Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 2, pp. 226-232, June 1999.

T-칼라링 문제를 위한 탐색공간 스무딩 Simulated Annealing 방법

이정은[1] · 한치근[2]

[1]한국해양수산개발원 / [2]경희대학교 전자정보학부

A Simulated Annealing Method with Search Space Smoothing for T-Coloring Problem

Lee, Jung-Eun[1] · Han, Chi-Geun[2]

Graph Coloring Problem(GCP) is a problem of assigning different colors to nodes which are connected by an edge. An extended form of GCP is TCP (T-coloring problem) and, in TCP, edge weights are added to GCP and it is possible to extend GCP's applications. To solve TCP, in this paper, we propose an improved Simulated Annealing(SA) method with search space smoothing. It has been observed that the improved SA method obtains better results than SA does.

1. 서 론

그래프 칼라링 문제는 그래프에서 서로 인접한 노드들에 서로 다른 색깔을 할당하는 문제이며, k-칼라링 문제라고도 한다. 즉, 노드의 집합 V와 에지의 집합 E로 구성된 그래프 $G=(V, E)$에서 노드의 집합인 V를 $V_1, \cdots, V_k$의 독립적인 집합으로 나눌 수 있을 때(이 경우 각 V_i에 속한 노드들 간에는 서로 에지를 이루지 않는다), 각각의 V_i에 대해 k개의 색깔($\{1,\cdots,k\}$) 중 하나를 할당해 주는 문제이며, 이 경우 그래프 G는 k-colorable하다고 한다(Chans, *et. al.* 1987). 이는 조합최적화(combinatorial optimization) 분야에서 아주 잘 알려진 문제이며, NP-Complete 문제이다(Garey and Johnson, 1979).

그래프 칼라링 문제는 무선통신 또는 라디오에서 쓰이는 주파수 할당 문제(Biggs, 1997)와 학교 시간표 작성 문제, 스케쥴링 문제, 클러스터링 문제 등의 여러 가지 실세계 문제에 적용이 가능하다. 그래프 칼라링 문제의 기존 해법들 중에는 Wagner(1980)가 제안한 노드들의 그룹화를 사용한 방법, 유전자 알고리즘(Costa, *et al.*, 1995), 그리디 알고리즘(Culberson, 1979) 등이 많이 사용되어 왔다.

일반적인 그래프 칼라링 문제의 개념만으로는 해를 구하기 힘든 확장된 개념의 실세계 문제들이 많이 존재한다. Kemnitz (1998)가 제안한 integer distance graph가 바로 확장된 그래프 칼라링 문제 모델의 한 예이다. 이는 일반 그래프 칼라링 문제와는 다르게 그 값이 1 이상인 에지 가중치 개념이 들어간 문제로, 그래프 칼라링 문제로 모델링이 불가능한 문제를 모델링이 가능하게 해준다. 그렇기 때문에 T-칼라링 문제의 사용이 필요한 것이다.

T-칼라링 문제의 기존 해법으로는 Costa가 제안한 Simulated Annealing(SA) 방법이 있다(Costa, 1993). 그런데 SA 방법은 전역 최적해로 수렴하는 장점이 있는 반면, 전역 최적해로 수렴하는데 많은 시간이 걸린다는 단점을 가지고 있다.

이러한 단점을 보완하기 위해 본 논문에서는 보다 빠른 시간 내에 전역 최소해로의 수렴 가능한 탐색공간 스무딩 방법을 적용하여 향상된 SA를 새롭게 제안하였다. 이 방법에서는 원래의 T-칼라링 문제를 풀기 위해 탐색공간 스무딩 방법을 사용하여 변형된 탐색공간에서의 지역해를 구하고, 이를 초기해로 하여 원래 문제에서의 전역 최적해로의 수렴이 기존 해법보다 빠른 시간 내에 이루어 질 수 있도록 알고리즘을 설계하였다.

2. T-칼라링 문제의 정의 및 기존 해법

2.1 T-칼라링 문제의 정의

T-칼라링 문제는 그래프 칼라링(k-칼라링) 문제와는 달리 그래프의 에지에 다양한 값의 가중치를 두어 변형한 문제이다.

이때 에지 가중치를 나타내는 t_{ij}를 자연수라고 하고, $c(i)$가 노드 i에 할당되는 색깔을 나타낸다면, *T*-칼라링 문제는 다음과 같은 조건을 만족하는 색깔을 찾는 문제이다.

$$\forall(i, j) \in E, \quad |c(j) - c(i)| \geq t_{ij}.$$

본 논문에서 풀고자 하는 *T*-칼라링 문제는 최적화 문제로 가능한 한 최소의 색깔을 사용해서 그래프의 모든 노드를 조건에 맞는 색깔로 칼라링하는 것이다.

<그림 1>은 *T*-칼라링 문제의 예를 나타낸 것이다.

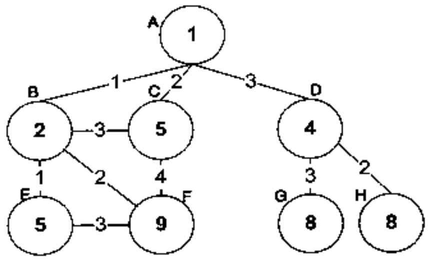

그림 1. *T*-칼라링 문제의 예.

<그림 1>에서 보면 그래프의 에지에 1, 2, 3, 4의 4종류의 에지 가중치(에지에 표시)가 주어져 있다. 그리고 에지 AD의 에지 가중치가 3일 때, 각각의 노드 A, D에는 1, 4의 색깔(노드 내에 표시)이 할당되어 있으며, 그 차이가 3이므로 *T*-칼라링 문제의 조건을 만족함을 알 수 있다.

2.2 *T*-칼라링 문제의 응용

T-칼라링 문제가 쓰이는 대표적인 경우로는 라디오나 무선통신에 있어서의 주파수 할당 문제가 있다. 주파수 할당 문제는 주파수를 목적에 맞게 효율적으로 사용할 수 있도록, 즉 충돌이 생기지 않도록 하면서 사용자들이 편리하게 이용할 수 있도록 안테나에 할당해 주는 문제이다(Biggs, 1997). 비용의 절감을 위해서는 보다 효율적인 주파수의 할당이 중요시된다.

이때 주어지는 제약조건들은 다음과 같다.

첫째, 지역적으로 충분히 분리되어 있지 않은 두 개의 안테나에는 같은 주파수가 할당되어서는 안 된다. 둘째, 서로 다른 사이트에 설치된 전송기들이 비슷한 주파수에 맞춰져 있는 경우, m1을 각 안테나 사이에서 요구되는 채널 분리정도라고 할 때, 각 채널의 주파수 차는 m1보다 커야 한다. 셋째, m2를 같은 사이트에 존재하는 전송기 i, j 사이에 요구되는 채널 분리정도라고 할 때, 한 사이트에서 사용되는 쌍을 이루는 주파수끼리는 특정한 고정 양 m2 만큼 떨어져 있어야 한다.

주파수 할당 문제는 *T*-칼라링 문제를 확장한 개념의 문제로, 이 때 그래프의 각 노드는 기지국 또는 안테나를 나타내고, 각 에지에 주어진 가중치는 기지국과 안테나 간의 거리 또는 여러 개의 주파수를 사용할 때는 주파수들 간의 대역폭을 나타낸다.

2.3 기존 해법

T-칼라링 문제의 기존 해법으로는 SA 방법이 있다(Costa, 1993). SA 방법은 먼저 일정 범위의 수들을 가지고 무작위 추출하여 초기해를 만들고, 이웃해를 생성할 때에는 문제 조건과 충돌이 되는 노드 하나를 선택해 그 노드에 대한 색깔을 조건에 맞는 색깔 중 가장 작은 수의 색깔로 바꿔주는 방법을 사용한다. 이 때 목적함수를 사용하여 현 상태의 해와 이웃해 중에서 보다 나은 해를 선택한다. 여기서 보다 나은 해는 목적함수의 값이 작은 해이다.

SA 방법의 루프는 목적함수 $f(s)$의 값이 0이 될 때까지 해를 구해 빠져 나오게 되거나, $f(s)$의 값이 0이 아닌 경우, 즉 해를 찾지 못하는 경우에는 반복횟수의 조건으로 루프를 빠져 나오게 된다.

<그림 2>는 *T*-칼라링 문제의 기존 해법인 SA 방법의 순서도이다.

만일 이웃해 s'가 현 상태의 해 s 보다 좋은 해가 아닌 경우라도 s'를 선택할 수 있는 온도에 영향을 받는 확률은 다음과 같이 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} p &= p(\Delta f = f(s') - f(s)) \\ &= \exp(-\Delta f / t). \end{aligned}$$

이때의 확률 p가 0~1 범위의 무작위로 추출된 균일 분포 값보다 크다면 이웃해를 현 상태의 해로 선택할 수가 있다.

루프 안에서 그 다음 단계의 이웃해를 구할 때 냉각 비율 a에 의해서 온도를 낮춰줘야 하는데 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t = t \times a, \qquad \text{where} \quad 0 < a < 1.$$

위의 두 식에서 점차 낮아지는 온도 t에 대한 에너지 변화에 따른 확률 p에 의해 이웃해가 현 상태의 해보다 나쁘더라도 이웃해로의 이동이 가능해진다. 이는 hill climbing을 통해 지역 최적해에서 탈피할 수 있음을 의미한다(Kirkpatrick, 1983).

현 상태의 해보다 더 좋은 해를 얻기 위한 방법으로 위에 언급한 내용들만으로는 한계가 있다. 이런 경우에는 온도를 낮춰줌에 따라 루프의 반복횟수를 늘려주는 방법을 사용하는 것이 효과적이다. 낮은 온도에서 이웃해로의 이동을 가능한 한 많이 하기 위해 다음과 같이 반복횟수 rep에 1보다 큰 수인 b를 곱해서 반복회수를 늘려준다.

$$\text{rep} = \lfloor \text{rep} \times b \rfloor, \quad \text{where } b > 1.$$

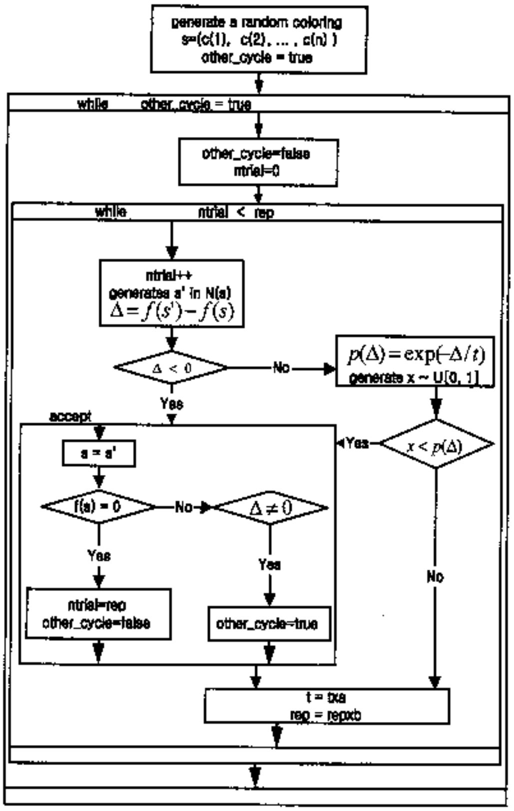

그림 2. *T*-칼라링 문제를 풀기 위한 SA의 순서도.

3. 향상된 SA 방법의 정의 및 적용

3.1 향상된 SA 방법의 개념

T-칼라링 문제의 기존 해법인 SA 방법은 탐색공간 내에서 조금씩 이동하여 전체 탐색공간을 통한 전역 최소해로의 수렴을 하기 때문에 탐색 시간이 오래 걸린다는 단점이 있다. 그러므로 본 논문에서는 보다 효율적인 초기해를 얻어 빠른 시간 내에 문제의 전역 최소해를 얻고자 SA 방법에 탐색공간 스무딩 방법을 삽입하여 향상된 SA 방법을 제안하고자 한다.

<그림 3>은 본 논문에서 제안한 향상된 SA 방법 중 Gu(1994, 1995)가 제안한 수식을 사용한 다단계 탐색공간에서의 *T*-칼라링 문제 해결방안의 흐름도를 나타낸 것이다.

향상된 SA 방법은 *T*-칼라링 문제의 기존 해법인 SA 방법에 탐색공간 스무딩을 사용하여 원래 문제의 초기해를 잡아 원래 문제의 전역 최소해에 수렴하는 값을 얻는 방법이다.

이 방법은 실험을 통해 정해진 α값으로부터 그 값을 차츰 줄여 나가면서 루프를 돌게 된다. α값에 따라 변형된 탐색공간에서의 지역 최소해를 SA 방법을 통해 구하고, 그때 구해진 해를 다음 단계의 초기해로 이용하여 다음 단계의 문제를 푸는 방법을 반복한다. α값이 1이면 루프를 빠져 나오게 되는

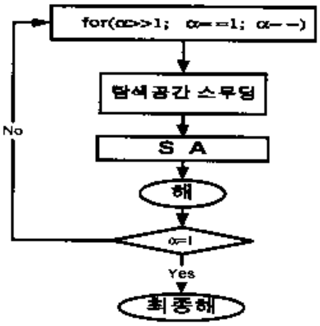

그림 3. 다단계 탐색공간을 사용한 향상된 SA 방법의 흐름도.

데, 이때의 탐색공간은 탐색공간 스무딩의 수식 정의에 의해 원래 문제가 된다. 그러므로 최종적으로 루프를 빠져 나왔을 때 얻어진 해가 바로 원래 문제의 전역 최적해가 된다.

이는 탐색공간 스무딩 방법이 효율적인 초기해를 잡게 해주어 보다 빠른 시간 내에 전역 최소해에 도달할 수 있다는 장점을 가지고 있어, SA 방법이 전역 최소해로의 수렴에 소요되는 시간이 길다는 단점을 보완하고자 SA 방법에 적용한 것이다.

3.2 탐색공간 스무딩 함수

원래의 탐색공간을 변형한 완만해진 탐색공간에서는 원래의 탐색공간에 비하여 지역 최소해의 개수가 줄어들게 되며 그 형태도 원래 탐색공간의 전반적인 형태를 나타내게 된다. 따라서 전체 탐색공간의 형태를 보여 주고 있는 스무딩된 탐색공간상에서 해를 구하면 전역 최소해를 구할 확률이 보다 높아지게 되는 것이다. 이렇게 탐색공간을 완만하게 해주는 것을 탐색공간 스무딩이라고 한다(Gu, 1994; Gu and Du, 1995; 박종철, 한치근, 1996).

<그림 4>는 탐색공간 스무딩을 적용하여 여러 단계의 탐색공간을 생성한 것이다. <그림 4>와 같이 다단계 탐색공간을 설정하여, 아주 완만한 탐색공간으로부터 점차 지역해를 찾아나간다. 즉, 각 단계에서 찾은 지역해를 그 다음 단계 탐색공간의 초기해로 사용하여 그 공간에서의 지역 최소해를 찾게 되며, 이를 반복하여 원래의 탐색공간으로부터 지역 최소해를 찾으면 그것이 전역 최소에 근접할 수 있게 된다.

<그림 4>와 같이 아주 완만한 탐색공간으로부터 주어진 문제의 탐색공간과 동일한 탐색공간까지의 다단계 탐색공간을 생성하기 위해 스무딩 인자 α를 이용하게 된다. 스무딩 인자 α를 조정하여 다단계 탐색공간을 생성하는데, α가 큰 수이면 탐색공간은 더욱 완만해지고, α=1이면 탐색공간은 원래의 탐색공간이 된다. 이러한 탐색공간 스무딩의 특징은 기존의 알고리즘에 쉽게 적용이 가능하며, 지역해를 벗어나 전역해로 도달할 수 있는 가능성을 높여 주게 된다. 실험에서는 주

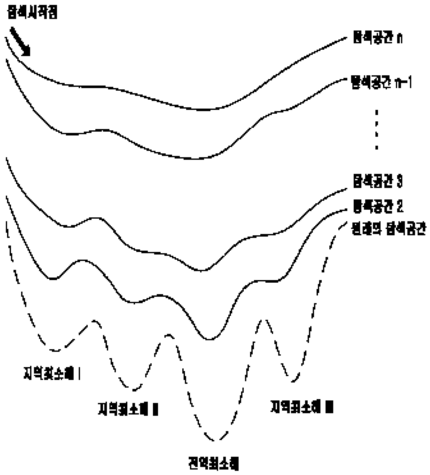

그림 4. 다단계 탐색공간.

어진 문제에 따라 적절한 α 값을 찾아야 하기 때문에 많은 실험을 통해 적절한 α 값을 갖도록 조정한다.

3.2.1 스무딩 함수 정의

본 절에서는 스무딩 함수에 대해 정의를 내린다.

그래프 G에서 전체 노드의 수를 n이라 하고 노드 i와 j $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 사이의 에지 가중치를 t_{ij}라고 하자. 또, 그래프가 $n \times n$행렬로 구성되어 있다고 할 때, 모든 노드들 사이의 평균 비용 $\bar{t}$ 는

$$\bar{t} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} t_{ij}$$

가 된다. 이때 모든 에지 가중치에 대해 스무딩 인자 α값을 적용한 $t_{ij}(\alpha)$는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$t_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \bar{t} + (t_{ij} - \bar{t})^{\frac{1}{\alpha}} & , \text{ if } t_{ij} \geq \bar{t} \\ \bar{t} - (\bar{t} - t_{ij})^{\frac{1}{\alpha}} & , \text{ if } t_{ij} < \bar{t} \end{cases} , \quad \alpha \geq 1$$

$t_{ij}(\alpha)$는 스무딩 인자인 α값에 따라 그 완만한 정도가 조절된 완만하게 변형된 탐색공간을 이루고 있는 에지 가중치를 의미한다.

여기서 $\alpha \gg 1$인 경우, $t_{ij}(\alpha)$는 $\bar{t}$ 에 수렴하게 되므로 거의 평면에 가까운 완만한 형태의 탐색공간을 형성하게 된다. 또한 $\alpha = 1$인 경우, $t_{ij}(\alpha)$는 t_{ij}가 되어 원래의 문제가 된다. 그러므로 α 값을 큰 수로부터 점차 줄여 나감에 따라 여러 형태의 탐색공간을 생성할 수 있다. 본 논문에서는 실험을 통하여 적당한 α 값을 갖도록 조정한다. 본 논문에서는 이러한 스무딩 함수를 SM이라 한다.

3.3 제안된 향상된 Simulated Annealing 방법

3.3.1 이웃해 생성 방법

s와 s'를 각각 n개의 노드들의 집합으로 구성된 현 상태의 해와 이웃해라고 할 때, s에서 s'로의 이웃해 생성은 현재 상태의 해 s에서의 모든 노드의 집합들을 유지하면서 그 중 칼라링 조건에 위배되는 하나의 노드 $(x \in V)$의 색깔을 바꿔주는 방법을 사용하는 것으로, 이를 식으로 표시하면 다음과 같다.

$$s = (c(1), c(2), \cdots, c(n)),$$

$$s' = (c'(1), c'(2), \cdots, c'(n))$$

$$c'(x) = \text{new\_color}$$

$$c'(i) = c(i), \quad i = 1, \cdots, n, \quad i \neq x$$

이웃해 생성과정에서 색깔을 바꿔줄 대상이 되는, 즉 문제의 조건에 위배되는 노드가 한 개 이상인 경우에 하나의 노드를 선택하는 방법은 다음과 같다.

현 상태의 해로부터 이웃해를 구하는 단계에서 아직 색깔을 할당하지 않은 노드에 대한 색깔 할당 기준으로 Saturation Degree, $D(x)$ 라는 개념을 사용한다. 칼라링의 우선 순위는 $D(x)$가 가장 큰 노드들부터이다.

$M(x)$가 노드 x와 에지를 이루는 이미 색깔이 할당된 노드들의 집합이라고 할 때, $D(x)$의 정의는 다음과 같다(Costa, 1993).

$$D(x) = |\{w > 0 \mid \exists y \in M(x)$$

$$\text{such that} \quad w \in [c(y) - t_{xy} + 1,\ c(y) + t_{xy} - 1]\}|$$

다시 말해 $D(x)$는 노드 x가 가질 수 없는 색깔의 종류 수를 말하는 것이다.

여기서 w는 노드 x에 할당되어서는 안 되는 색깔의 범위를 나타내는 것으로 0보다 큰 값을 가져야 한다. 이때의 $c(y)$는 노드 x와 에지를 이루는 색깔이 할당된 노드 y의 색깔을 나타내는 것이고, t_{xy}는 에지 가중치를 나타낸다.

색깔을 바꿔줘야 하는 노드 x의 선택과 그 노드에 할당할 새로운 색깔(new_color)의 선택에 대한 것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$D(x) = \text{Max}\{\ D(z), \text{ for } z \in V,$$

$$\text{such that} \quad \exists q \in V,\ (z, q) \in E,\ |c(z) - c(q)| < t_{zq},$$

$$D(z) = |\{w > 0 \mid \exists y \in M(z),$$

$$\text{such that} \quad w \in [c(y) - t_{zy} + 1,\ c(y) + t_{zy} - 1]\}|\},$$

$$W=\{w>0 \mid \exists\, y \in M(x),$$
$$\text{such that} \quad w \in [c(y)-t_{xy}+1,\ c(y)+t_{xy}-1]\},$$

$$I^{+} = \{1, 2, \cdots\},$$
$$\text{new\_color} = \text{Min}\ \{ p \in I^{+}/W \}$$

조건에 위배되는 모든 노드들 z에 대해 각각에 대한 $D(z)$ 값을 구하고, 그 중 최대값을 가지는 노드를 x라 한다. x에 할당할 수 없는 색깔의 범위를 구해 이를 W라고 한다. 그리하여 노드 x에 할당할 색깔의 결정은 양의 정수의 집합에서 집합 W의 원소들을 제외한 것들 중 최소값을 색깔로 결정한다.

만일 $D(x)$값이 같은 노드가 여러 개 나오는 경우에는 spacing degree가 큰 노드를 선택한다. spacing degree는 노드 x에 연결되어 있는 모든 에지에 대한 에지 가중치를 합한 값이다.

이웃해의 생성을 <그림 5>에 나타내었다.

	A	B	C	D	E	F	G	H
현재 해	1	2	**3**	4	5	9	8	8

	A	B	C	D	E	F	G	H
이웃해	1	2	**5**	4	5	9	8	8

그림 5. 이웃해 생성의 예.

<그림 5>에서 보면 어느 한 노드(노드 C)에 할당된 색깔이 문제의 조건에 맞지 않는다고 할 때, 그 노드에 대해 할당 가능한 색깔 중에서 가장 작은 색깔을 할당해 주어 이웃해를 생성한다.

예를 들면, 2.1절의 <그림 1>의 그래프에 <그림 5>의 현 상태의 해를 사용한다고 하면, 이웃해 생성시 색깔을 바꿔줘야 하는 노드는 C가 된다. 노드 C와 에지를 구성하는 노드는 A, B, F이고, 에지 AC, BC, CF에 주어진 에지 가중치는 2, 3, 4이다. 그리고 노드 A, B, C, F에 할당된 색깔은 <그림 5>에 나와 있듯이 1, 2, 3, 9이다. 그런데 에지 BC를 구성하는 노드 B와 C의 색깔 차는 |2 - 3|=1로 주어진 에지 가중치 3보다 작아 문제의 조건에 위배되므로 색깔 교체 대상이 되는 것이다. 그리고 <그림 5>에서는 현 상태 해 중에서 문제의 조건과 맞지 않는 색깔을 가지고 있는 노드가 C 하나만 존재한다. 물론 조건에 위배되는 노드의 수가 2개 이상이면 각 노드들의 $D(x)$를 구해 최대값을 갖는 노드를 선택하면 된다. 색깔을 바꿔줘야 하는 노드가 선택된 다음에는 바꿔줘야 하는 색깔을 정하기 위해 할당할 수 없는 색깔의 범위를 위의 식에 의해 구해보면 다음과 같다.

우선 노드 C는 노드 A, B, F와 각각 에지를 이루고 있고, 각 노드에 주어진 색깔과 에지 가중치에 의해 할당할 수 없는 색깔의 범위는 노드 A에 의해 1, 노드 B에 의해 1, 2, 3, 4, 그리고 노드 F에 의해서는 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12이다. 그러므로 노드 C에 할당 가능한 최소의 색깔은 바로 5가 되는 것이다. 따라서 현 상태의 해에서 노드 C의 색깔을 5로 바꿔준 것이 <그림 5>와 같이 이웃해가 되는 것이다.

3.3.2 목적함수

목적함수 $f(s)$는 생성한 해가 가능해인지의 여부를 판단하기 위한 것이다. 그래프의 모든 에지에 대해서, 에지를 이루는 두 노드 i, j의 색깔 차이값 $|c(i)- c(j)|$를 에지 가중치 t_{ij}와 비교하여, 에지 가중치가 더 크면 $t_{ij} - |c(i)- c(j)|$ 값을 리턴하고, 나머지 경우(문제의 조건에 맞는 경우)는 0을 리턴하는 것으로, $f(s)$의 값이 0이면 가능해가 되는 것이다. 목적함수에 대한 수식은 다음과 같다(Costa, 1993).

$$f(s) = \sum_{(i,j)\in E} \delta(i,j)$$

$$\delta(i,j) = \begin{cases} t_{ij} - |c(i)-c(j)|, & \text{if } |c(i)-c(j)| < t_{ij} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

<그림 6>은 제안된 향상된 SA 방법의 알고리즘을 순서도로 나타낸 것이다. 스무딩된 탐색공간에서 해를 구하는 방법으로는 기존 해법인 SA 방법을 그대로 사용한다.

4. 실험 및 성능분석

4.1 실험 환경

실험계산을 위한 문제로는 그래프의 노드 수는 30, 50, 70, 100, 120개로 하고, 그래프의 에지 수는 생성 가능한 모든 에지 수의 50%로 하였다. 초기해는 (1~노드 수), (1~노드 수×2)의 범위 내의 자연수들로 구성되도록 임의 정수를 발생시켜 할당하였고, 에지 가중치는 1~10, 1~20 의 두 가지 범위로 설정하였다. 탐색공간의 스무딩 인자 α는 실험을 통해 2로 설정하였다. 3이상을 사용할 때에도 2를 사용한 것과 유사한 결과를 보였다. 결과적으로 탐색공간은 α가 2인 경우와 α가 1인 경우 (즉, 원래의 탐색공간) 2개가 생성된다.

SA 방법을 적용하기 위한 초기 온도는 기존 해법에서 사용한 8℃를, 냉각 비율은 0.93을 그대로 적용하였다. 실험의 종료 조건은 목적함수 $f(s)$의 값이 0이면 종료된다. 만일 해를 찾지 못하면 루프의 반복횟수를 조절하여 종료한다.

다음절에서 실험 성능을 비교하기 위한 향상된 SA 방법에서의 소요 시간은 탐색공간 스무딩 시간도 포함한 것이다. 또한 실험결과값들은 같은 조건의 문제 유형에 대해 무작위로 10개

의 서로 다른 그래프를 생성하여 실험한 결과의 평균치로 나타내었다.

색깔 수 감소의 비율(%) 계산은 다음의 수식을 사용하여 계산하였다.

$$\left(1 - \frac{\text{향상된 SA의 색깔 수}}{\text{SA의 색깔 수}} \right) \times 100\ (\%)$$

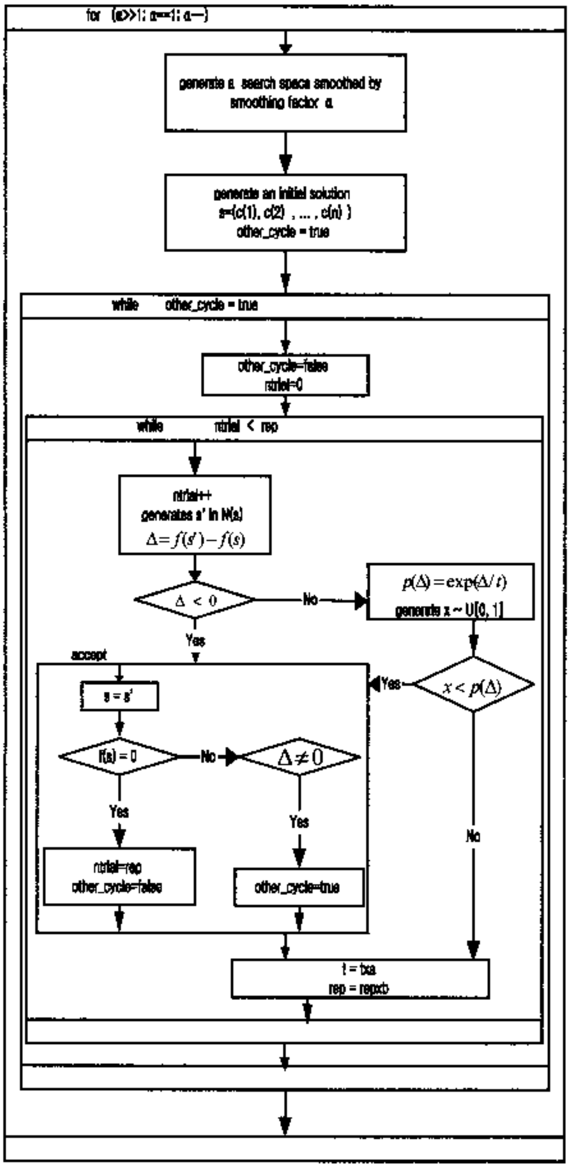

그림 6. 탐색공간 스무딩을 이용한 향상된 SA의 순서도.

4.2 실험 결과

<표 1>에서 보듯이 본 논문에서 제안한 향상된 SA 방법을 사용하였을 때 최종해에 수렴하는데 소요되는 시간은 모든 경우에 있어 기존 해법보다 줄었고, 색깔 수에 있어서는 전체 10 문제 중 9 문제의 경우에 향상된 결과를 얻었다. 이것으로 기존 해법인 SA 방법에 비해 본 논문에서 제안한 향상된 SA 방법이 효율적임을 알 수 있다.

에지 가중치의 범위에 따라서 같은 조건의 문제를 푸는 소요시간이 에지 가중치 최대값이 10일 때보다 20인 경우 더 많이 걸렸는데, 이러한 이유는 에지 가중치의 범위가 커지면 이웃해 생성시 계산해 주어야 하는 색깔의 범위가 커지기 때문이다.

표 1. 초기해를 (1~노드 수)의 범위에서 생성한 실험결과

에지 가중치	노드 수	SA		SM		
		소요시간 (초)	색깔 수	소요시간 (초)	색깔 수	색깔 수 감소(%)
1~10	30	13.3	24.6	11.4	24.4	0.81
	50	68.6	41.6	62.8	39.4	5.29
	70	184.6	56.4	170.1	53.6	4.96
	100	547.3	76.1	467.0	75.0	1.45
	120	1434.0	89.8	1312.6	89.3	0.56
1~20	30	29.3	27.0	29.0	26.5	1.85
	50	131.3	42.8	123.6	41.4	3.27
	70	378.3	61.1	372.2	60.0	1.80
	100	1064.3	84.5	1027.6	83.2	1.54
	120	1779.1	100.5	1742.1	100.6	-0.09

표 2. 초기해를 (1~노드 수×2)의 범위에서 생성한 실험결과

에지 가중치	노드 수	SA		SM		
		소요시간 (초)	색깔 수	소요시간 (초)	색깔 수	색깔 수 감소 (%)
1~10	30	12.6	24.7	13.5	25.2	-2.02
	50	84.3	41.4	56.2	38.7	6.52
	70	186.0	56.6	164.1	54.5	3.71
	100	419.1	79.6	329.1	80.1	-0.62
	120	839.6	95.4	728.7	93.8	1.68
1~20	30	20.0	26.3	20.0	26.0	1.14
	50	113.0	44.0	89.3	42.4	3.63
	70	297.6	62.8	245.8	61.5	2.07
	100	926.2	85.8	775.1	85.2	0.70
	120	1420.6	103.2	1395.9	100.9	2.23

<표 2>의 결과는 <표 1>의 것과는 달리 본 논문에서 제안한 향상된 SA 방법을 사용하였을 때 최종해에 수렴할 때까지

의 소요시간은 8 문제의 경우에 있어 향상된 결과를 나타냈고, 얻어진 색깔수는 기존 해법인 SA 방법에 비해 전체 10 문제 중 8 문제가 향상된 결과를 보였다.

5. 결론 및 추후 연구방향

본 논문에서는 *T*-칼라링 문제의 기존 해법인 SA 방법이 전역 최적해로 수렴하는데 소요되는 시간이 길다는 단점을 보안하기 위해 탐색공간 스무딩 방법을 적용하여 문제를 풀어보았다.

실험 결과를 정리해 보면 다음과 같다.

첫째, 전체적으로 볼 때, 기존 해법인 SA 방법보다 향상된 SA 방법이 문제의 해를 구하는데 소요되는 시간도 줄어들었을 뿐 아니라 더 좋은 해를 구할 수가 있었다.

둘째, 에지 가중치의 범위에 있어서는 그 범위가 1～10인 경우가 1～20인 경우보다 소요시간과 색깔 수가 더 작은 수치로 나타났다. 이는 에지 가중치의 범위가 커지면 색깔의 범위도 따라서 커지며, 문제의 해를 구하는 시간도 증가한다는 사실을 말한다.

셋째, 초기해를 잡는 색깔의 범위에 대한 분석으로는 초기해의 범위를 (1～노드수) 까지로 잡은 경우에 총 10 문제 중 9 문제가 향상된 결과를 보이고, (1～노드수×2) 까지로 잡은 경우 총 10 문제 중 8 문제의 경우 향상되었으므로, 초기해의 색깔 범위는 결과에 영향을 미치지 않은 것으로 관찰되었다.

앞으로는 보다 다양한 조건하에서의 실험과 효과적인 근사 초기해 설정 및 다른 스무딩 함수에 대한 연구조사가 필요하다.

참고문헌

박종철, 한치근 (1996), 탐색 공간 smoothing을 이용한 다중망 설계 문제 해법에 관한 연구, *경희대학교 석사학위논문*.

Biggs, N. (1997), Integer programming techniques for the frequency assignment problem: Results and prospects, *CDMA Research Report Series*.

Chans, M., Hertz, A. and Werra, D. (1987), Some experiments with simulated annealing for coloring graphs, *European Journal of Operational Research*, 32, 260-266.

Costa, D. (1993), On the use of known methods for *T*-colorings of graphs, *Annals of Operations Research*, 41, 343-358.

Costa, D., Hertz, A. and Dubuis, O. (1995), Embedding a sequential procedure within an evolutionary algorithm for coloring problems, *Journal of Heuristics*, 1(1), 105-128.

Culberson, J. C. (1992), Iterated greedy graph coloring and the difficulty landscape, *Technical Report*, University of Alberta.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979), Computers and intractability, *Freeman*, San Francisco.

Gu, J. (1994), Efficient local search with search space smoothing: A case study of the traveling salesman problem(TSP), *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*, 24(5), 728-734.

Gu, J. and Du, B. (1995), A multispace search algorithm for molecular energy minimization, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*.

Kemnitz, A. and Kolberg, H. (1998), Coloring of integer distance graphs, *Discrete Mathematics*, 191, 113-123.

Kirkpatrick, S., Gellat, C. and Vecchi, M. (1983), Optimization by simulated annealing, *Science*, 220-671.

Wagner, R. A. (1980), An algorithm for coloring the nodes of a graph, *Computer Science Department*, Cornell University.