Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 1, pp. 125-129, March 1999.

Little's 법칙의 미시적 활용 사례

윤봉규[1] · 김남기[2] · 채경철[3]

[1]한국과학기술원 산업공학과 / [2]한국과학기술원 산업공학과

A MIrcroscopic Application of the Little's Formula

Bong K. Yoon · Nam K. Kim · Kyung C. Chae

The Little's formula, $L=\lambda W$, expresses a fundamental principle of queueing theory: Under very general conditions, the average queue length is equal to the product of the arrival rate and the average waiting time. This useful formula is now well known and frequently applied. In this paper, we demonstrate that the Little's formula has much more power than was previously realized when it is properly decomposed into what we call the microscopic Little's formula. We use the M/G/1 queue with server vacations as an example model to which we apply the microscopic Little's formula. As a result, we obtain a transform-free expression for the queue length distribution. Also, we briefly summarize some previous efforts in the literature to increase the power of the Little's formula.

1. 서 론

본 연구의 목적은 Little's 법칙(이후 LL로 표기함)을 미시적으로 활용하는 사례를 소개하는 것이다. 구체적으로, 복수휴가형 M/G/1 대기행렬을 예로 들어서, 이에 미시적 LL을 적용함으로써 안정상태(steady-state) 고객수분포를 명시적(explicit)으로 구할 수 있음을 보인다. 먼저 LL에 관한 기존연구를 간략히 요약한 다음 (이와 관련시켜서) 본 연구에서 활용하는 미시적 LL을 설명한다.

LL은 대기행렬이론에서 가장 잘 알려진 공식이라 해도 과언이 아니다. 대기행렬시스템에 대한 성능척도는 여러 가지가 있으나, 대표적으로 안정상태고객수 N 과 임의고객의 시스템 체류시간 T 를 꼽을 수 있겠는데, 이들의 기대치 간의 관계가 바로 LL이다. 즉, $L=\lambda W$ 에서 L 과 W 는 각각 $E[N]$ 과 $E[T]$ 이고 λ 는 고객도착률을 나타낸다.

이렇게 간편하고 유용한 LL의 활용도를 더욱 높이려는 노력은 꾸준했는데 (LL에 관한 1990년 이전의 연구는 Whitt[8]에 잘 요약되어 있음), 특히 LL를 $H=\lambda G$ 형태로 일반화하는 연구가 주종을 이룬다. $H=\lambda G$ 관계에 대해서는 이미 교과서 수준(Wolff[10])에까지 잘 설명이 되어 있으며, 그 요지는 다음과 같다. n번째 고객과 t 시점에 관한 함수를 $f_n(t)$ 라 할 때, $f_n(t)$ 의 시간평균(time-average)을 먼저 구하고 나서 다시 이의 고객평균(customer-average)을 구한 결과가 순서를 바꾸어 고객평균을 먼저 구한 다음 시간평균을 구한 결과와 동일하다는 점이다. 예를 들어, $f_n(t)$ 를 n 번째 고객이 t 시점에 시스템내에 체류 중일 확률이라고 정의하면, $H=\lambda G$ 로부터 $L=\lambda W$ 를 얻게 된다. 또한, $f_n(t)dt$ 를 n번째 고객이 t와 $t+dt$ 사이에서 시스템에 도착하면서 시스템이 소정의 상태에 있는 것을 볼 확률이라고 정의하면, M/G/1 대기행렬의 경우 우리는 $H=\lambda G$ 로부터 PASTA[9] 속성을 얻는다. 즉, 포아송 과정(Poisson process)으로 도착하는 고객이 보는 시스템의 상태가 임의시점 상태와 (확률적으로) 동일함을 보일 수 있다.

LL의 활용도를 높이는 또 다른 방법으로 시스템의 분해(decomposition)방법을 들 수 있다. 이미 잘 알려진 것은 $L=\lambda W$ 를 $L_q=\lambda W_q$ 와 $L_s=\lambda W_s$ 로 분해하는 것인데, L_q와 L_s는 각각 대기중인 평균고객수와 서비스 받고 있는 평균고객수를 나타내며, W_q와 W_s는 각각 임의고객의 평균

대기시간(서비스시간 제외)과 평균서비스시간을 나타낸다 (서비스시간을 S라 하면 $W_s = E[S]$ 임). 먼저, 고객종류별로 분해하는 방법을 두 가지 소개한다. 우선순위(priority class)별로 분해하는 방법이 그 첫째인데, 이 경우에는 L과 W뿐만 아니라 λ까지도 우선순위별로 달라진다(이호우[2] 참조). 둘째로, 피드백(feedback)시스템에서 고객이 몇 번째로 피드백 중인가에 따라 분해하는 방법[3]이 있는데, 비교적 생소한 방법이라 사료되어 부록A에서 상술한다. 또한, 우선순위와 피드백 횟수를 모두 고려하여 분해하는 방법은 Simon[7]에서 찾을 수 있다.

다음으로, LL를 대기장소별로 분해하는 방법이 있다. 잘 알려져 있는 방법으로는 대기행렬 네트워크를 부분집합으로 분해하는 방법이 있다[2]. 반면에, 다음과 같이 비교적 생소한 분해방법이 있다. 단독 서버(single server) 선입선출(FIFO) 시스템에서 Q_1을 서비스 받고 있는 고객의 자리 Q_2를 다음 차례로 서비스 받을 고객의 자리, …라 할 때 $L_n = \lambda W_n$, $n=1, 2, 3, \cdots$이 성립하는데, 여기에서 L_n은 Q_n에 머무르고 있는 평균고객수이고 W_n은 임의고객이 Q_n에 체류하는 평균시간이다. 이와 같이, 고객 한 명분 대기장소별로 분해한 LL를 본 논문에서는 미시적 LL라 일컫는다. 미시적 LL에 관한 문헌은 찾기 어려운데, 다만 Wolff[10]가 (연습문제 8-24에서) 미시적 LL를 GI/M/1 모형에 적용하여 도착시점 고객수분포와 임의시점 고객수분포의 관계를 구한 사례를 찾을 수 있을 뿐이다.

비고 1 : LL의 분해방법과 관련해서 거론된 문헌[3, 7, 10]의 공통점은 분해된 LL를 증명(또는 유도)하지도 않고 또한 이에 대한 다른 문헌을 제공하지도 않는다는 점이다. 즉, 분해된 LL를 당연히 성립하는 것으로 간주하고 있는데 이는 분해된 LL의 원리가 원래의 (거시적) LL의 원리와 동일함이 자명하기 때문인 것으로 사료됨 (E-mail 교신 결과, Wolff씨[10] 역시 이 점에 동감하고 있음. 아울러, 거시적 LL의 원리는 Ross[6]가 잘 설명하고 있음).

휴가(vacation)형 대기행렬같이 유휴기간(idle period) 중에서도 대기중인 고객이 있을 수 있는 모형에서는 미시적 LL을 다시 유휴기간용과 바쁜 기간(busy period)용으로 분해가 가능하다. 이들을(대표적인 휴가형모형이라 할 수 있는) 복수(multiple)휴가형 M/G/1 모형에 적용하여 N의 확률분포를 명시적으로 나타낼 수 있음을 보인다. 아울러, 기타의 휴가형 M/G/1 모형에 대한 차이점을 간략히 언급한다.

2. 복수휴가형 M/G/1과 미시적 Little's 법칙

복수휴가형 M/G/1 시스템은 다음과 같이 진행된다. 단독 서버는 서비스할 고객이 없으면 길이 V_1의 휴가를 떠난다. 돌아와서 고객이 없으면 길이 V_2의 휴가를 떠난다. 이와 같이 반복하여 휴가에서 돌아왔을 때 한 명 이상의 고객이 있으면 즉시 바쁜 기간이 시작된다. 편의상 V_1, V_2, …를 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는(iid) 확률변수로 가정한다. V는 포아송 도착과정과 독립이고 또한 (역시 iid 확률변수인) 고객별 서비스시간 S_1, S_2, …와도 독립이다. 바쁜 기간이 시작되면 단독서버는 고객을 도착순(FIFO)으로 쉬지 않고 서비스한다. 물론 안정상태조건(stability condition) $\rho = \lambda E[S] < 1$을 가정한다.

서론에서 언급했던 Q_n, ($n=1, 2, \cdots$)에 대한 정의를 휴가형에 맞게 일반화한다. Q_1은 바쁜 기간 중에는 서비스 받고 있는 고객의 자리이고, 유휴기간 중에는 경과된 유휴기간 중 처음으로 도착한 고객이 대기하고 있는 자리이다. 이와 유사하게, Q_2는 바쁜 기간 중에는 다음차례로 서비스 받을 고객의 자리이고, 유휴기간 중에는 경과된 유휴기간 중 두 번째로 도착한 고객이 대기하고 있는 자리이다. 일반적으로, Q_n은 시스템내에 체류하고 있는 고객 중에서 n번째로 도착한 고객의 자리이다.

서론에서와 같이 L_n을 Q_n에 체류중인 평균고객수라 하면, Q_n에 체류중인 고객수는 0 또는 1이므로 다음과 같은 관계가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} L_n &= P\{Q_n\text{에 한 명 체류중}\} \\ &= P\{N \geq n\} \end{aligned}$$

표기의 편의상 다음과 같이 결합(joint)확률을 정의한다.

$$f_j = P\{N=j, \text{서버가 유휴중}\}, \quad j \geq 0$$
$$g_j = P\{N=j, \text{서버가바쁨}\}, \quad j \geq 1$$

이제, L_n을 다음과 같이 L_n^I와 L_n^B로 분해한다.

$$L_n^I = \sum_{j=n}^{\infty} f_j, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

$$L_n^B = \sum_{j=n}^{\infty} g_j, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

다음으로, W_n 의 정의는 (서론에서와 같이) 임의고객이 Q_n에 체류하는 평균시간인데, 이를 $W_n{}^I$와 $W_n{}^B$로 분해해서 다음과 같이 정의한다.

$$W_n{}^I = E[\text{임의고객이 유휴기간 중에 } Q_n\text{에 체류하는 시간}]$$
$$W_n{}^B = E[\text{임의고객이 바쁜 기간 중에 } Q_n\text{에 체류하는 시간}]$$

그리고, V_R 을 유휴기간에 진행중인 휴가의 잔여(remaining 또는 residual)시간이라 하고, S_R 을 바쁜기간에 진행중인 서비스의 잔여시간이라 하자. 표기의 편의상 다음과 같이 조건부(conditional) 기대치를 정의한다.

$$\nu_j = E[V_R | N=j, \text{ 서어버가 유휴중}], \quad j \geq 0$$
$$\sigma_j = E[S_R | N=j, \text{ 서어버가 바쁨}], \quad j \geq 1$$

이제, $W_n{}^I$ 의 정의에 의해서 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$W_n{}^I = f_{n-1}\nu_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{3}$$

(3)식의 해석은 다음과 같다. PASTA[9] 속성에 의해서, 임의고객이 유휴기간에 도착하고, 또한 도착시 $n-1$명을 볼 확률은 f_{n-1}이고, 이 경우 임의고객은 진행중인 휴가가 종료될 때까지 Q_n에 체류한다.

반면에, 임의고객이 바쁜 기간에 도착하거나 또는 유휴기간에 도착하더라도 도착시 $n-1$명을 보지 않으면 이 고객은 유휴기간 중에 Q_n에 체류할 수 없다.

$W_n{}^B$ 역시 임의고객 도착시점의 상황에 조건을 걸어서 다음 식을 얻는다(편의상, g_0와 σ_0를 0으로 간주함).

$$W_n{}^B = g_{n-1}\sigma_{n-1} + \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} g_j + \sum_{j=n-1}^{\infty} f_j \right\} E[S], \quad n \geq 1 \tag{4}$$

(4)식의 해석은 다음과 같다. 임의고객이 바쁜 기간에 도착하고 또한 도착시 $n-1$명을 보면(확률 g_{n-1}), 이 고객은 진행중인 서비스가 종료될 때까지 Q_n에 체류한다. 바쁜 기간에 도착하되 도착시 n명 이상을 보면(확률 $\sum_{j=n}^{\infty} g_j$), 이 고객은 일단 Q_n보다 뒤쪽에 자리를 잡았다가 서비스가 종료될 때마다 한 자리씩 앞자리로 옮겨서 언젠가는 Q_n에서 S동안 체류하게 된다. 임의고객이 유휴기간 중에 도착하고 또한 도착시 $n-1$명 이상을 보면(확률 $\sum_{j=n-1}^{\infty} f_j$), 도착시 차지한 자리에 유휴기간이 종료될 때까지 있다가 바쁜 기간이 시작되고나서 당장(도착시 $n-1$명을 본 경우) 또는 나중에(도착시 n명 이상을 본 경우) Q_n에서 S동안 체류하게 된다.

반면에, 임의고객이 도착시 $n-2$명 이하를 보면(유휴기간이든 바쁜 기간이든 불문하고), 이 고객은 Q_n에 체류할 수 없다.

이제, 미시적 LL인 $L_n^I = \lambda W_n{}^I$와 $L_n^B = \lambda W_n{}^B$를 사용해서 f_n과 g_n을 구한다. 먼저, (1)식과 (3)식으로부터 다음과 같이 f_n을 구한다(n=1, 2, 3, …).

$$\begin{aligned} f_n &= L_n^I - L_{n+1}^I \\ &= \lambda W_n{}^I - \lambda W_{n+1}{}^I \\ &= \lambda(f_{n-1}\nu_{n-1} - f_n\nu_n) \end{aligned}$$

$$f_n = f_{n-1} \cdot \lambda\nu_{n-1} / (1+\lambda\nu_n)$$
$$f_n = f_0 \prod_{j=1}^{n} \lambda\nu_{j-1} / (1+\lambda\nu_j) \tag{5}$$

(5)식에 나타난 f_0에 관한 논의는 다음 절로 넘긴다. 다음, (2)식과 (4)식으로부터 g_n을 구하는데(n=1, 2, 3, …), 편의상 $\lambda E[S]$를 ρ로 표기한다.

$$\begin{aligned} g_n &= L_n^B - L_{n+1}^B = \lambda W_n{}^B - \lambda W_{n+1}{}^B \\ &= \lambda(g_{n-1}\sigma_{n-1} - g_n\sigma_n) + \rho(g_n + f_{n-1}) \end{aligned}$$
$$g_n = (\lambda\sigma_{n-1}g_{n-1} + \rho f_{n-1}) / (1 - \rho + \lambda\sigma_n) \tag{6}$$

(5)식과는 달리 (6)식은 곱의 형태(product-form)가 아니지만, (5)식을 (6)식에 대입하면 순차적으로 g_1, g_2, …를 구할 수 있다.

결국, f_n과 g_n을 λ와 $E[S]$ 그리고 ν_j와 σ_j로, $0 \leq j \leq n$에 대해서 나타낸 셈인데, ν_j와 σ_j에 관한 논의는 다음 절로 넘긴다. 마지막으로, $P_n = P(N=n)$라 하면 $P_n = f_n + g_n$ 의 관계가 성립함을 쉽게 알 수 있다 (편의상 g_0와 σ_0를 0으로 간주).

3. 휴가형 M/G/1의 고객수분포에 대한 논의

앞 절에서, 미시적 LL을 사용하여 복수휴가형 M/G/1 시스템의 안정상태 고객수분포를 구했는데, 이에 대한 마무리와 추가 논의를 본 절에서 다룬다.

먼저, (5)식의 f_0를 구한다. C를 임의유휴기간과 이에 후속하는 바쁜 기간의 합이라 하면, 재생보상(renewal reward)정리에 의해서 다음 식을 얻는다.

$$f_0 = P\{N=0\} = 1/\lambda E[C] \qquad (7)$$

그리고 V동안 j명의 고객이 도착할 확률을 a_j라 하면, $j \geq 0$에 대해서 복수휴가형 M/G/1의 $E[C]$는 다음과 같다[2].

$$E[C] = E[V]/\{(1-\rho)(1-a_0)\}$$

비고 2 : (f_0 뿐만 아니라) f_n을 다음과 같이 a_j로 나타낼 수 있음(부록 B 참조).

$$f_n = (1-\rho)\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j/\lambda E[V], \quad n \geq 0 \qquad (8)$$

앞 절의 주요결과는 f_n과 g_n을 ν_j와 σ_j로 나타낸 것이다. (또는, (8)식에 의해서 ν_j 대신 a_j로 나타낼 수도 있음) 고객수분포를 변환이 아닌(transform-free) 형태로 나타냈다는 점과 이를 통해서 시스템을 새로운 관점으로 이해할 수 있게 한 점을 의의로 꼽을 수 있겠으나, 일반적으로 ν_j와 σ_j는 계산이 용이하지 않으므로 (5)식과 (6)식을 있는 그대로 당장 활용하기는 쉽지 않다. 다만, 잠재적 활용가능성으로 ν_j(또는 a_j)와 σ_j의 근사(approximation)를 통한 f_n과 g_n의 근사를 들 수 있다.

비고3 : ν_j와 σ_j에 대한 $E[V_R] = E[V^2]/2E[V]$와 $E[S_R] = E[S^2]/2E[S]$의 관계는 각각 다음과 같다.

$$E[V_R] = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \nu_j/(1-\rho)$$

$$E[S_R] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \sigma_j/\rho$$

위의 식에서, $1-\rho = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$이고 $\rho = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$이다.

마지막으로, 복수휴가형이 아닌 다른 형태의 휴가형 M/G/1 모형을 고려한다. 대표적으로, 단수휴가(single vacation)형과 N-정책(N-policy)의 두 가지에 대해서 모형설명은 생략하고([2]참조), 복수휴가형과의 차이점만 간략히 논한다. 단수휴가형의 경우, (7)식에 따라 f_0를 정의하면 먼저 $E[C]$가 $(\lambda E[V] + a_0)/\lambda(1-\rho)$로 달라진다[2]. 이에 따라 수정할 것은 (3)식의 ν_0 한 가지인데, 이는 임의고객이 유휴기간 중 0명을 보고 도착했을 때 서버가 휴가중이면 휴가 종료시까지 Q_1에 체류하지만, 서버가 고객을 기다리고 있는 중이면 (바로 바쁜 기간이 시작되므로) 유휴기간 중 Q_1 체류시간이 0이 되기 때문이다. 따라서, f_0를 서버가 휴가중인 경우와 고객을 가다리는 중인 경우로 나누었을 때 그 비율이 $(1-a_0) : a_0$이므로 (계산생략 : [2]참조), (3)식의 ν_0를 $(1-a_0)\nu_0$로 대체하면 된다.

반면에, N-정책하의 M/G/1 모형에서는 $0 \leq n \leq N-1$에 대해서 $f_n = (1-\rho)/N$과 $\nu_n = (N-1-n)/\lambda$가 성립함을 쉽게 알 수 있다[2] (기타 상세한 논의는 윤봉규[1] 참조.)

부록 A : M/G/1 피드백 모형과 Little's 법칙

논의의 대상을 M/G/1 시스템으로 국한시키고, 피드백 횟수가 기하분포를 따르는 베르누이(Bernoulli) 피드백과 피드백 횟수가 일정한 고정(fixed) 피드백을 대표적으로 고려한다. 그런데 베르누이 피드백에 대해서는 거의 완벽할 정도로 분석이 되어 있으므로([3]에 수록된 문헌 참조), 상대적으로 생소한 고정 피드백 모형에 한해서 LL를 적용한다.

고정 피드백 M/G/1 모형의 고객수분포와 대기시간분포를 (변환형태로) 구한 논문[5]이 아직 출판되지 않은 관계로 지금까지는 기대값에 관련된 연구가 주종을 이루고 있는데, 대표적인 사례로서 Adve & Nelson[3]이 LL를 적용해서 기대값을 구한 방법을(더욱 간편하게 수정해서) 소개한다. 편의상, 모든 고객이 3회씩 서비스 받는다고 하자. 단독 서버는 선입선출방식으로 고객을 처리하는데, 피드백 고객은 처음 도착하는 고객과 동일하게 취급된다. 표기의 편의상 처음 도착하는 고객을 0번째 피드백하는 고객으로 간주하고, L_q^i와 $W_q{}^i$를 $i=1, 2, 3$에 대해서 다음과 같이 정의한다.

$$L_q^i = E[\text{대기중인 고객 중 } i-1\text{번 피드백한 고객수}]$$

$W_q{}^i = E[\,i-1$ 번째 피드백 이후 i번째 서비스시작까지의 시간$]$

이들 간에는 $L_q^i = \lambda W_q{}^i$ 관계가 성립하는데(비고 1 참조), 아울러 $W^i = W_q{}^i + E[S]$와 $L^i = \lambda W^i$ 를 정의한다 (이 시스템의 안정상태조건은 $\rho = 3\lambda E[S] < 1$). 이제, Chae & Lee[4]의 방법에 따라, 다음과 같이(PASTA[9]를 적용해서) 연립 방정식을 세운다.

$$W_q{}^1 = (L_q^1 + L_q^2 + L_q^3)E[S] + \rho E[S_R] \quad \text{(A.1)}$$

$$W_q{}^2 = (\lambda W^1 + L^1 + L^2)E[S] \quad \text{(A.2)}$$

$$W_q{}^3 = (\lambda W^2 + \lambda W^1 + L^1)E[S] \quad \text{(A.3)}$$

(A.1) 해석 : 임의고객이 도착 이후 첫 서비스를 받을 때까지의 대기시간은 대기중인 모든 고객의 서비스시간과 서비스 받고 있는 고객(평균 ρ명 또는 서비스가 진행중일 확률이 ρ)의 잔여서비스시간이다.

(A.2) 해석 : 임의고객이 첫 피드백시 보는 모든 고객의 서비스시간인데, 이들은 임의고객보다 나중에 도착한 고객(평균 λW^1명)과 임의고객이 처음 도착했을 때 이미 0번 또는 1번 피드백한 고객(각각 평균 L^1과 L^2명)이다.

(A.3) 해석 : 임의고객이 두 번째 피드백시 보는 고객은 임의고객보다 나중에 도착한 고객(첫 피드백 이후에 도착한 평균 λW^2명과 첫 피드백 이전에 도착한 평균 λW^1명)과 임의고객이 처음 도착했을 때 이미 0번 피드백한 고객(평균 L^1명)이다.

$L^i = \lambda W^i$와 $W^i = W_q{}^i + E[S]$, $i = 1, 2, 3$을 (A.1), (A.2), (A.3)에 대입해서 연립으로 풀면 다음 결과를 얻는다.

$$W_q{}^1 = \frac{\rho}{(1-\rho)(1+\rho/3)} \cdot \left\{(1-\rho/3)\frac{E[S_R]}{E[S]} + \frac{2}{3}\rho\right\}E[S]$$

$$W_q{}^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)(1+\rho/3)} \cdot \left\{\frac{2}{3}\frac{E[S_R]}{E[S]} + (1-\rho/3)\right\}E[S]$$

$$W_q{}^3 = W_q{}^2$$

부록 B : (8)식 유도

재생보상정리에 의하면 $f_n E[C]$는 C동안 서버가 휴가중이고 시스템내에서는 n명이 체류중인 평균시간인데((7)식 참조), 이를 유휴기간 중의 최종휴가(즉, 1명 이상 도착한 V) 동안 도착한 고객수에 조건을 걸어서 구한다. A_V를 V동안 도착하는 고객수로 정의하여(비고 : $a_j = P\{A_V = j\}$), 다음과 같이 알려져 있는 결과[2]를 이용한다.

결과 1 : $E[V \mid A_V = j] = (j+1)\, a_{j+1}/\lambda a_j$

결과 2 : $A_V = j$인 V시간 중에 n명이, $0 \le n \le j$에 대해서 체류중인 시간의 평균은 $E[V \mid A_V = j]/(j+1)$이다.

이들을 종합하고, $E[C]$를 대입해서 다음과 같이 (8)식을 얻는다.

$$f_n E[C] = \sum_{j=n}^{\infty} P\{A_V = j \mid A_V \ge 1\} E[V \mid A_V = j]/(j+1)$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} a_{j+1}/\lambda(1-a_0)$$

$$f_n = \sum_{j=n}^{\infty} a_{j+1}(1-\rho)/\lambda E[V]$$

참고문헌

1. 윤봉규, "휴가형 대기행렬 시스템의 고객수 분포에 관한 미시적 접근," 한국과학기술원 산업공학과 석사논문, 1998.
2. 이호우, *대기행렬이론*, 개정판, 시그마프레스, 1998.
3. Adve, V. S. and Nelson, R., "The relationship between Bernoulli and fixed feedback policies for the *M/G/*1 queue," *Operations Research*, Vol. 42, pp. 380-385, 1994.
4. Chae, K. C. and Lee, H. W., "*Mx/G/*1 vacation models with n-policy: Heuristic interpretation of the mean waiting time," *Journal of Operational Research Society*, Vol. 46, pp. 258-264, 1995.
5. Choi, B. D. and Kim, B., "*M/G/*1 queueing system with fixed feedback policy," Working Paper, Dept. of Math., KAIST, Taejon-shi, 305-701, Korea, 1998.
6. Ross, S. M., *Introduction to Probability Models*, 5th ed, Academic Press, San Diego, 1993.
7. Simon, B., "Priority queues with feedback," *Journal of ACM (Assoc. for Computing Machinery)*, Vol. 31, pp. 134-149, 1984.
8. Whitt, W., "A review of $L = \lambda W$ and extensions," *Queueing Systems*, Vol. 9, pp. 235-268, 1991.
9. Wolff, R. W., "Poisson arrivals see time averages," *Operations Research*, Vol. 30, pp. 223-231, 1982.
10. Wolff, R. W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.

1998년 10월 접수, 1998년 12월 채택