Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 4, pp. 517-526, December 1999.

가속수명시험을 위한 경제적 일정스트레스 계획의 개발†

서순근 · 김갑석

동아대학교 산업시스템공학과

Economic Constant Stress Plans for Accelerated Life Testing

Sun-Keun Seo · Kab-Seok Kim

This paper deals with two economic optimal designs of constant-stress accelerated life test(ALT) where failure distribution follows one of location-scale family, i. e., exponential, Weibull, and lognormal distributions which have been ones of the popular choices of failure distributions. Two optimization criteria to develop ALT plans are the statistical efficiency per unit expected cost which consists of the fixed test cost, cost being proportional to the number of test units, and variable test cost depending on test period and stress level, and the expected loss which combines Taguchi's quadratic loss function and expected test cost. Optimum plan determines the low stress level, test units allocated to each stress, and censoring times at two stress levels under Type I censoring. The proposed ALT plans are illustrated with a numerical example and sensitivity analyses are conducted to study effects of pre-estimates of design parameters.

1. 서 론

기술의 발달로 인하여 장비나 제품 또는 부품들의 신뢰성은 급속도로 증가하는 반면, 소비자들의 다양한 요구에 따라 제품의 수명 사이클(life cycle)은 감소하고 있는 실정이다. 이러한 상황하에서 제품 또는 장비의 수명을 일반적인 사용조건(use or design condition)하에서 시험할 경우 시험 단위들이 장시간 동안 거의 고장나지 않거나 혹은 심각하게 열화되지 않으므로 실제로 수명 사이클 내에 시험결과를 획득할 수 없거나 시험비용이 막대하게 소요될 수 있다. 따라서 대부분의 신뢰성 시험에서는 단시간 내에 해당 제품 및 장비의 수명을 파악하기 위하여 사용조건보다 가혹한 부하(stress)를 가하여 고장 가능성이 높도록 시험하는 가속수명시험(Accelerated Life Test; ALT)을 이용하고 있다. 이때 ALT를 통해 얻어진 자료들은 물리적으로 적절한 통계적 모형을 통해서 외삽(extrapolation)되어 정상 사용조건하의 관심있는 수명이 평가된다.

이러한 가속수명시험을 실시하기 위해서는 적절한 가속수명시험계획이 수립되어야 한다. 즉, 경제성과 통계적 효율성을 고려하여 시험에 적용하는 스트레스의 가속방법, 시험중 시험제품의 관찰방법(검사방법), 관측중단방법, 시험종결시간, 시험에 적용하는 스트레스 수준, 각 스트레스 수준별 시험제품의 할당비율 등을 결정하여야 한다.

지금까지 수행되어온 가속수명시험에 관한 연구들은 이상과 같은 시험 조건들하에서 얻어진 시험자료에 대한 통계적 분석 및 시험방식의 설계에 관한 것이 대부분인데, 수명시험에 의하여 얻을 수 있는 수명자료의 통계적 효율성만을 주로 강조하고 있다. 그러나 수명시험은 대부분이 파괴시험이고 고가의 장비에 대해서 행해질 때가 많으므로 단지 통계적 효율성만을 강조할 경우 시험비용이 과다하게 투입될 수 있으므로 경제적인 측면도 충분히 고려해야 한다.

통계적 효율성을 고려한 (가속)수명시험의 설계에 관한 연구에 비하여 경제성을 고려한 연구는 활발하게 수행되지 못했지만 사용조건하에서의 시험비용을 최소화할 수 있는 시험중단 시점의 결정에 관한 Bain and Engelhardt(1982)의 연구와 시험표본수의 결정에 관한 Ebrahimi(1988)의 연구 등과, 가속상황하에서의 기존연구로서 지수수명분포하에서 주어진 스트레스 수준과 시험제품의 할당비율하에서 시험종결시간만을 결정하는 윤원영과 반한석(1994)의 연구 등이 있다. 그리고 Yang (1994)과 Yang and Jin(1994)은 처음으로 각 스트레스에서 다른

† 이 논문은 1998학년도 동아대학교 학술연구조성비(공모과제) 에 의하여 연구되었음.

시험종결시간을 가지는 가속수명시험계획을 설계하였는데 스트레스 수준의 수가 각각 3, 4개이고, 최적화 기준의 일부분을 사용조건하의 평균에 대한 최우추정량의 점근적 분산으로 삼고 있다. 따라서 설계된 시험계획은 스트레스 수준의 수가 너무 많아서 시험의 실시가 용이하지 않으며 최적화 기준의 일부분이 수명시험에서 관심의 대상이 되는 저 분위수가 아닌 평균이고 목적함수를 동일단위로 취급할 수 없는 각 스트레스별 시험종결시간의 합과 점근적 분산의 가중합으로 삼고 있는 약점을 가지고 있다. 또한 제약식과 결정해야 되는 변수가 너무 많아서 설계된 최적계획의 엄밀성이 떨어지고 있으며 고려된 비용모형이 현실적이지 못하다.

따라서 본 연구에서는 기존의 통계적 효율만을 고려한 연구들을 보다 확장하여 제품의 수명이 위치척도군(location-scale family) 형태의 수명분포를 따르고, 시험기간 동안 일정하게 스트레스를 가하여 미리 정해진 시간까지만 시험하는 제 I 종 종결(Type I Censoring)하에서 고 · 저 두 스트레스하에서 시험되는 경제적 최적계획(economic optimal plan)을 개발하고자 한다.

2. 가속수명시험 모형

2.1 가속수명시험 계획의 종류

현재까지 개발되어 사용되고 있는 일정스트레스하에서의 가속수명시험 계획은 스트레스 수준수 및 설계방법 등에 따라서 다음과 같이 구분된다(서순근, 조호성, 1996; Meeker, 1984; Meeker and Nelson, 1975; Nelson and Kielpinski, 1976; Nelson and Meeker, 1978; Seo and Yum, 1991).

(1) 최적계획(optimum plan)

저 · 고의 두 스트레스(사용조건보다는 높은) 수준에서의 시험이 요구되며 설계기준을 최소화하는 저 스트레스 수준과 각 스트레스에서 할당되는 시험제품비율을 결정하고 있다. 통계적 효율이 가장 높은 계획이라는 의미에서 최적계획이라고 불린다.

(2) 표준계획(standard and best standard plans)

1970년대에 현장에서 주로 사용되는 시험계획으로 등간격을 가지는 두 개 이상의 스트레스 수준에서 시험되며 시험제품 할당비율은 동일하다. 또한 설계기준을 최소화하는 저 스트레스 수준만을 결정할 수 있으나 낮은 통계적 효율성으로 인하여 학문적 관심이 되지 못하고 있다(Kielpinski and Nelson, 1975).

(3) 실용적 또는 절충형 계획(practical or compromise plan)

최적계획은 통계적으로 효율성은 높지만 두 스트레스에서만 시험하기 때문에 모수와 스트레스 사이의 이차 이상의 모형에 관한 적정성 여부에 대한 검토가 불가능하며 저 스트레스 수준이 높아서 외삽(extrapolation in stress)의 효과가 클 경우가 발생할 수 있으므로 이를 보완한 세 스트레스 수준에서 시험되는 실용적 계획이 개발되었다. 그러나 실용적 계획은 통계적 효율성이 떨어지며 설계기준을 최소화하는 세 스트레스 수준에서의 시험제품 할당비율을 엄밀하게 결정할 수 없는 약점을 가지고 있다(Meeker and Hahn, 1985).

상기의 통계적 최적 및 실용적 계획은 두 또는 세 스트레스 수준에서 동일한 시험종결시간을 사용하고 있으나 시험단위의 수가 시험장치의 수보다 너무 많거나 시험장소가 협소하여 전 스트레스 수준에서 동시에 시험하는 것이 불가능할 경우에는 스트레스 수준에서의 시험종결 시간을 다르게 설정하는 것이 즉, 상대적으로 시험비용이 저렴하고 고장확률이 낮은 저 스트레스 수준에서의 시험시간을 길게 설정하는 것이 충분한 고장개수를 얻을 수 있으며 고 스트레스 수준에서 시험시간을 짧게 설정하는 것이 필요없는 시험시간 및 비용의 낭비를 줄일 수 있는 가능성이 높다.

2.2 가속수명시험 모형

본 연구에서 제시하고자 하는 가속수명시험 모형에 대한 가정은 다음과 같다.

(1) 임의의 스트레스(s)에서 대수수명($Y=\ln T$)은 위치척도군 형태의 수명분포(지수, 와이블분포일 때는 극소치(smallest extreme value) 분포를, 정규분포일 때는 대수정규분포)를 따르며 각각의 확률밀도함수는 다음과 같다.

와이블분포($\delta=1$이면 지수분포) :

$$f_T(t)=\frac{\delta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\delta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\delta}\right] \tag{1}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma}\exp\left[\frac{y-\mu}{\sigma}-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

단, $\mu=\ln\theta$, $\sigma=\frac{1}{\delta}$

대수정규분포 :

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}\exp\left[-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2}$$

(2) 척도모수(scale parameter : σ)는 스트레스에 관계없이 일정하다.

(3) 위치모수(location parameter : μ)는 식 (3)과 같이 스트레스 s(또는 s의 함수)의 선형함수이다.

$$\mu(s)=\beta_0+\beta_1 s \tag{3}$$

즉, 신뢰성 물리를 통하여 입증된 대부분의 모형, 즉 아레니우스(Arrhenius) 모형과 역거듭제곱(inverse power law) 모형 등이 여기에 속한다.

(4) 시험단위의 수명은 서로 독립적이다.

그리고 본 연구에서 제시하고자 하는 가속수명시험은 다음

과 같은 조건하에서 수행된다.

(1) 시험되는 스트레스 수준 수는 저·고 스트레스(s_1, s_2)로 2개이고, 각 수준에서 스트레스는 일정하게(constant stress) 가해진다.

(2) 각 스트레스에 할당되는 시험단위($n_i = N \cdot \alpha_i$, $i=1, 2$, N: 총 시험단위의 수)는 동시에 각 스트레스 별로 규정된 시험종결시간(t_{c_i})까지 시험되고, 총시험시간(total time on test)은 $\tau = t_{c_1} + t_{c_2}$이다.

(3) 고 스트레스 수준(s_2)은 스트레스와 모수의 관계식(즉, 식 (3))이 성립되는 범위를 고려하여 미리 정해진다.

가속상황하에서 일반적으로 관심의 대상이 되는 사용 스트레스(s_0)하에서 수명의 분위수 t_q나 대수수명의 분위수 y_q는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y_q = \ln t_q = \beta_0 + \beta_1 s_0 + \sigma u_q \tag{4}$$

$$\text{단,}\quad u_q = \begin{cases} \ln[-\ln(1-q)], & ;\text{지수/와이블 분포} \\ z_q, & ;\text{대수정규분포} \end{cases}$$

z_q: 표준정규분포의 제 $100 \times q$분위수

β_0, β_1, σ의 추정방법으로 일치성(consistency), 점근적 효율성(asymptotic efficiency), 정규성(normality)의 바람직한 대표본 성질을 가지는 최우추정법(maximum likelihood estimation)이 이용되므로, 스트레스 s_i와 주어진 시험종결시간 t_{c_i}하에서의 j번째 시험단위의 대수우도방정식은 다음과 같다.

$$L_{ij} = I(t_{ij}) \ln f(t_{ij}) + [1 - I(t_{ij})] \ln[1 - F(t_{ci})]$$

$$\text{단, } I(t_{ij}) = \begin{cases} 1, & t_{ij} \le t_{c_i} \\ 0, & t_{ij} > t_{c_i} \end{cases}$$

따라서 N개의 독립 관측치들의 표본 대수우도함수는 다음과 같다.

$$L_0 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n_i} L_{ij}$$

통계적 효율성을 나타내는 설계기준으로서 β_0, β_1, σ(지수분포는 β_0, β_1만)의 최우추정량에 대한 Fisher 정보량을 이용한 $\hat{y}_q$(y_q의 최우추정량)의 점근적 분산(asymptotic variance)이 선택될 수 있으므로 세 수명분포의 모수에 대한 최우추정량의 Fisher 정보량 행렬은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다(Kielpinski and Nelson, 1975; Meeker, 1984; Nelson and Kielpinski, 1976; Seo and Kim, 1996).

$$F = \frac{N}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i A(t_{c_i}) & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i A(t_{c_i}) s_i & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i B(t_{c_i}) \\ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i A(t_{c_i}) s_i & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i A(t_{c_i}) s_i^2 & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i B(t_{c_i}) s_i \\ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i B(t_{c_i}) & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i B(t_{c_i}) s_i & \sum_{i=1}^{2} \alpha_i C(t_{c_i}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

단, 지수분포인 경우: 3행과 3열을 제외하고,

$$A(t_{c_i}) = 1 - \exp\left(-\frac{t_{c_i}}{\theta_i}\right).$$

Weibull 분포의 경우:

$$A(t_{c_i}) = G(z_{c_i})$$

$$B(t_{c_i}) = \int_{-\infty}^{z_{c_i}} (1+z) g(z)\, dz$$

$$C(t_{c_i}) = \int_{-\infty}^{z_{c_i}} (1+z)^2 g(z)\, dz$$

$$\text{단, } z_{c_i} = \frac{\ln t_{c_i} - \mu(s_i)}{\sigma}$$

$G(\cdot)$는 극소치분포의 누적분포함수

대수정규분포의 경우:

$$A(t_{c_i}) = \Phi(z_{c_i}) - \phi(z_{c_i}) \left[z_{c_i} - \frac{\phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right]$$

$$B(t_{c_i}) = -\phi(z_{c_i}) \left[1 + z_{c_i} \left\{ z_{c_i} - \frac{\phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right\} \right]$$

$$C(t_{c_i}) = 2\Phi(z_{c_i}) - z_{c_i} \phi(z_{c_i}) \left[1 + z_{c_i}^2 - \frac{z_{c_i} \phi(z_{c_i})}{1 - \Phi(z_{c_i})} \right]$$

단, $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$는 표준정규분포의 확률밀도함수 및 누적분포함수

3. 경제적 가속수명시험의 설계

경제적 가속수명시험에 고려되는 시험비용으로는 시험단위의 수, 스트레스 수준, 시험시간에 관련 없는 고정비(c_1), 시험단위의 수에 비례하는 비용(c_2), 시험시간과 스트레스 수준에 따라 변하는 가변비용($c_3(t, s)$) 등이 포함되며, 사용조건하에서 경제성을 고려한 수명시험의 설계에서도 세 비용요소가 고려되고 있다(Bain and Engelhardt, 1982; Ebrahimi, 1988). 그리고 윤원영과 반한석(1994)은 본 연구에서 설계되는 가속수명 시험계획과는 다르게 지수수명분포하에서 세 비용요소를 포함한 목적함수하에서 최적화 절차를 단순화시키기 위하여, 주어진 스트레스 수준과 시험제품할당비율하에서 시험종결시간만을 결정하고 있으며 스트레스 수준에 관계없이 c_3를 동일하

게 취급하고 있다.

본 연구에서는 기존의 가속수명시험의 경제적 설계의 한계를 보완하기 위하여 단위 척도가 다른 비용과 통계적 효율을 동시에 포함한 목적함수를 다음과 같은 두 가지 형태로 설정하였다. 첫번째 목적함수는 통계적 효율의 측도와 투입된 시험비용의 비로써 설정할 수 있는데, Chernoff(1962)와 윤원영과 반한석(1994)은 지수분포를 따를 경우 평균의 최우추정량에 대한 Fisher 정보량과 시험비용의 비로써 본 연구와 유사한 형태의 목적함수를 설정하고 있다. 또 하나의 유사한 형태로서 Fisher 정보량 행렬의 역행렬이 모형 모수들의 일반화 분산(generalized variance) 행렬이 되므로 Fisher 정보량 행렬의 행렬식과 비용의 비로써 목적함수를 설정할 수 있다. 그러나 본 연구에서는 사용조건하에서 관심 있는 분위수의 최우추정량($\hat{y}_q$)의 점근적 분산이 가속수명시험의 적절한 설계기준이 되고 있으므로 통계적 효율성만을 고려한 최적계획(이하 SALT-1)에서의 $\hat{y}_q$의 점근적 분산과 본 연구에서의 $\hat{y}_q$의 점근적 분산의 비를 통계적 효율로 설정하여 이것과 기대시험비용과의 비를 목적함수로 설정하였는데, 이는 수명분포가 지수인 경우 윤원영과 반한석(1994)의 목적함수와 동일한 형태로 볼 수 있다.

두 번째로 설정된 목적함수는 다구치가 제시한 이차손실함수를 이용하여 통계적 효율성과 비용을 직접 결합한 형태이다. 즉, 가속수명시험의 결과로부터 추정된 설계수명의 예측오차에 따른 손실을 점근적 분산을 이용한 이차손실함수로 설정하여 생산자 비용으로 환산하는데, 최근에 그가 제안한 이차손실 함수는 샘플링 검사와 규격설정 등의 통계모형하에서의 최적화 문제에 많이 활용되고 있다(Tagaras, 1994; Tang, 1988).

두 목적함수를 채용한 최적계획(이하 전자는 EALT-1, 후자는 EALT-2)의 경제적 설계문제를 정식화하면 다음과 같다.

목적함수 <EALT-1> (단위 기대시험비용당 $\hat{y}_q$ (지수분포는 평균)의 통계적 효율)

<EALT-2> ($\hat{y}_q$의 이차손실 + 기대 수명시험 비용)

$$\text{s.t. } 0 < s_1 < 1$$
$$0 < \alpha_1 < 1$$
$$t_{c_1} + t_{c_2} = \tau = 2$$
$$s_2 = 1,\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1$$

단, 통계적 효율(eff_q) $= \dfrac{v_{opt}}{v_{ep}}$

v_{opt} : SALT-1의 $\hat{y}_q$의 점근적 분산

v_{ep} : EALT-1의 $\hat{y}_q$의 점근적 분산

식 (6)에 의하여 실제 스트레스(s')를 0과 1 사이의 값으로 표준화할 수 있으며, 결정된 표준화 스트레스는 식 (7)에 의하여 실제 스트레스로 환원될 수 있다.

$$s_i = \frac{s_i' - s_0'}{s_2' - s_0'}, \quad i = 0,\ 1,\ 2 \tag{6}$$

$$s_i' = s_i(s_2' - s_0') + s_0' \tag{7}$$

스트레스 수준을 표준화하더라도 모형의 최적화에 아무런 영향을 미치지 않으며, 이는 Seo and Yum(1991)의 부록에 자세히 증명되어 있다.

그리고 저 · 고 스트레스에서의 표준화된 시험종결시간의 합, 즉 총시험시간(τ)을 2로 설정하였는데, 이는 모든 스트레스에서 사전에 동일하게 정해진 시험종결시간을 가지는 SALT-1의 시험종결시간의 합과 같으며, SALT-1처럼 시험종결시간을 동일하게 할당하지 않고 다르게 설정하는 것이, 특히 저 스트레스에서의 종결시간은 1보다 크도록, 고 스트레스에서의 종결시간은 1보다 작도록 설정하는 것이 통계적 효율성과 경제적 측면에서 보다 나은 가속수명시험계획을 설계할 가능성이 높다. 실제 총시험시간(τ')이 정해져 있을 때 실제 시험종결시간(t_{c_i}')은 표준화 시험종결시간(t_{c_i})을 이용하여 식 (8)에 의하여 결정할 수 있다.

$$t_{c_i}' = \frac{\tau'}{2} t_{c_i}, \quad i = 1,\ 2 \tag{8}$$

3.1 기대 총 시험비용

본 연구에서 고려하고자 하는 시험비용은 앞 절에서 제시한 바와 같이 고정비 c_1, 시험단위 비례비용 c_2, 스트레스 수준에 따른 시험시간 비례 비용 $c_3(t, s)$의 세 요소로 구분되며 이들을 고려한 시험에 소요되는 총 시험비용은 식 (9)와 같다.

$$TC = c_1 + Nc_2 + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} c_3(t_{ij}, s_i) \tag{9}$$

$$\text{단, } c_3(t_{ij}, s_i) = c_u t_{ij} \exp(rs_i), \text{단 } r \ge 0 \tag{10}$$

본 연구에서는 시험시간과 스트레스 수준에 따라 변하는 비용을 식 (10)과 같이 설정하였는데, 이는 고정된 스트레스하에서 발생하는 비용은 시험시간에 비례한다고 가정할 수 있으나, 스트레스 수준을 고려하면 비례적인 관계가 있다고 보기 힘드므로 스트레스 수준에 따라 비선형적으로 증가하는 경우를 가정하여 도입하였다. 또한 식 (10)에서 $r = 0$이면 스트레스 수준과는 상관없이 단지 시험시간에만 비례하는 비용이 되므로 r의 값에 따라 다양한 경우가 포함될 수 있다.

식 (9)의 기대시험비용은 지수분포와 와이블분포 및 대수정규분포일 경우 각각 식 (11), (12), (13)이 된다.

지수분포:

$E(TC) = c_1 + Nc_2 +$

$$Nc_u \sum_{i=1}^{2} a_i \exp(rs_i)\theta_i \left[1-\exp\left(-\frac{t_{c_i}}{\theta_i}\right)\right] \quad (11)$$

Weibull 분포:

$$E(TC) = c_1 + Nc_2 +$$

$$Nc_u \Gamma\left(\frac{1}{\delta}\right) \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\theta_i}{\delta}\right) \exp(rs_i) a_i F\left[\left(\frac{t_{c_i}}{\theta_i}\right)^{\delta}, 1, \frac{1}{\delta}\right] \quad (12)$$

단, $F(x, a, b) = \frac{1}{a^b \Gamma(b)} \int_0^x x^{b-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$

; 모수가 a, b인 감마분포의 누적분포함수

대수정규분포:

$$E(TC) = c_1 + Nc_2 +$$

$$Nc_u \sum_{i=1}^{2} \exp(rs_i) a_i \left[t_{c_i} - \int_0^{t_{c_i}} \Phi\left(\frac{\ln t - \mu(s_i)}{\sigma}\right) dt\right] \quad (13)$$

3.2 통계적 효율성을 고려한 경제적 가속수명시험의 설계

지수분포일 경우 사용스트레스에서의 대수평균수명, 와이블 및 대수정규분포일 경우 대수수명의 $100 \times q$ 분위수의 추정치는 식 (4)에 의하여 식 (14)와 같이 된다.

$$\hat{y}_q = \ln \hat{t}_q = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 s_0 + \hat{\sigma} u_q \quad (14)$$

Fisher 정보량을 이용하여 사용스트레스에서의 대수수명의 분위수(지수 분포의 경우 평균수명)에 관한 세 수명분포에 대한 점근적 분산은 식 (15)에 의하여 구할 수 있다.

$$\mathrm{Avar}(\hat{y}_q) = \left[\frac{\partial y_q}{\partial \beta_0}\ \frac{\partial y_q}{\partial \beta_1}\ \frac{\partial y_q}{\partial \sigma}\right] \boldsymbol{F}^{-1} \left[\frac{\partial y_q}{\partial \beta_0}\ \frac{\partial y_q}{\partial \beta_1}\ \frac{\partial y_q}{\partial \sigma}\right]^T$$

$$= [1\ s_0\ u] \boldsymbol{F}^{-1} [1\ s_0\ u]^T \quad (15)$$

단, 지수분포의 경우 3행과 3열 제외

$\mathrm{Avar}(\hat{y}_q)$에 N/σ^2을 곱하여 N과 σ^2에 의존하지 않는 표준화한 점근분산을 식 (16)과 같이 설정할 수 있다.

$$v_{ep} = \left(\frac{N}{\sigma^2}\right) \mathrm{Avar}(\hat{y}_q)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}, & \text{; 지수분포} \\[2ex] \dfrac{f_{22}f_{33} - f_{23}^2 + 2u(f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}) + u^2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}{f_{11}f_{22}f_{33} + 2f_{12}f_{13}f_{23} - f_{11}f_{23}^2 - f_{22}f_{13}^2 - f_{33}f_{12}^2}, & \text{; 와이블분포/대수정규분포} \end{cases} \quad (16)$$

단, f_{ij} = Fisher 정보량 행렬의 i행 j열의 요소

$$u = \begin{cases} \ln[-\ln(1-q)], & \text{; 와이블분포} \\ z_q, & \text{; 대수정규분포} \end{cases}$$

SALT-1의 표준화 점근분산과 위의 점근적 분산의 비인 통계적 효율(eff_q)을 기대시험비용으로 나눈 단위기대비용당 통계적 효율 $Z(a_i, s_i, t_{c_i})$을 최대로 하기 위한 EALT-1의 설계는 앞 절에서 주어진 제약식하에서 다음의 최적화 문제로 정식화할 수 있다.

$$\text{Maximize } Z(a_i, s_i, t_{c_i}) = \frac{eff_q}{E(TC)} \quad (17)$$

식 (17)의 최적화 문제인 EALT-1의 설계를 구체적으로 서술하면 시험되는 스트레스의 수를 2로 하고, 주어진 N, s_0, s_2, τ하에서 기대시험비용당 사용조건하의 관심있는 대수수명의 q 분위수의 최우추정량($\hat{y}_q$)에 관한 통계적 효율(eff_q)을 최대로 하는 저 스트레스 수준 s_1, 시료의 저 스트레스 수준에의 할당률 $a_1(a_2 = 1 - a_1)$, s_i에서의 시험종결시간 $\{t_{c_i},\ i = 1, 2\}$를 결정한다.

그러나 식 (17)의 최적해를 구하기 위해서는 β_0, β_1, σ에 대한 사전정보가 필요하게 된다. 이들 모수들의 적절한 추정치를 얻기 위하여 임의의 시험종결시간(t_c; 여기서는 주로 1이 됨)까지 시험할 때 사용 및 고 스트레스에서의 고장확률을 각각 $P\{t \le t_c | s_0\} = P_u$, $P\{t \le t_c | s_2\} = P_h$로 사전 추정할 경우에 각각 식 (18), (19)와 같이 세 수명분포의 모수들을 사전 추정할 수 있다.

Weibull 분포($\sigma = 1$이면 지수분포):

$$\frac{\beta_0}{\sigma} = -\ln[-\ln(1-P_u)] \quad (18)$$

$$\frac{\beta_1}{\sigma} = -\frac{\beta_0}{\sigma} - \ln[-\ln(1-P_h)]$$

대수정규분포: $\frac{\beta_0}{\sigma} = -z_{P_u}$ (19)

$$\frac{\beta_1}{\sigma} = -\frac{\beta_0}{\sigma} - z_{P_h}$$

주어진 P_u, P_h에 대해서 최적 s_1과 a_1, $t_{c_i}(s_1^*, a_1^*, t_{c_i}^*)$를 찾기 위하여 Powell(1964)의 conjugate direction method를 이용한 Fortran 프로그램을 작성하였다.

3.3 이차 손실함수를 이용한 경제적 가속수명시험 계획

양불량에 의해서만 품질관리를 할 경우 규격한계 내에 포함되면 양품이라고 간주해온 기존의 잘못된 고정관념에서 탈피

표 1. 수치예를 대상으로 설계된 가속수명시험 계획

분 포		지수분포				와이블분포				대수정규분포			
		SALT-2	SALT-3	EALT-1	EALT-2	SALT-2	SALT-3	EALT-1	EALT-2	SALT-2	SALT-3	EALT-1	EALT-2
ALT 계획	s_1^*	0.6246	0.5810	0.6055	0.6093	0.6820	0.6162	0.6320	0.6338	0.4403	0.3077	0.3195	0.4326
	a_1^*	0.8167	0.7744	0.7333	0.7227	0.7096	0.7066	0.6593	0.6529	0.7423	0.7963	0.7537	0.5386
	$t^*_{c_1}$	1.0	1.6568	1.6019	1.5974	1.0	1.7581	1.7341	1.7326	1.0	1.8582	1.8449	1.3058
	v_0	90.21	68.78	69.64	69.91	119.96	74.22	75.05	75.22	14.90	7.97	8.04	13.33
	EPC ($\times 10^{-2}$)	0.2503	0.2973	0.2999	0.2998	0.2549	0.3713	0.3752	0.3751	0.2531	0.4073	0.4110	0.2823
	ETL	850.7	785.0	780.1	780.0	992.2	806.4	801.3	801.2	469.6	498.8	491.0	462.6
	ETC	399.6	441.2	431.9	430.4	392.4	435.3	426.0	425.1	395.1	458.9	450.8	396.0
실제 저스트레 적용 값들	수준(℃)	90.4	87.3	89.0	89.3	94.6	89.8	90.9	91.1	77.5	68.7	69.5	76.9
	할당수	82	77	73	72	71	71	66	65	74	80	75	54
	종결시간 (month)	6.00	9.94	9.61	9.58	6.00	10.55	10.41	10.40	6.00	11.15	11.07	7.84

EPC: 단위비용당 통계적 효율

ETL: 기대총손실 $= kv_0/N+$ ETC

ETC: 기대총시험비용 $= E(TC)$

하여 다구치는 특성치가 관리한계 내에 들어가더라도 목표치에서 벗어날수록 손실이 증가한다는 개념을 이용하여 목표치에 대한 품질 변동의 측도인 평균제곱오차(mean square error; MSE)에 비용요소를 곱하여 식 (20)과 같은 기대이차손실 개념을 도입하였다.

$$
\begin{aligned}
L &= E[L(y)] = kE[(y-m)^2] \\
&= k[\sigma^2 + (\mu - m)^2] \\
&= k\sigma^2 \qquad (\text{if } \mu = m)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

여기서, y : 품질특성의 측정치

m : 품질특성의 목표치

k : 비용요소

경제적 가속수명시험의 설계의 기준으로 EALT-1보다 경제성 개념에 더욱 부합되는 기준을 설정하기 위하여, 본 연구에서는 기업 및 연구소에서 신뢰성 평가에 활용되는 가속수명시험을 통하여 추정하고자 하는 설계수명 y_q가 참값에서 벗어날수록 생산자에게 손실(신뢰성관리체제나 보증체제의 관리 · 운영비용 등)이 발생한다는 가정하에서 예측오차의 측도인 MSE의 근사값인 점근적 분산을 다구치의 이차손실함수 형태을 이용하여 식 (21)과 같이 시험비용과 동일 단위로 환산하였다.

$$
\begin{aligned}
L &= kE[(\hat{y}_q - y_q)^2] \\
&\approx k \cdot Avar(\hat{y}_q)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

즉, 대표본 특성인 점근적 분산을 이용한 생산자의 기대손실을 설정하여 가속수명시험의 통계적 효율성을 비용으로 환산하였다. 그러나 이 계획에서의 목적함수는 기대손실과 시험비용의 합으로 표시되기 때문에 앞 절에서의 EALT-1과는 달리 시험단위수 N에 대한 의존성이 높으며 손실계수 k의 추정이 필요하다. 식 (21)의 기대손실과 기대시험비용의 합이 계획된 가속수명시험에 의하여 발생되는 생산자 입장의 총기대손실이 되므로 EALT-2의 설계는 앞 절에서 주어진 제약식하에서

다음과 같은 최적화 문제로 정식화할 수 있다.

Minimize

$$L(\alpha_i, s_i, t_{c_i}) = kAvar(\hat{y}_q) + E[TC], \qquad i=1,2 \tag{22}$$

그러나 상기에서 언급한 바와 같이 EALT-1에 비해 EALT-2의 손실계수 k는 시험단위의 특성(고가일수록 큰 값)에 따라 달라지는 값으로서 시험자가 과거자료나 유사 제품 또는 경쟁사 등에 관한 사전정보를 바탕으로 추정하여야 하지만 그 값을 추정하기는 쉽지 않으므로 k의 변화에 따른 민감도분석을 4.2절에서 실시하였다.

식 (22)의 최적화 문제는 앞 절에서와 같이 Powell(1964)의 conjugate direction method를 이용하여 가속수명시험 계획의 s_1^*, α_1^*, $t_{c_i}^*$를 설정할 수 있다.

4. 수치예 및 민감도 분석

4.1 수치예

본 연구의 경제적 가속수명시험 계획은 설계모수, 비용 및 표본크기에 따라 시험자가 용이하게 사용할 수 있는 표나 그림의 제공은 거의 불가능하므로 Meeker and Hahn(1985)이 제시한 수치예를 통하여 본 연구에서 제시된 가속수명시험 계획의 유용성을 파악하고자 한다.

제시된 가속수명시험과 비교하기 위하여 통계적 효율성만 고려하여 저 스트레스 수준과 할당비율만을 결정하는 최적계획(SALT-1) 및 이 두 가지 설계변수외에 시험종결시간까지 결정하는 최적계획(SALT-2)(Seo and Kim, 1996)과 본 연구의 두 가지 모형, 즉 기대시험비용당 통계적 효율을 고려한 경제적 최적계획(EALT-1)과 손실함수를 도입한 경제적 최적계획(EALT-2)의 각각에 대해서 수치예를 대상으로 가속수명시험계획을 설계하고자 한다.

제시된 수치예에서의 대상 제품의 정상 사용 온도는 50℃이고 120℃까지는 수명과 스트레스 사이의 관계가 아레니우스 모형을 따른다고 알려져 있고, 가속수명시험을 통하여 사용조건하에서 제 10백분위수(지수분포의 경우 평균)를 추정하고자 한다. 과거의 자료로부터 이 제품이 6개월 만에 사용조건(50℃)과 120℃에서 고장날 확률은 각각 0.001과 0.9로 추정되며, 시험에 소요되는 비용은 c_u를 1(EALT-2에서는 c_u/σ^2를 1)로 했을 때 $c_1=10c_u$, $c_2=3c_u$이고 $r=0.1$, 손실계수 $k=500$으로 알려져 있다. 대상 시험단위수는 100이며 총시험종료시간을 12개월로 설정하였을 경우에 도출된 4가지 가속수명시험 계획들을 <표 1>에 정리하였다.

<표 1>의 수치예의 결과를 요약정리하면 다음과 같은 사실을 파악할 수 있다.

① EALT-1과 EALT-2의 경우 지수와 와이블분포의 결과가 거의 유사하지만 대수정규분포의 경우는 상당한 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 대수정규분포를 따를 경우 EALT-2의 점근적 분산의 값이 다른 경우들보다 작기 때문에 이로 인한 이차 손실비용이 기대시험비용($E[TC]$)보다 상대적으로 적기 때문이다.

② SALT-1과 비교하면 EALT-1과 EALT-2는 시험비용적인 측면에서 높지만, 기대비용당 통계적 효율 또는 기대

표 2. $\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.9$일 경우의 감도분석(지수분포)

P_u \ P_h	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0.0003	1.02444	1.03462	1.04684	1.05464	1.06409
	1.01442	1.01853	1.02289	1.02532	1.02827
0.0005	1.00439	1.00885	1.01553	1.02048	1.02783
	1.00317	1.00459	1.00716	1.00923	1.01295
0.0010	1.00642	1.00174	1.0	1.00061	1.00500
	1.00477	1.00129	1.0	1.00059	1.00369
0.0030	1.09833	1.07230	1.05132	1.04251	1.03927
	1.04240	1.02718	1.01571	1.01143	1.00968
0.0050	1.19560	1.15325	1.11769	1.10187	1.09249
	1.07208	1.04957	1.03173	1.02402	1.01871

(주) EALT-1/EALT-2

표 3. $\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.9$, $q=0.1$일 경우의 감도분석(와이블분포)

P_u \ P_h	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0.0003	1.07389 1.04233	1.08026 1.04371	1.08529 1.04313	1.08602 1.04140	1.08010 1.03599
0.0005	1.02257 1.01117	1.02646 1.01303	1.02998 1.01413	1.03088 1.01420	1.02780 1.01301
0.0010	1.00105 1.00110	1.00028 1.00000	1.0 1.0	1.00000 1.00000	1.00026 1.00052
0.0030	1.13277 1.06262	1.11238 1.04656	1.09465 1.03249	1.08677 1.02531	1.08335 1.01915
0.0050	1.29807 1.12120	1.25857 1.09271	1.22198 1.06675	1.20395 1.05357	1.19108 1.03962

(주) EALT-1/EALT-2

표 4. $\hat{P}_u=0.001$, $\hat{P}_h=0.9$, $q=0.1$일 경우의 감도분석(대수정규분포)

P_u \ P_h	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99
0.0003	1.14056 1.05946	1.11093 1.00735	1.07800 1.00389	1.05548 1.00208	1.02599 1.00496
0.0005	1.05733 1.05221	1.04173 1.00355	1.02702 1.00140	1.01800 1.00074	1.00867 1.00734
0.0010	1.01319 1.04651	1.00327 1.00100	1.0 1.0	1.00022 1.00079	1.01097 1.00973
0.0030	1.11816 1.00458	1.08738 1.00308	1.07077 1.00240	1.06976 1.00424	1.08467 1.01599
0.0050	1.25607 1.00701	1.20052 1.00547	1.16152 1.00518	1.14924 1.00979	1.15369 1.01987

(주) EALT-1/EALT-2

손실 측면에서 우수함을 파악할 수 있다.

③ SALT-2와 비교하면 EALT-1과 EALT-2의 계획들은 통계적 효율(v_0) 측면에서 크게 차이가 나지 않으면서 낮은 비용으로 시험할 수 있음을 알 수 있다.

④ 수명분포가 지수나 와이블분포를 따를 경우에 EALT-1과 EALT-2 중 어느 방법을 채택하더라도 큰 차이는 없으나, 대수정규분포일 경우는 설계시 적절한 목적함수를 설정하고 이에 보다 적합한 EALT-1 또는 EALT-2를 채택할 수 있다.

4.2 민감도 분석

본 연구에서 제시한 경제적 가속수명시험 계획은 P_u와 P_h의 정확한 추정이 가능하다는 가정하에서 도출한 준최적계획(locally optimal design)(Chernoff, 1953; Chernoff, 1962)이기 때문에 실제로 P_u, P_h를 오추정($\hat{P}_u$, $\hat{P}_h$)하여 모수들의 추정에 오차가 발생할 경우에 실제 적용한 계획이 최적이 아닐 수도 있다. 따라서 모수가 오추정되었을 때의 위험도를 알아보기 위하여 앞 절의 예제를 통하여 민감도 분석을 실시하였다.

각 수명분포에 대해서 민감도 분석을 수행한 일부가 <표 2~4>에 주어져 있으며, 여기서의 민감도는 P_u, P_h를 각각 0.001과 0.9로 추정시 P_u의 참값이 0.0003~0.005, P_h의 참값이 0.7~0.99 범위내에 있을 때 모형 1의 경우 단위 기대시험비용당 통계적 효율의 비(참인 경우/오추정인 경우)를, 모형 2의 경

표 5. k의 변화에 따른 가속수명시험계획의 변화 양상(EALT-2)

구 분	지수분포					와이블분포					대수정규분포				
k	250	350	500	750	1000	250	350	500	750	1000	250	350	500	750	1000
s_1^*	0.632	0.620	0.609	0.601	0.596	0.653	0.640	0.634	0.628	0.626	0.473	0.450	0.433	0.423	0.421
α_1^*	0.674	0.701	0.723	0.743	0.750	0.597	0.627	0.653	0.671	0.681	0.529	0.492	0.539	0.606	0.645
$t_{c_1}^*$	1.539	1.572	1.597	1.611	1.623	1.703	1.725	1.733	1.741	1.743	0.985	1.200	1.306	1.322	1.333
v_0	73.47	71.02	69.91	69.29	69.14	78.81	76.26	75.22	74.67	74.52	17.68	15.47	13.33	12.12	11.60
$L(\alpha_i, s_i, t_{c_i})$	602.3	674.3	780.0	953.9	1127.	610.7	687.7	801.2	988.5	1174.	425.8	441.9	462.6	494.0	523.3

우 기대손실의 비(오추정인 경우/참인 경우)를 나타낸다. 분석 결과를 정리하면 P_u, P_h를 오추정하였을 때 P_u, P_h의 참값이 각각 약 300%와 20% 범위내에 있다면 기대시험비용당 통계적 효율의 비는 지수분포, 와이블분포, 대수정규분포의 경우 각각 최대 20%, 30% 26% 정도의 변화가 있음을 알 수 있다. 하지만 이는 P_u를 너무 낮게 오추정한 경우(즉, 20%) 외에는 민감도가 크지 않으므로 P_u의 과소 추정에 주의를 한다면 본 연구의 시험계획을 충분히 적용할 수 있음을 파악할 수 있었다.

EALT-2는 각 수명분포에 대해서는 감도의 최대변화값이 각각 7%, 12%, 6% 정도로 EALT-1보다는 큰 영향이 없음을 파악할 수 있으므로 실제로 어느 정도 오추정되더라도 본 연구의 시험계획을 충분히 활용할 수 있음을 알 수 있다.

그리고 EALT-2의 경우 대상 제품의 특성에 따라 결정되는 손실계수 k값의 변화에 따른 최적계획의 변화 양상을 조사하기 위하여 수치예를 대상으로 도출한 결과를 <표 5>에 예시하였다. <표 5>에서 k값이 변하더라도 가속수명시험계획의 변화가 크지 않음을 파악할 수 있으며, 총 기대손실만이 k값이 증가함에 따라 크게 증가함을 알 수 있다.

5. 결 론

한정된 사용기간 동안 거의 고장나지 않는 고 신뢰성 제품의 수명특성을 파악하기 위하여 일반적으로 가속수명시험이 적용되는데, 지금까지 개발된 대부분의 가속수명시험 계획들은 통계적 효율성만을 고려하여 개발되었다. 그러나 단지 통계적 효율성만을 강조할 경우 시험비용이 과다 투입될 수 있으므로, 본 연구에서는 경제적 및 통계적인 측면을 동시에 고려한 가속수명시험 계획을 개발하였다.

본 연구에서 제시한 경제적 가속수명시험 계획은 기대시험비용당 통계적 효율을 고려한 EALT-1과 다구치의 이차손실함수를 도입하고 이를 기대시험비용과 직접 결합한 EALT-2의 두 가지인데, 이 계획들을 설계할 수 있는 전산프로그램을 작성하였으며 제시된 계획의 유용성을 보여주기 위하여 수치예에 적용하고 통계적 측면만 고려한 기존의 두 가지 최적 계획과 비교 분석하였다. 그리고 설계 모수들의 오추정에 따른 영향을 파악하기 위하여 수치예를 대상으로 민감도 분석을 실시하였는데 EALT-2의 경우는 설계모수들의 오추정에 상당히 둔감한 반면, EALT-1의 경우 다소 민감하였지만 P_u의 과소 추정에 주의한다면 충분히 적용할 수 있음을 파악하였다.

그리고 본 연구에서 제시한 두 가지 계획을 비교해 보면 EALT-1의 경우 표본크기 N의 의존도가 높지 않으나, EALT-2의 경우 경제성 기준에 더욱 부합되는 시험계획이지만 표본크기뿐만 아니라 손실계수 k에 의존하므로 사전에 적절한 손실계수의 결정이 필요하다. 이에 따라 k값의 변화에 따라 가속수명시험 계획이 어떻게 변화하는 지를 수치예를 대상으로 민감도 분석을 실시하였다. 그리고 수치예의 분석결과를 보면 실제 수명분포가 지수나 와이블분포일 경우 두 가지 경제적 계획 중 어떤 것을 채택하더라도 큰 차이는 없으나, 대수정규분포일 경우 기대시험비용당 통계적 효율과 이차손실함수를 이용한 기대손실의 설계기준으로서의 적합도 및 중요도에 따라 적절한 가속수명시험 계획을 채택할 수 있음을 파악하였다.

참고문헌

서순근, 조호성 (1996), 대수정규분포와 간헐적 검사하에서의 가속수명시험방식의 설계, *품질경영학회지*, 24, 25-43.

윤원영, 반한석 (1994), 일정스트레스 가속수명시험의 경제적 설계, *한국경영과학회지*, 19, 145-152.

Bain, L. J. and Engelhardt, L. J. (1982), Determination of censoring levels to minimize for expected cost of the equipment for selected distribution, *IAPQR Transactions*, 7, 65-74.

Chernoff, H. (1953), Locally optimal designs for estimating parameters, *Ann.*

Math. Statist, 24, 586-602.

Chernoff, H. (1962), Optimal accelerated life designs for estimation, *Technometrics*, 4, 381-408.

Ebrahimi, N. (1988), Determining the sample size for a hybrid life test based on the cost function, *Naval Research Logistics*, 35, 63-72.

Kielpinski, T. J. and Nelson, W. (1975), Optimum censored accelerated life tests for normal and lognormal life distribution, *IEEE Trans. on Reliability*, **R-24**, 310-320.

Meeker, W. Q. (1984), A comparison of accelerated life test plans for weibull and lognormal distributions and type I censoring, *Technometrics*, 26, 157-171.

Meeker, W. Q. and Hahn, G. J. (1985), How to plan an accelerated life test-some practical guidelines, *ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques*, 10.

Meeker, W. Q. and Nelson, W. (1975), Optimum accelerated life tests for the weibull and extreme value distribution, *IEEE Trans. on Reliability*, **R-24**, 321-332.

Nelson, W. and Kielpinski, T. J. (1976), Theory for optimum censored accelerated life tests for normal and lognormal life distribution, *Technometrics*, 18, 105-114.

Nelson, W. and Meeker, W. Q. (1978), Theory for optimum accelerated censored life tests for weibull and extreme value distributions, *Technometrics*, 20, 171-177.

Powell, M. J. D. (1964), An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Computer Journal*, 7, 155-162.

Seo, S. K. and Kim, K .S. (1996), Optimal design of accelerated life tests with different censoring times,*J. of Korean Society for Quality Management*, 24, 44-58.

Seo, S. K. and Yum, B. J. (1991), Accelerated life test plans under intermittent inspection and type I censoring: the case of weibull failure distribution, *Naval Research Logistics*, 38, 1-22.

Tagaras, G. (1994), Economic acceptance sampling by variables with quadratic quality cost, *IIE Transactions*, 26(6), 29-35.

Tang, K. (1988), Economic design of product specifications for a complete inspection plan, *International Journal of Production Research*, 26, 203-217.

Yang, G. B. (1994), Optimum constant-stress accelerated life-test plans, *IEEE Trans. on Reliability*, **R-43**, 575-581.

Yang, G. and Jin, L. (1994), Best compromise test plans for weibull distributions with different censoring times, *Quality and Reliability Engineering International*, 10, 411-415.