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{\theta+\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)}\right)^{N}-\left(\frac{\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)}\right)^{N}\right]\cdot\frac{(1-\rho)}{N+\lambda_{s}E(S)}$$

$$+\frac{S^{*}[\theta+\lambda^{+}_{s-1}-\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)]-S^{*}[\lambda^{+}_{s}-\lambda^{-}_{s}B^{+}_{s}(\sigma_{s-1})]}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s}B^{+}_{s}(\sigma_{s-1})-\theta-\lambda^{+}_{s-1}+\lambda^{+}_{s-1}\Theta^{+}_{s-1}(\theta)}\cdot\left(\frac{\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}B^{+}_{s-1}(\sigma_{s-1})}\right)^{N}\cdot\frac{(1-\rho)\lambda_{s}}{N+\lambda_{s}E(S)}$$

$$+\frac{\left[1-\left(\frac{\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}{\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s-1}B^{+}_{s-1}(\sigma_{s-1})}\right)^{N}\cdot S^{*}[\lambda^{+}_{s}-\lambda^{+}_{s}B^{+}_{s}(\sigma_{s-1})]\right]}{\theta-\lambda_{s}+\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})}\cdot\frac{\lambda_{s}(1-\rho)}{N+\lambda_{s}E(S)} \tag{3.5}$$

$$+\frac{\lambda^{-}_{s}[1-B^{-}_{s}(\sigma_{s-1})]}{[\theta-\lambda_{s}+\lambda_{s}B^{*}_{s}(\sigma_{s-1})]}$$

$$W_{q(s)}=\frac{(1-\rho)N}{N+\lambda_{s}E(S)}\frac{[-1+\rho^{+}_{s-1}-\rho_{s}+N(1+\rho^{+}_{s})+2\lambda_{s}E(S)]}{2(1-\rho^{+}_{s-1})\lambda_{s}} \tag{3.6}$$

$$-\frac{(1-\rho)\lambda_{s}E(S)}{N+\lambda_{s}E(S)}\cdot\left(\frac{(1+\rho^{+}_{s})E(S^{2})}{2(\rho^{+}_{s-1}-1)E(S)}+\frac{\rho^{+}_{s}N}{(\rho^{+}_{s-1}-1)\lambda_{s}}\right)$$

$$-\frac{(1-\rho)}{N+\lambda_{s}E(S)}\cdot\frac{C_{4}}{2\lambda_{s}(\rho^{+}_{s}-1)^{2}(\rho^{+}_{s-1}-1)}$$

$$-\frac{\lambda^{-}_{s}[b^{-}_{s}\lambda^{+}_{s}b^{+(2)}_{s}+b^{-(2)}_{s}(1-\rho^{+}_{s})]}{2(\rho^{+}_{s-1}-1)(\rho^{+}_{s}-1)^{2}}$$

위에서

$$C_4 = N(\ {\rho_{s-1}^{+}}^2 - \ {\rho_{s-1}^{+}}^3 + \lambda_s \lambda_{s-1}^{+}\ {b_{s-1}^{+}}^{(2)} - \rho_s\ {\rho_{s-1}^{+}}^2 \rho_s^2 + \lambda_s^2 b_s^{(2)} + \rho_s^2 \rho_{s-1}^{+} + \rho_s^3)$$

$$+ \lambda_s^2 \lambda_s^+\ {b_s^+}^{(2)} E(S)$$

$$+ [N^2 + 2\lambda_s NE(S) + \lambda_s^2 E(S^2)](\ {\rho_{s-1}^{+}}^2 - \ {\rho_{s-1}^{+}}^3 + 2\rho_s \rho_{s-1}^{+} 3\rho_s\ {\rho_{s-1}^{+}}^2 + \rho_s^2 - 3\ \rho_{s-1}^{+} \rho_s^2 - \rho^3)$$

3.2. 임의의 s-HC급 고객의 대기시간

유휴기간에 도착하는 계층-p인 s-HC급 고객의 대기시간은 [8]의 식 (2.42)를 유도하기 위한 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$W_{q(p)}^*(\theta |\ \text{idle}) = \frac{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N}{[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1}) - \theta - \lambda_{p-1}^+ + \lambda_{p-1}^+ B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})] N \cdot \frac{1}{\lambda_s}} \tag{3.7}$$

$$\cdot S^*[\theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^+(\theta)] \quad (p = 1, 2, \dots, s-1)$$

준비기간에 도착하는 계층-p인 s-HC급 고객의 대기시간은 식 (3.3)을 유도한 방법을 사용하면 다음과 같다.

$$W_{q(p)}^*(\theta |\ \text{set-up}) = \frac{S^*[\theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^+(\theta)] - S^*[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})]}{[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1}) - \theta - \lambda_{p-1}^+ + \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^+(\theta)] E(S)} \cdot \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N \tag{3.8}$$

[8]의 2.2.2절을 응용하면 바쁜 기간에 도착하는 임의의 계층-p의 s-HC급 고객의 대기시간은 다음과 같다.

$$\rho W_{q(p)}^*(\theta |\ \text{busy}) = \frac{(1-\rho_p^+)\left[1 - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N S^*[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})]\right]}{\frac{N + \lambda_s E(S)}{\lambda_s} \rho_p^+ [\theta - \lambda_p + \lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]} \cdot \frac{\rho_p^+(1-\rho)}{1-\rho_p^+} \tag{3.9}$$

$$+ \frac{(1-\rho_p^+)[1 - B_p^-(\sigma_{p-1})]}{b_p^-[\theta - \lambda_p + \lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]} \cdot \frac{\rho_p^-}{1-\rho_p^+}$$

따라서 식 (3.7), (3.8), (3.9)를 식 (2.1)에 적용하면 다음을 얻는다.

$$W_{q(p)}^*(\theta) = \frac{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N}{[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1}) - \theta - \lambda_{p-1}^+ + \lambda_{p-1}^+ B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})]}$$

$$\cdot S^*[\theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^+(\theta)] \frac{(1-\rho)\lambda_s}{N + \lambda_s E(S)} + \frac{S^*[\theta + \lambda_{p-1}^+ - \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^+(\theta)] - S^*[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1})]}{[\lambda_p^+ - \lambda_p^+ B_p^+(\sigma_{p-1}) - \theta - \lambda_{p-1}^+ + \lambda_{p-1}^+ \Theta_{p-1}^-(\theta)]}$$

$$+\frac{S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)]-S^*[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})]}{[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1}^++\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)]}$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N\frac{(1-\rho)\lambda_s}{N+\lambda_sE(S)}$$

$$+\frac{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N-\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})}\right)^N}{[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1}^++\lambda_{p-1}^+B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})]N\cdot\frac{1}{\lambda_s}} \tag{3.10}$$

$$\cdot S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)],\quad (p=1,2,\dots,s-1)$$

평균값은 다음과 같다.

$$W_{q(p)}=-\frac{(1-\rho)N}{N+\lambda_sE(S)}\cdot\frac{(N+1)(1+\rho_p^+)+2\lambda_sE(S)}{2(\rho_{p-1}^+-1)\lambda_s}$$

$$-\frac{(1-\rho)\lambda_sE(S)}{N+\lambda_sE(S)})\cdot\left(\frac{(1+\rho_p^+E(S^2)}{2(\rho_{p-1}^+-1)E(S)}+\frac{\rho_p^+N}{(\rho_{p-1}^+-1)\lambda_s}\right) \tag{3.11}$$

$$+\frac{(1-\rho)}{N+\lambda_sE(S)}\cdot\frac{C_F}{2\lambda_s(\rho_p^+-1)^2(\rho_{p-1}^+-1)}-\frac{\lambda_p^-[b_p^-\lambda_p^+\ b_p^{+(2)}+\ b_p^{-(2)}(1-\rho_p^+)]}{2(\rho_{p-1}^+-1)(\rho_p^+-1)^2}$$

위에서

$$C_F=\ N(-\ \rho_p^{+2}+\ \rho_p^{+2}\rho_p-\lambda_s\lambda_p^+\ b_p^{+(2)}-\lambda_s\lambda_{p-1}^+\rho_p^+\ b_{p-1}^{+\ (2)}-\lambda_s\lambda_p\rho_p^+b_p^{(2)}-\lambda_s\lambda_p^+\rho_p\ b_p^{+(2)}$$

$$+\ \rho_p^{+2}\rho_{p-1}^++\lambda_s\lambda_p^+\rho_{p-1}^+\ b_p^{+(2)})+\lambda_s^2\lambda_p^+\ b_p^{+(2)}E(S)$$

$$+[N^2+2\lambda_sNE(S)+\lambda_s^2E(S^2)](-\ \rho_p^{+2}+\rho_p\ \rho_p^{+2}+\ \rho_p^{+2}\rho_{p-1}^+)$$

3.3. 임의의 s-LC급 고객의 대기시간

[8]의 2.2.3절을 응용하면 임의의 s-LC급 고객의 대기
시간은 다음과 같다.

$$W_{q(p)}^*(\theta|\ \text{idle})=\frac{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\theta+\lambda_{p-1,-s}^+-\lambda_{p-1,-s}^+B_{p-1,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N-\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\lambda_{p,-s}^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N}{[\lambda_{p,-s}^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1,-s}^++\lambda_{p-1,-s}^+B_{p-1,-s}^+(\sigma_{p-1})]N\cdot\frac{1}{\lambda_s}} \tag{3.12}$$

$$\cdot[B_s^*(\sigma_{p-1})]^N\cdot S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})]$$

$$W_{q(p)}^*(\theta|\ \text{set - up})=\left(\frac{\lambda_sB_s^*(\sigma_{p-1})}{\lambda_p^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N \tag{3.13}$$

$$\cdot \frac{S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)]-S^*[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})]}{[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1}^++\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)]E(S)}$$

$$\rho W_{q(p)}^*(\theta|\text{ busy})=\frac{(1-\rho_p^+)\left[1-\left(\frac{\lambda_s B_s^*(\sigma_{p-1})}{\lambda_p^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N S^*[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})]\right]}{\frac{N+\lambda_s E(S)}{\lambda_s}\rho_p^+[\theta-\lambda_p+\lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]}\cdot\frac{\rho_p^+(1-\rho)}{1-\rho_p^+} \tag{3.14}$$

$$+\frac{(1-\rho_p^+)[1-B_p^-(\sigma_{p-1})]}{b_p^-[\theta-\lambda_p+\lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]}\cdot\frac{\rho_p^-}{1-\rho_p^+}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$W_{q(p)}^*(\theta)=\frac{\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\theta+\lambda_{p-1,-s}^+-\lambda_{p-1,-s}^+B_{p-1,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N-\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_s+\lambda_{p,-s}^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N}{[\lambda_{p,-s}^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1,-s}^++\lambda_{p-1,-s}^+B_{p-1,-s}^+(\sigma_{p-1})]}$$

$$\cdot[B_s^*(\sigma_{p-1})]^N\cdot S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+B_{p-1}^+(\sigma_{p-1})]\frac{(1-\rho)\lambda_s}{N+\lambda_s E(S)}$$

$$+\frac{S^*[\theta+\lambda_{p-1}^+-\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(\theta)]-S^*[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})]}{[\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})-\theta-\lambda_{p-1}^++\lambda_{p-1}^+\Theta_{p-1}^+(s)]}\cdot\left(\frac{\lambda_s B_s^*(\sigma_{p-1})}{\lambda_p^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N\cdot\frac{(1-\rho)\lambda_s}{N+\lambda_s E(S)}$$

$$+\frac{\left[1-\left(\frac{\lambda_s B_s^*(\sigma_{p-1})}{\lambda_p^+-\lambda_{p,-s}^+B_{p,-s}^+(\sigma_{p-1})}\right)^N S^*(\lambda_p^+-\lambda_p^+B_p^+(\sigma_{p-1})\right]}{[s-\lambda_p+\lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]}\cdot\frac{\lambda_s(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)} \tag{3.15}$$

$$+\frac{\lambda_p^-[1-B_p^-(\sigma_{p-1})]}{[s-\lambda_p+\lambda_p B_p^*(\sigma_{p-1})]}\quad(p=s+1,s+2,\cdots,r)$$

평균값은 다음과 같다.

$$W_{q(p)}=-\frac{(1-\rho)N}{N+\lambda_s E(S)}\frac{1+\rho_{p,-1}^+-\rho_s+N(1+\rho_p^+)+2\lambda_s E(S)}{2\lambda_s(\rho_{p-1}^+-1)} \tag{3.16}$$

$$-\frac{(1-\rho)\lambda_s E(S)}{N+\lambda_s E(S)}\left(\frac{(1+\rho_p^+)E(S^2)}{2(\rho_{p-1}^+-1)E(S)}+\frac{\rho_p^+N}{(\rho_{p-1}^+-1)\lambda_s}\right)$$

$$-\frac{(1-\rho)}{N+\lambda_s E(S)}\frac{C_5}{2\lambda_s(\rho_p^+-1)^2(\rho_{p-1}^+-1)}-\frac{\lambda_p^-[b_p^-\lambda_p^+b_p^{+(2)}+b_p^{-(2)}(1-\rho_p^+)]}{2(\rho_{p-1}^+-1)(\rho_p^+-1)^2}$$

위에서

$$C_5=N(\rho_{p,-s}^{+\ 2}-\rho_{p,-s}^{+\ 3}+\lambda\lambda_{p,-s}^+b_{p,-s}^{+\ (2)}-\rho_s\rho_{p,-s}^{+\ 2}-\rho_s^2+\lambda_s^2b_s^{(2)}+\rho_{p,-s}^+\rho_s^2+\rho_s^3)$$

$$+\lambda_s^2\lambda_p^+b_p^{+(2)}E(S)+[N^2+2\lambda_s NE(S)+\lambda_s^2E(S^2)]$$

$$\cdot(\rho_{p,-s}^{+\ 2}-\rho_{p,-s}^{+\ 3}+2\rho_s\rho_{p,-s}^+3\rho_s\rho_{p,-s}^{+\ 2}+\rho_s^2-3\rho_s^2\rho_{p,-s}^+-\rho_s^3)$$

4. 결 론

본 논문에서는 시동계층을 갖는 N-정책 시스템에서 준비기간을 고려한 모형을 분석하였다. FCFS와 비축출형 우선순위 시스템에 대해 각 계층 고객들의 대기시간에 대한 LST와 평균을 유도하였다. 시동계층모형은 생산품의 개수가 아주 많은 경우에 시스템제어를 하기 위한 방법 중의 하나로 제안되었다. 본 논문의 결과들은 이러한 제어정책을 갖는 시스템에서의 성능분석을 위하여 사용될 수 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

1. Kella, O., "The threshold policy in the $M/G/1$ queue with server vacations," *Naval Research Logistics*, Vol. 36, pp. 111-123, 1989
2. Lee, H. S., "Steady state probabilities for the server vacation model with group arrivals and under control-operating policy (in Korean)," *Journal of the Korean OR/MS Society*, Vol. 16, No. 2, pp. 36-48, 1991.
3. Lee, H. S. and Srinivasan, M. M. "Control policies for $M^X/G/1$ queueing system," *Management Science*, Vol. 35, No. 6, pp. 708-721, 1989.
4. Lee, H. W. and Lee, S. S., "Operating characteristics of $M^X/G/1$ queue with N-policy," *QUESTA*, Vol. 15, 1994.
5. Lee, H. W., Lee, S. S., Park, J. O. and Chae, K. C., "Analysis of the $M^X/G/1$ queue with N-policy and Multiple vacations," *J. Appl. Prob.*, Vol. 31, pp. 476-496, 1994.
6. Lee, H. W. and Park, J. O., "Optimal strategy in N-policy system with early setup," *J. Oper. Res. Soc.*, Vol. 47, pp. 1-8, 1996.
7. Lee, S. S., Lee, H. W., Yoon, S. H. and Chae, K. C., "Batch arrival queue with N-policy and single vacation," *Computers & Oper. Res.*, Vol. 22, No. 2, pp. 173-189, 1995.
8. Lee, H. W., Yoon, S. H., and Seo, W. J., "Start-up class models in multiple-class queues with N-policy," *Forthcoming in QUESTA*, 1999.
9. Shanthikumar, J. G., "Optimal control of an $M/G/1$ priority queue via N-control," *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, Vol. 1, No. 3, pp. 192-212, 1981.
10. Sobel, M. J., "Optimal average-cost policy for a queue with start-up and shut-down costs," *Operations Research*, Vol. 17, pp. 145-162, 1969.
11. Akagi, H., *Queueing Analysis: Vol. 1*, North-Holland Amsterdam, 1991.
12. Adin, M. and Naor, P., "Queueing systems with a removable service station," *O. R. Qrtly*, Vol. 14, pp. 393-405, 1963.

1998년 12월 접수, 1998년 12월 채택