Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 4, pp. 466-475, December 1999.

# 다수의 도전장비 존재시 설비의 경제적 수명과 최적 대체결정을 위한 동적 계획모형†

김태현 · 김승권

고려대학교 산업공학과

# Dynamic Programming Model for Optimal Replacement Policy with Multiple Challengers

Tae-Hyun Kim · Sheung-Kown Kim

A backward Dynamic Programming(DP) model for the optimal facility replacement decision problem during a finite planning horizon is presented. Multiple alternative challengers to a current defender are considered. All facilities are assumed to have finite service lives. The objective of the DP model is to maximize the profit over a finite planning horizon. As for the cost elements, purchasing cost, maintenance costs and repair costs as well as salvage value are considered. The time to failure is assumed to follow a weibull distribution and the maximum likelihood estimation of Weibull parameters is used to evaluate the expected cost of repair. To evaluate the revenue, the rate of operation during a specified period is employed. The cash flow component of each challenger can vary independently according to the time of occurrence and the item can be extended easily. The effects of inflation and the time value of money are considered. The algorithm is illustrated with a numerical example. A MATLAB implementation of the model is used to identify the optimal sequence and timing of the replacement.

## 1. 서 론

현대 산업에서 노후화가 일어나는 장비에 대한 최적 교체시점을 찾는 연구는 여러 부문에 있어 진행되고 있으며, 특히 일부 군부대와 산업체에서는 장비교체를 위한 전담부서까지 마련되어 있다. 그러나 대개의 경우, 장비의 높은 초기 투자비용, 장비교체시 발생하는 서비스의 중단과 그에 따른 수익의 상실만을 고려하고 있는 실정이며 상대적으로 장비의 노후화로 인한 유지비용 상승, 수리비용 증가, 잔존 가치의 하락 등과 같은 손실요인은 인식하지 못하고 있다. 일반적인 투자대안의 결정에서와 같이 교체결정에 있어서도 여러 가지 논리적인 방법들이 적용될 수 있지만, 무엇보다 자산의 경제적인 운영관점에서 의사결정이 이루어져야 한다.

사실 교체분석을 통해 지대한 비용절감과 수익의 극대화가 가능함에도 불구하고 여러 기관들이 최적 교체시점이 지나도록 장비교체를 연기하는 데는 매몰비용이 미치는 심리적인 영향 탓도 있다. 그러나 현유장비(defender)의 교체대안으로 다수의 도전장비(challenger)가 존재할 경우, 특히 물리적인 수명보다 세법상에 규정된 회계연수를 고려해야 하는 장비인 경우, 현유장비와 다수 도전장비 간의 유지 또는 교체정책에 따른 경상수익의 비교를 통해 최적의 교체정책을 수립하는 것이 바람직하다.

그러나 이러한 정책을 수립함에 있어 무엇보다 중요한 것은 각 장비운영에 따른 현금흐름의 패턴이다. 대개 현실 세계의 현금흐름은 장비의 종류와 가동률에 따라 그 형태가 결정되는데, 장비의 가동률은 매 기간 일정한 경우도 있지만 사용환경에 따라 기간별로 특정한 주기를 가지는 경우도 있다. 예컨대 계절별 가동률이 달라질 경우, 계절에 따라 특정한 현금흐름의 차이가 존재할 뿐만 아니라, 장비교체시 발생하는 기회 손

† 본 연구는 고려대학교 교내 특별 연구비(1996)의 지원에 의한 연구임.

실 비용도 계절에 영향을 받는다.

따라서 본 연구의 목적은 현유장비의 교체대안으로 다수의 도전장비 존재시 계절에 따른 장비별 가동률과 법정 내용연수를 고려하여 최적 교체정책 결정을 위한 의사결정 모형을 수립하는 것이다. 그리고 본 연구는 현장(field)에서 응용하기에 적합한 PC(personal computer)기반의 동적 계획모형을 수립하였다. 제시한 모형은 렌터카 업체의 차량교체 정책결정을 위한 문제에 적용해 보았다. 이 모형의 실험을 통하여 일반 영리 산업체의 장비를 실험대상으로 계절적인 요인에 의한 수익의 변화가 최적의 교체정책결정에 미치는 영향과 경제적 환경의 변화에 따른 민감도분석을 통해 교체정책의 변화를 살펴본다.

## 2. 기존 연구의 고찰

장비교체 문제는 지난 50년 동안 수 많은 산업체 및 군부대의 주요 관심사 중 하나로써 많은 사람들에 의해 지속적인 연구가 진행되어 왔다. 이 문제의 연구에 관한 실질적 업적은 MAPI (Machinery and Allied Products Institute)의 연구책임자였던 Terborgh(1949)로부터 시작됐다. 그는 MAPI의 연구과제로 기계교체 문제를 다루면서 동적 장비정책(Terborgh, 1949), MAPI 대체편람(MAPI Replacement Manual) 등 장비교체에 관한 중요한 저서를 남겼으며, 최근에 장비교체 문제에서 사용되는 현유장비와 도전장비라는 용어도 고안하였다. 당시 Terborgh가 제시한 모형은 현유장비에 비해 도전장비가 가지는 우월성을 고려한 것으로, 도전장비는 현유장비에 비해서 앞으로 매 기간의 현금흐름에 영향을 주는 여러 가지 이점을 가질 수 있으며, 이런 이점은 비용의 감소나, 서비스의 향상을 통한 수익의 증가를 통하여 이루어질 수 있다고 보았다. 그러나 이 모형은 현재, 미래 도전장비의 교체주기를 일정하게 보는 제한적 모형이었다. Bellman(1955)은 동적 계획법을 사용해서 장비교체 문제에 관한 수학적 모형을 수립하였다. 이때까지만 해도 장비교체 문제의 주 관심사는 최적의 교체시점을 찾는 것이었다.

그러나 Sethi and Mortan(1972)에 의해 폭넓은 시각에서의 접근이 이루어졌다. 이들이 제시한 모형은 Terborgh의 문제를 일반화 시켰을 뿐만 아니라 최적의 교체시점과 더불어 선택된 장비에 대한 최적의 예방정비정책도 함께 제시하였다. 물론 예방정비정책에 관한 연구가 처음 이루어 진 것은 아니지만 교체정책과 예방정비정책을 동시에 제시한 것은 처음이었다. Sethi and Chand (1979)가 제시한 계획기간의 점진적 증가를 통한 장비대체정책은 Wagner and Whitin(1958)이 동적 로트(lot) 사이즈 모형에서 제시했던 forward algorithm을 기계교체 문제에 응용한 것이다.

원래 forward algorithm은 재고관리정책을 위한 것으로써 고객의 수요를 만족시키면서 가장 경제적인 재고관리계획을 결정짓기 위해 제안된 것이다. 장비교체 문제는 이런 재고관리 문제의 변용으로도 볼 수 있는데, 장비의 최적 구입시점은 로트의 최적 생산시점으로, 제품생산에 따른 초기 준비비용, 생산비용 그리고 재고비용은 각각 장비운영에 따른 구입비용, 유지비용 그리고 시간에 따른 장비의 감가상각액으로 볼 수 있다. Sethi와 Chand가 제시한 해법은 이미 재고관리 문제에 적용된 forward algorithm이 장비교체 문제에도 유용하게 응용될 수 있다는 것을 보여 주었다. 또한 단일 장비교체 모형의 경우, 장비의 첫번째 최적 교체시점이 계획기간의 증가에 상관없이 동일하다는 것을 증명하였는데, 사실 이 해법이 가지는 더 큰 의미는 이러한 미래에 발생할 모든 현금흐름을 예측하지 않아도 되는 현실적인 가정을 포함했다는 것이다. Oakford, Lohmann and Salazar(1984)는 단일 현유장비에 복수 도전장비 모형을 다루었다. 특히 이들이 다룬 모형은 현유장비와 현 도전장비, 현 도전장비와 미래의 도전장비 간에 발생하는 현금흐름 사이에는 어떤 함수적인 관계식이 성립한다고 보았다. 고전적인 연구는 주로 분석기간이 무한한 경우를 가정하여 각 도전장비에 발생할 현금흐름이 동일하게 반복된다는 가정하의 연구가 주류를 이루고 있어서 가령 같은 모델의 장비일 경우, 올해 구입해서 1년을 사용하나 내년에 구입해서 1년을 사용하나 동일한 현금흐름이 발생한다고 보았다. 이를 현금흐름도로 나타내 보면 다음의 <그림 1>과 같다. <그림 1>에서 1의 현금흐름을 $A$, 2의 현금흐름을 $B$라고 할 때, 두 현금흐름 $A$, $B$를 함수적인 관계식으로 나타내면 다음과 같다.

$$B = A \times F$$

여기서 $F$는 현금흐름에 대한 효과함수로써 두 현금흐름 사이의 기술적인 환경변화의 차이를 나타낸다. $F$ 값이 1인 경우가 고전적인 연구에서의 가정이며 기존 Terborgh(1949)나 Alchian(1952)은 $F$값의 선형적인 증·감만을 고려하였지만 Oakford, Lohmann 그리고 Salazar는 $F$ 값의 선형적, 지수적, 유한지수적(bounded exponential) 형태의 증·감을 고려하였다. 이는 장래 기술환경의 변화의 예측에 어려움이 있으므로 기술환경의 변화 정도에 따른 민감도분석이 필요하다는 것을 의미한다. Lohmann(1986)은 이러한 미래의 불확실한 현금흐름에 대한 몬테칼로 시뮬레이션 모형을 제시하였다.

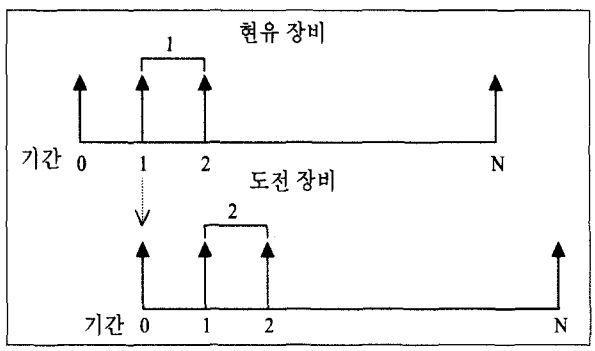


**그림 1.** 두 현금흐름 사이의 기능적 관계.

Jayabalan and Chaudhuri(1995)가 제시한 근사 최적해 알고리즘은 최적해를 구하는 과정에서 계획기간의 증가에 따라 증가

하는 계산시간을 줄이기 위해 제안되었다. 일반적으로 장비 교체 문제는 두 가지 형태로 분류 할 수 있다. 먼저 장비가 제공할 서비스기간을 무한하게 여기는 것으로 이는 장비가 미래의 어느 시점까지 서비스를 제공할지 모르기 때문에 일반적인 형태의 문제로 여겨지고 있다. 다음은 장비가 제공할 서비스 기간을 유한하게 여기는 것으로 장비가 특별한 프로젝트에 사용되거나 수명을 어느 정도 예측할 수 있는 경우에 해당한다. 지금까지 기술된 기존연구를 위와 같이 두 가지 형태로 분류한다면 Terborgh(1949), Bellman(1955), Sethi and Mortan(1972), 그리고 Oakford, Lohmann and Salazar(1984)의 모형은 장비수명이 유한한 것으로, Sethi and Chand(1979)의 모형은 무한한 것으로 분류할 수 있다. Bean, Lohmann and Smith(1985)는 Oakford, Lohmann and Salazar(1984)의 모형을 무한한 수명을 가지는 모형으로 확대시켰다. 그러나 장비가 제공하는 수명은 유한하므로 유한한 수명 가정이 보다 현실적인 가정이라고 할 수 있다. 현실 세계에서 실용적인 목적으로 장비를 사용할 경우, 그 기간이 아무리 길어도 50 ~ 100년 사이의 기간이면 충분하기 때문이다.

본 연구는 유한 수명의 단일 현유장비에 복수 도전장비 문제를 다루었던 기존의 Oakford, Lohmann and Salazar(1984)의 전방향 동적 계획모형처럼 유한한 장비수명에 대한 연구이다. 그러나 본 연구에서는 Oakford 등과는 달리 장비운영에 따른 계절별 가동률과 유휴비용, 장비의 제한수명 등을 고려한 후방향 동적 계획모형(backward DP)으로 수학모형을 수립하였으며 이 모형의 의사결정과정을 간단한 네트워크 구조로 표현하였다. 본 모형을 후 방향 동적 계획모형으로 구성함으로써 전방향 동적 계획모형(forward DP)이 범하기 쉬운 국소 최적해를 찾을 가능성을 줄일 수 있었다. 그리고 의사결정단위를 분기별로 할 경우 계절적인 영향으로 인해 발생하는 장비간 비용 및 수익의 차이를 교체정책의 결정에 반영하였다. 또한 사례연구를 통해 모형의 네트워크 구조를 PC 상에 그림으로 보여줌으로써 현장에서의 용이한 결과해석을 도모하였다.

## 3. 수리적 모형

본 연구에서 제시한 동적 계획모형은 현유장비에 대한 경제적 수명(economic life)산출 및 다종의 다수 도전장비 존재시, 일정 계획기간 동안 보유기간이 $n$ 인 현유장비($j = 0$)와 다수의 도전장비($j = 1,2,\cdots,J$)간의 유지 또는 교체 정책에 따른 이익을 극대화하기 위해 수립되었다. 모형의 계산과정은 계획기간의 마지막 단계(stage)로부터 시작하여 첫 단계로 역방향 DP로 표현된다. 계획기간의 마지막 단계에서는 식 (2)에 기술한 것처럼 장비의 잔존 가치만을 고려하였으며, 매 의사결정 단계에서 발생하는 수익 및 기타 운용 유지비용은 기간 말에 발생되고, 장비의 구입비용은 기간 초에 발생되는 것으로 가정하여 식 (3), (4)와 같이 부분적(장비의 구입비용은 기간 초에 발생된다고 봄으로써 할인에 포함시키지 않음)으로 할인된 반환값(return value)을 구해 매 단계마다 다음의 최적 교체정책, $f_t(j,v)$에 더하여 비교하였다.

식 (1)의 $f_t(j,v)$는 $t$ 번째 단계에서 장비의 종류가 $j$ 이고 보유기간이 $v$ 일 때까지 발생한 최적 이익을 할인계수 $\sigma$로 할인한(discounted) 시점 $t$ 에서 최대 이익의 현재가를 나타낸다. 이 식의 우측 첫번째 항($R[(j,v)_t, x(j,v)_t, k]$)은 의사결정 변수 $x(j,v)_t$에 따라 발생하는 각 현금요소들간의 연산값이며 식 (3), (4), (5)에 구체적으로 나타나 있다. 또한 식 (6)은 교체의사결정의 단위가 분기인 것을 감안한 단위기간에 대한 할인계수를 나타내며, 식 (7)은 기간 $t$의 증가에 따른 상태변수 전이규칙을 설명하고 있다.

$$f_t(j,v) = \underset{\substack{x(j,v)_t \\ k\in J}}{\text{Maximum}} \langle R[(j,v)_t, x(j,v)_t, k] + [x(j,v)_t \times f_{t+1}(j,v+1) + (1-x(j,v)_t) \times f_{t+1}(k,1)] \times \sigma \rangle \quad (1)$$
$$(\text{for } j \in J, v \in V,\ 1 \le t \le H-1)$$

$$f_t(j,v) = S_t^H(v) \times \sigma \quad (2)$$
$$(\text{for } j \in J, v \in V, t = H)$$

여기서, $R[(j,v)_t, x(j,v)_t, k]$,
(for $j,k \in J,\ v \in V,\ k \neq 0,\ 1 \le t \le H-1$)의 값은

$$\text{If } v \le L_j \text{ and } x(j,v)_t = 0 \text{ Then}$$
$$= [B^k \times A_t^k - M^k - MR_t^k(v) + S_t^j(v) - B^j \times A_t^j \times fc^j] \times \sigma - C_t^k \quad (3)$$

$$\text{If } v \le L_j \text{ and } x(j,v)_t = 1 \text{ Then}$$
$$= [B^j \times A_t^j - M^j - MR_t^j(v)] \times \sigma \quad (4)$$

$$\text{If } v > L_j \text{ Then } = -BigM \quad (5)$$

모형 수립을 위하여 사용된 구체적인 기호 및 수식의 정의는 아래와 같다.

$H$ : 계획기간(planning horizon)
$t$ : 단계(stage)로서 기간 초를 의미한다.
( $t = 1, 2, \cdots, H$ )
$i,k$ : 장비의 종류
$J$ :장비의 집합
$En$ : 서로 다른 도전 장비의 수
$J = \{j | j = 0, 1, 2, \ldots, En\}$
$V$ : 보유기간의 집합
$D_t$ : $t$ 단계에서 현유장비의 보유기간

$V=\{v|v=0,1,2,..,D_t\}$

$L_j$ : 장비 $j$ 의 제한수명(accounting life)

$(j,v)$ : 상태(state)로서 장비의 종류 $j$보유기간 $v$의 쌍(pair)을 의미한다

$(j,v)_t$ : $t$ 번째 단계에서의 $(j,v)$

$A_t^j$ : $t$ 번째 단계에서 장비 $j$ 의 가동률

$C_t^j$ : $t$ 번째 단계에서 장비 $j$ 의 구입 비용

$B_j$ : 장비 $j$ 를 단위기간(time period) 동안 100% 가동했을 때 얻어지는 장비 운용 수익

$M_j$ : 장비 $j$의 가동률에 상관없이 매 단위 기간마다 소요되는 유지비용, 예를 들어 세금, 보험료 등

$MR_j^t(v)$ : $t$ 번째 단계에서 보유기간이 $v$ 인 장비 $j$를 $t+1$ 단계까지 운용했을 때 소요되는 최소 수리비용 (mimimal repair cost)

$S_j^t(v)$ : $t$ 번째 단계에서 장비 $j$의 잔존 가치

$fc^j$ : 장비 $j$ 의 매각에 따른 유휴 일수

$$\sigma=\frac{1}{1+i'}=\frac{1}{1+\frac{1+i}{1+f}-1}=\frac{1+f}{1+i}; \qquad (6)$$

인플레이션율을 감안한 단위기간에 대한 할인계수

$i'$ : 무인플레이션 이율, $f$ : 인플레이션율,

$i$ : 시장 이율

$R[(j,v)_t, x(j,v)_t, k]$ :

$t$ 번째 단계에서의 반환값(return value)

$x(j,v)_t$ : 의사결정 변수(decision variable)로써, $t$ 번째 단계에서 장비 $j$ 를 교체하면 0, 유지하면 1

State Transition :

$$(j,v)_{t+1}=(j,v+1) \quad \text{.... if } x(j,v)_t=1$$

$$(j,v)_{t+1}=(k,1)_t,\ k\in J,\ k\neq 0 \text{ .... if } x(j,v)_t=0 \qquad (7)$$

전술된 정의에서 $L_j$, 즉 장비의 $j$ 의 제한수명이 나타내는 의미는 장비운영에 따른 세법상에 규정된 장비의 운용가능 시간 또는 특정 목적의 장비에 대한 실질적인 보유기간의 제한을 뜻한다. 본 연구에서는 실험의 대상으로 삼은 렌터카 차량에 대해서는 현 자동차대여 사업조합에서 제시한 차종별 기준한도를 장비의 보유제한기간으로 삼았다. 한편, 지금까지 기술된 모형을 네트워크 구조로 표현하면 아래 <그림 2>와 같다. <그림 2>의 경우, 계획기간 4기간에 장비수명이 2인 현유장비에 대한 도전장비로 3개의 서로 다른 도전장비를 나타낸다. 여기서 노드(node)는 차량의 종류와 보유기간을 함께 나타내며 아크(arc)는 의사결정 변수로써 각 차량의 교체(replace) 또는 유지(keep)를 의미한다.

또한 아크길이(length)는 $R[(j,v)_t, x(j,v)_t, k]$를 나타내며, 마지막 노드 T는 가상의 노드이다.

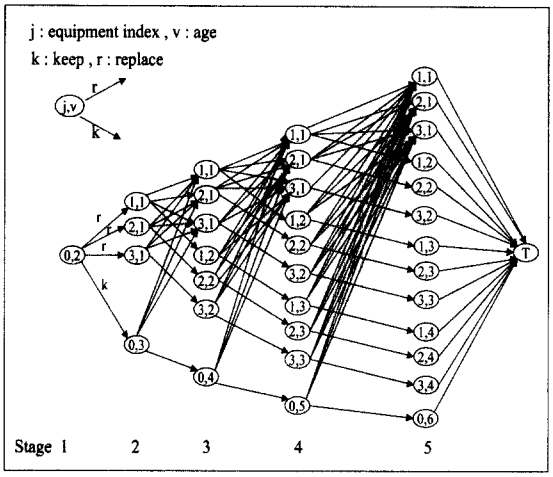


그림 2. 장비교체 의사결정 네트워크 구조.

## 4. 실험 사례

본 연구는 렌터카 업체의 차량을 대상으로 하였다. 현 렌터카 업체의 차량은 계절에 따른 수요의 변화로 인해 매 기간 가동률이 일정하지 않다. 물론 대규모 차량을 보유하고 있는 큰 기업의 경우, 보유차량의 80% 정도를 장기대여(lease)하고 있는 추세라서 대여기간 동안의 가동률은 일정하다고 볼 수 있다. 다시 말해, 총 차량의 80%는 가동률에 전혀 영향을 받지 않으며 대여기간이 끝나는 시점이 바로 차량의 교체시점이 되고 있다.

그러나 남은 20%나 장기대여가 별로 없는 소규모 렌터카 업체의 경우, 계절에 따른 수요의 변화를 가지며 이로 인해 매 계절별 현금흐름에 큰 차이를 보인다. 따라서 차량의 가동률이 달라짐으로써 발생하는 현금흐름의 차이를 고려한 최적의 차량 교체시점을 결정하는 것이 총 자산의 경제적 운영이라는 기업의 목표에 부합할 수 있으리라 생각한다. 본 연구는 이러한 목적으로 현재 보유하고 있는 차량의 경제적 수명산출 및 다수의 경쟁차량을 가진 경우, 분석기간 동안 최적의 교체 정책을 결정하여 본 모형의 응용가능성을 살펴보고자 한다.

본 연구의 실험을 위한 가정사항은 다음과 같다.

1. 실험에는 하나의 현유차종과 3개의 도전차종을 고려한다. 단, 현유 차종의 보유기간은 1 이상이다.

2. 수리비용의 추정을 위한 각 동종 차종의 수는 각각 10대로 하고 고장발생 시간의 분포가 와이블 분포에 따른다고 가정한다.

3. 차량운용의 가동률은 각 차종별 과거 평균가동률을 예측치로 사용한다.

이와 함께 장비의 구입비, 운영유지비 등 각 현금요소의 산출에 있어 연간이율은 8%, 12%, 16%, 인플레이션 2%만을 고려한다. 또한 차량의 감가상각액 추정을 위한 감가상각 방법은 정률법을 사용한다. 사실 차량의 가격 변동폭은 지역적 특성 및 차종간의 인기 편중에 의해 차이가 심하며 특히 차의 상태에 따라 가격 차이가 크기 때문에 잔존 가치 예측을 위한 정확한 평가방법을 찾기 어렵다. 그러나 차량의 가격의 하락이 사용초기에 더 빨리 일어난다는 것과 특정 중개상 매물시세를 반영한 장부가(book value)를 근거로 감가상각률을 연간 24.2%로 가정하였다.

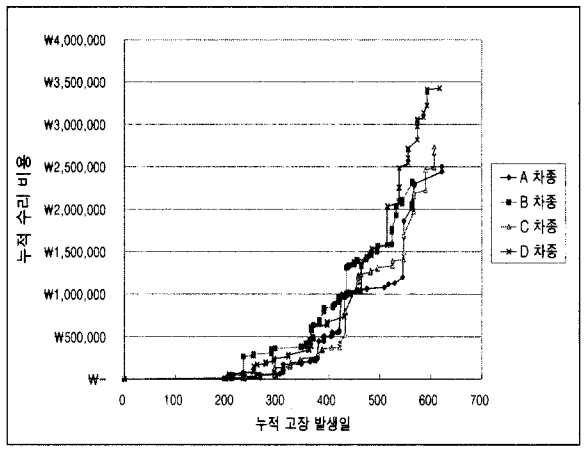


**그림 3.** 누적수리비용.

### 4.1 수리비용

먼저 이 모형은 고장발생시 수리가능한 장비를 대상으로 고장시간의 분포가 와이블분포(weibull-distribution)를 따른다는 가정하에 최소 수리(minimal repair)를 갖는 수리정책의 사용을 가정하였다. 여기서 최소 수리란 수리 후 장비의 상태는 고장 바로 이전의 상태로 되돌아간다는 것으로 완전 수리, 즉 수리 후 새로운 장비의 상태로 된다는 가정 보다 좀더 현실적인 가정이라 할 수 있다. 와이블 분포는 적당한 모수값에 의해 여러 가지 다양한 모양의 분포를 나타낼 수 있어 신축성 높은 분포로 알려져 있으며 노후화가 일어나는 장비에 고장시간의 분포로써 매우 광범위하게 응용되고 있다.

본 연구에서도 차량의 수명이 와이블 분포를 따르는 것으로 가정하여 고장발생시 최소 수리를 갖는 수리정책하의 고장률 추정을 통해 매 기간별 기대 수리비용을 산출하였다. 고장률 추정방법으로는 최우추정법을 사용하였으며 다음과 같이 시점 $a$ 로부터 시점 $b$ 사이의 기간, 즉 [ $a$ , $b$]기간 동안의 수리비용을 구하였다.

$C_f$ : 고장발생시 소요되는 1회 평균 수리 비용

$Nf_{(a,b)}$ ~ [ $a$, $b$ ] 사이에 발생하는 차량의 고장 횟수

[ $a$ , $b$] 사이에서의 수리 비용 : $C_{r(a,b)} = C_f \times E(Nf_{(a,b)})$

<그림 3>은 각 차종 10대를 622일 동안 운행했을 때 발생했던 과거 수리비용의 증가를 나타낸다. [ $a$ , $b$]기간 동안에 발생하는 고장에 대해서 최소 수리가 이루어질 때 시간 $t$ 에서의 고장률은 다음과 같이 정의된다. 여기서 $f(t)$ 와 $F(t)$는 시간 $t$ 에서의 확률밀도함수와 누적분포함수이다. 고장발생까지의 시간이 와이블 분포를 따를 때 시간 $t$ 에서의 확률밀도함수는 식 (8)과 같으며 고장률함수는

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

로써 식 (9)와 같다. [ $a$ , $b$]기간 사이에서의 고장 횟수의 기대치 $E(Nf_{(a,b)})$는 고장률 함수 $r(t)$를 이용해 아래 식 (10)과 같이 구해진다. 여기서 $X_1$(첫번째 고장발생시간)의 확률분포는 수식 (8)을 따르나 $X_i (i \geq 2)$, 즉 두번째 고장발생 누적시간부터는 최소 수리 후 마치 예전에 고장이 없는 상태로 되돌아간다는 가정하에 $X_{i-1}$이 주어진 조건부 확률 밀도함수가 되어야 한다.

$$f(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1} e^{-(\beta t)^{\alpha}} \tag{8}$$

$$r(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1} \tag{9}$$

$$E(Nf_{(a,b)}) = \int_a^b r(t)dt \tag{10}$$

이 연구에서는 와이블분포의 두 모수 $\alpha$(형상모수), $\beta$(척도모수)의 추정치를 구하기 위해 전치혁 등(1998)이 제철소의 정비주기 산정을 위해 제시한 방법을 응용하여 두 모수의 추정치를 구했다. 이 두 모수의 추정과정은 부록에 자세히 기술하였다.

$$\hat{\beta} = \frac{n^{\frac{1}{\hat{\alpha}}}}{T} \tag{11}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln\left(\frac{T^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)} \tag{12}$$

이를 이용해 계획기간 동안 각 차종별 누적예상 수리비용을 산정해보면 <그림 4>와 같다. 실제 96년 11월에 운행을 시작한 B(10대)차종의 경우, 98년 5월 (총 19개월)까지의 누적 수리비용은 2,326,800원으로 이는 식 (11), (12)를 이용하여 구한 예상 수리비용 2,351,468원과 비교해 볼 때 예측치가 실제값보다 조금 높게 산정되었으나 대부분의 예측치가 비교적 근사치로

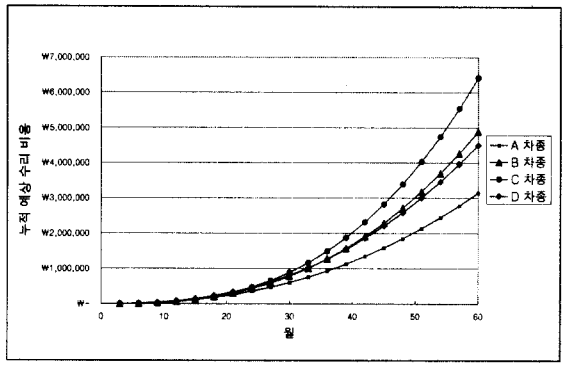


그림 4. 누적예상 수리비용.

산정되었다.

### 4.2 수 익

현 렌터카 차량의 수익은 차량운행에 따른 가동률에 의해 결정되며, 이러한 차량의 가동률은 각 차종에 따른 대여일(rental day)을 근거로 하여 산출된다. 보통 여름휴가철인 7 ~ 8월과 명절을 포함한 달을 성수기로 나머지 기간을 비성수기로 구분하는데, 보통 성수기에는 평균 대여일 + 20 ~25 %, 비수기에는 평균 대여일−20 ~ 25% 정도의 차이가 있으며 이는 회사별로 대여현황이 다르다. 물론 최근 들어 성수기와 비수기의 구분이 평일과 주말의 구분으로 바뀌어 가고 있지만 여전히 계절별 가동률의 차이는 존재한다.

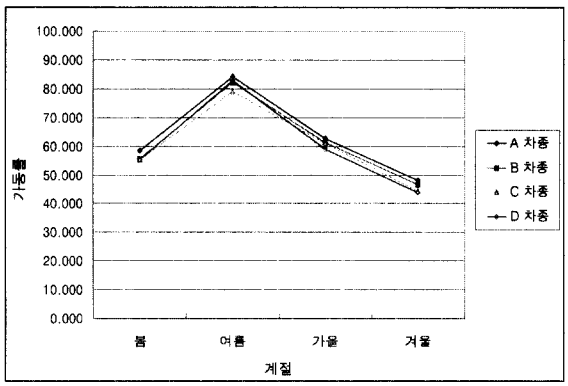


그림 5. 차종에 따른 계절별 평균 가동률.

표 1. 사례연구에 사용된 차량의 입력정보

| 차종 | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 구입단가(원) | 9,619,582 | 9,518,181 | 11,020,938 | 11,962,262 |
| 유지비(원)/년 | 830,840 | 822,250 | 893,250 | 921,650 |
| 단위수익(원)/일 | 69,950 | 69,950 | 75,100 | 75,100 |
| 형상모수 추정치 | 2.880 | 2.640 | 2.650 | 2.750 |
| 척도모수 추정치 | 0.0088 | 0.0082 | 0.0073 | 0.0072 |
| 실질수익 | 단위수익 × 가동률× 기간(분기일수) | | | |

<그림 5>는 실험의 대상으로 삼은 4개 차종(A,B,C,D)의 계절별 과거 평균 가동률현황이다.

$$\text{가동률} = \frac{\text{분기별 } N \text{대의 총 대여일}}{N \times \text{분기(일)}}$$

$N$ : 차량 대수

<그림 5>의 가동률현황에서 알 수 있듯이, 겨울철 비성수기를 지나 여름철 성수기에 접어들수록 높은 가동률을 나타내며 차종보다는 계절에 더 큰 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 여기서는 이러한 차종에 따른 계절별 수익의 변화가 매 해마다 동일한 사이클(cycle)로 반복된다고 가정하여 과거의 실적자료의 평균치를 차기 계획기간 동안의 예측치로 사용하였다. 실제 이러한 가정은 현 렌터카 업체들의 차량교체 주기가 다른 장비에 비해 비교적 짧아 다른 통계적인 예측방법을 적용할 만큼 충분한 자료가 없기 때문이다. 또한 <표 1>의 일일 단위수익은 차량의 일일 대여수익으로 계절에 상관이 동일하기 때문에 매 분기별 일정하게 적용하였다.

## 5. 실험 및 결과

앞서 언급했듯이, 본 문제의 해는 matlab을 이용하여 구현된 프로그램과 excel 간의 상호연계 수행을 통해 구했다. 세부적인 수행과정은 다음 <그림 6>과 같다. 먼저 excel의 macro기능을 활용하여 (1) 각 차량의 현금흐름 데이터를 matlab command window에 보내고, 이와 동시에 matlab으로 구현한 프로그램을 자동으로 수행시킨다. 다음으로 (2) 프로그램 수행을 마친 결과를 다시 excel sheet에 나타나게 한다.

실제 사례연구를 위해 사용된 입력정보는 <표 1>과 같다. 이 데이터는 국내 한 렌터카 업체의 중형차 관련자료로서 먼저 차량구입비는 차량가격뿐만 아니라 실제 차량구입에 소요되는 취득세, 등록세, 번호판대, 인지대 및 기타 비용을 포함한 것을 나타낸다. 그리고 유지비는 차량의 운행이나 대여에 상관없이 일정하게 소요되는 비용으로 보험료와 차량 정기검사료를 합한 비용을 나타내며, 단위수익은 차량의 일일 대여로 인해 얻어지는 단위수익으로 여기서는 주중의 할인이 적용되는 값을 사용했다.

그러나 각 차종별 실질수익은 단위수익에 가동률과 기간(분

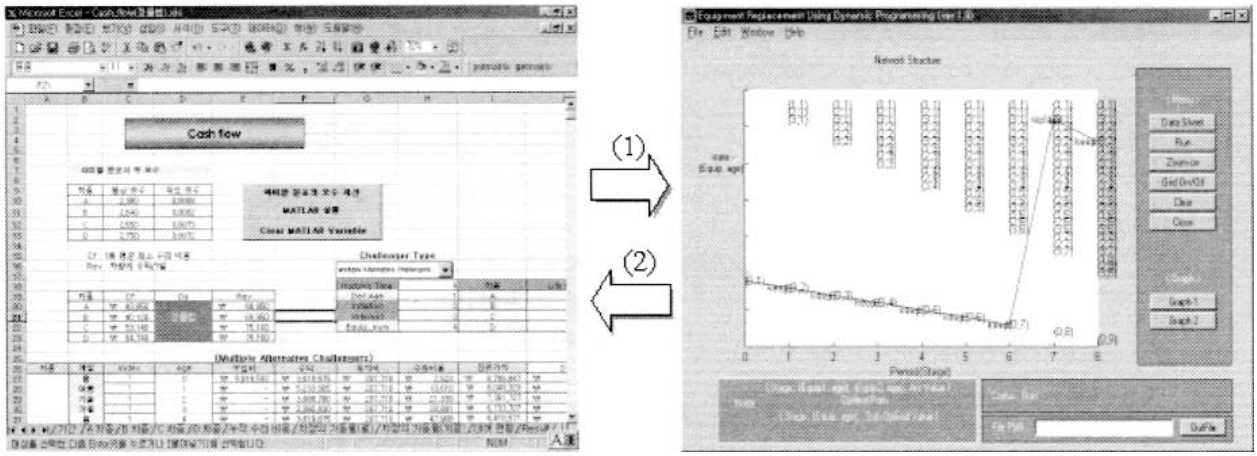


그림 6. excel과 matlab 간의 상호연계 작업을 통한 모형의 실험.

기일수)을 곱함으로써 결정된다. 이러한 입력정보에 대한 모형수행의 결과로써 먼저 다수의 도전장비를 고려하지 않을 경우, 연이율 12%, 인플레이션율 2%에서 현 A차종의 경제적 수명(economic life)이 2년 9개월이라는 결과를 얻었다. 또한 연이율 8% ~ 16%에 대한 민감도 분석결과 해의 변화는 없었다. 다음으로 다수의 도전장비를 고려한 경우, 일정 계획기간 동안 각 차량의 유지 또는 교체에 따른 최적의 교체정책을 구한 결과 <표 2>와 같았다. 여기서 현유차종인 A차종의 0 단계에서의 보유기간이 1이며, 계획기간의 단위는 분기이다.

본 실험결과 휴차비용을 고려한 경우와 고려하지 않은 두 가지 경우, 각 정책의 변화에는 큰 차이가 없었으나 휴차비용을 고려하지 않은 경우, 계획기간 $H$(분기) = 16일 때 교체시점이 가을에서 여름으로 바뀌었고 또한 가장 긴 계획기간인 H(분기) = 19의 경우, 교체횟수의 증가를 나타냈다. 그리고 현유차종을 A에서 각각 B, C, D로 바꾸어 가며 각 계획기간별 최적 교체정책을 구한 결과 현 보유차종을 D로 하는 것이 최대 수익을 가져와 D 차종의 경제성이 가장 높은 것으로 나타났다.

분석결과는 <그림 7>에 종합되어 있으며 D, C, A, B차종 순으로 현가수익이 높게 나타나고 있으며 D차종으로 교체시 A차종보다 평균 3.3%의 수익증가를 가져올 수 있음을 알 수 있다. 이러한 실험을 토대로 각 계획기간별 계절에 따른 차량교체횟수의 총 합을 구한 결과 <그림 8>과 같았다. <그림 8>의 결과 휴차비용을 고려함으로써 성수기인 여름

표 2. 휴차비용의 고려유무에 따른 최적의 교체정책

| 계 획 기 간 | 최적 차종(정책: k; keep, r; replace)<br>최적해 | |
|---|---|---|
| | 휴차비용 고려 | 휴차비용 고려 안함 |
| 8 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-D(r)-D(k)<br>30,145,159 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-D(r)-D(k)<br>30,554,894 |
| 12 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-D(r)-D(k)<br>39,685,989 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-D(r)-D(k)<br>40,057,369 |
| 16 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)<br>-A(k)-A(k)-C(r)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k) | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)<br>-A(k)-C(r)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)<br>48,097,530 |
| | 47,682,731 | |
| 19 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)<br>-A(k)-C(r)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)<br>53,439,953 | A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)-A(k)<br>-A(k)-C(r)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-C(k)-D(r)-D(k)<br>53,934,582 |

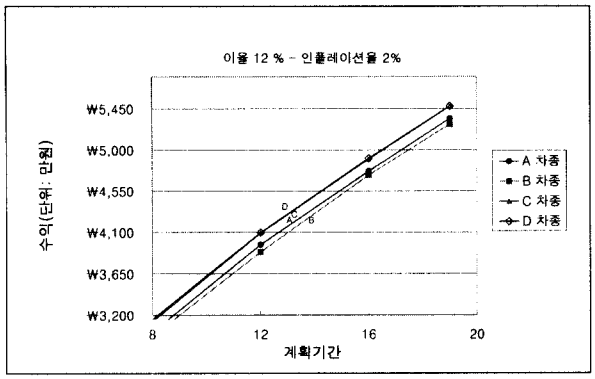


그림 7. 각 현유차종별 운영수익의 비교.

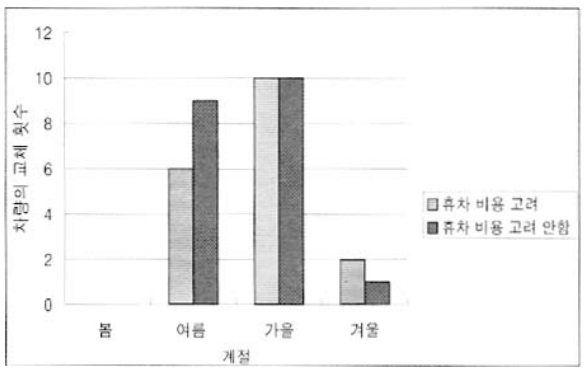


그림 8. 휴차비용의 고려유무에 따른 계절별 차량의 교체횟수.

철에서의 교체횟수가 줄어들었으며 전반적인 교체횟수도 줄었다.

사실 이러한 휴차비용은 계절에 따른 장비의 가동률에 영향을 받기 때문에 만일 기간별 가동률의 차이가 지금 보다 더 커진다면 성수기인 여름에서의 차량교체빈도 및 두 경우의 정책차이가 더 커 질 것이라고 예상할 수 있다.

## 6. 결론 및 향후 토의과제

본 연구에서는 장비의 가동률과 휴차비용을 고려함으로써 장비매각시 발생하는 기회손실비용을 고려할 수 있었다. 아울러 법정내용 연수와 기간별 가동률을 고려함으로써 모형의 실제 적용성을 향상 시킬 수 있었다. 특히 본 연구에서 수립한 동적 계획모형은 시장이율과 인플레이션율을 고려한 단위기간 할인율을 고려함으로써 경제적 환경변화를 의사결정모형에 쉽게 반영 할 수 있었다. 또한 여기서 제시한 동적 계획모형은 컴퓨터로 풀기에 적합한 모형으로 현실문제의 적용측면에서 용이한 결과 해석이 가능하도록 모형화할 수 있었다. 제시한 모형의 실험은 렌트카 업체의 차량교체주기 결정을 위한 문제에 적용해 봄으로써 현유장비인 A 차종의 경제적 수명이 2년 9개월이라는 결과를 얻었다. 본 모형에서 제시한 DP를 이용함으로써 다종의 차량존재시 일정 계획기간 최적 대체정책과 차종별 상대적인 경제수명을 판단할 수 있으며 앞절의 실험결과에서 알 수 있듯이 휴차비용을 고려함으로써 성수기인 여름철에서의 차량교체를 줄여 주는 교체정책을 제시하였다. 모형의 실험에서 고려한 현금요소 중 수리비용보다는 수익이 교체정책의 결정에 더 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있었는데 이는 수리비용의 경우 각 차종별 금액의 차이가 다른 현금요소의 금액단위보다 작아 교체정책의 결정에 큰 영향을 주지 못하기 때문이다. 그러나 수익의 경우 각 차종별 가동률은 비슷했지만 그 단위금액의 차이가 커 교체정책 결정에 큰 영향을 주었다. 따라서 최적 차량의 교체주기 결정을 위해서는 비용은 물론 수익에 크게 영향을 미치는 사회적 흐름의 반영에 따른 차량 선호도 분석을 위한 효율적인 데이터베이스 시스템 구축이 필요하며 동적 계획모형을 활용하여 교체주기를 결정하는 것이 바람직하다.

## 부 록

본 부록에서는 전치혁 등(1998)이 제철소의 정비주기 산정을 위해 제시한 방법을 응용하여 와이블 분포의 두 모수를 구하였다. 제철소의 정비주기 산정을 위한 와이블 분포의 두 모수 추정은 서로 다른 계획 정비기간 $T$에 대한 우도함수를 구한 다음 전체 우도함수를 구해야 하기 때문에 하나의 파라미터를 고정시키고 다른 파라미터를 근사시키는 방법으로 추정치를 구했다. 그러나 본 연구는 계획 정비주기를 일정한 장비 수명기간 $T$로 놓았기 때문에 아래 설명한 것처럼

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \beta}=0$$

으로 놓고 두 식을 연립방정식을 풀어 각각의 파라미터를 구할 수 있었다.

와이블 분포의 두 모수를 구하기 위한 과정은 다음과 같다. 먼저 확률변수 $X_1$은 식(8)를 따르나 $X_2$부터는 최소 수리 후의 조건부 확률밀도 함수가 되야 한다. 먼저 최소 수리 가정하의 $(X_2, X_3, \cdots, X_n)$의 누적분포함수를 구해 보면 다음과 같다.

$$F_{X_i|X_{i-1}}(x_i\,|x_{i-1}) = P(X_i<x_i\,|X_i>x_{i-1}) =$$

$$\frac{P(x_{i-1}<X_i<x_i)}{P(X_i>x_{i-1})} = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}{\int_{x_{i-1}}^{\infty}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}$$

$$= \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}{1-\int_{0}^{x_{i-1}}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}$$

먼저 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt$ 를 치환 적분하면 다음과 같다.

$-(\beta t)^{\alpha}=x$ 라고 하고 양변을 $t$에 관해 미분하면 $-\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}=dx/dt$가 되며 이를 $dx$에 관해 정리해 보면 $dx=-\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}dt$가 된다.

이를 원식에 대입하면

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}\times[\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}]^{-1}e^{x}dx$$

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i}e^{x}\,dx=-[e^{-(\beta t)^{\alpha}}]_{x_{i-1}}^{x_i}=e^{-(\beta x_{i-1})^{\alpha}}-e^{(\beta x_i)^{\alpha}}$$

$$=\frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}{1-\int_{0}^{x_{i-1}}\alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}e^{-(\beta t)^{\alpha}}dt}$$

$$=\frac{e^{-(\beta x_{i-1})^{\alpha}}-e^{(\beta x_i)^{\alpha}}}{1-1+e^{-(\beta x_{i-1})^{\alpha}}}$$

따라서

$$f_{X_i|X_{i-1}}(x_i\,|x_{i-1})=\frac{\partial F_{X_i|X_{i-1}}(x_i\,|x_{i-1})}{\partial x_i}=$$

$$\alpha\beta(\beta x_i)^{\alpha-1}e^{(\beta x_{i-1})^{\alpha}}\times e^{-(\beta x_i)^{\alpha}},\quad x_i>x_{i-1}$$

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$의 결합 확률밀도 함수를 구해보면

$$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$

$$f_{X_2,X_3,\ldots,X_n}(x_2,x_3,\ldots,x_n\,|x_1)f_{x_1}(x_1)=$$

$$f_{X_3,X_4,\ldots,X_n}(x_3,x_4,\ldots,x_n|x_1x_2)f_{x_2x_1}(x_2|x_1)f_{x_1}(x_1)=$$

이 되며 최소 수리가 이루어졌기 때문에 확률변수 $X_i$는 바로 전 $X_{i-1}$에만 영향을 받아 아래와 같이 바뀌어진다.

$$f_{(X_3,X_4,\ldots,X_n)}(x_3,x_4,\ldots,x_n\,|x_2)f_{x_2x_1}(x_2|x_1)f_{x_1}(x_1)=$$

$$f_{X_4,X_5,\ldots,X_n}(x_4,x_5,\ldots,x_n\,|x_3)f_{x_3|x_2}(x_3|x_2)\cdot$$

$$f_{x_2|x_1}(x_2|x_1)f_{x_1}(x_1)=\cdots\cdots=$$

$$f_{X_1}(x_1)f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\cdots f_{X_n|X_{n-1}}(x_n|x_{n-1})=$$

$$\alpha\beta(\beta x_1)^{\alpha-1}e^{-(\beta x_1)^{\alpha}}\times\alpha\beta(\beta x_2)^{\alpha-1}e^{-(\beta x_2)^{\alpha}}\times e^{(\beta x_1)^{\alpha}}$$

$$\times\alpha\beta(\beta x_3)^{\alpha-1}e^{-(\beta x_3)^{\alpha}}e^{(\beta x_3)^{\alpha}}\times\ldots$$

$$\ldots\times\alpha\beta(\beta x_n)^{\alpha-1}e^{-(\beta x_n)^{\alpha}}e^{(\beta x_{n-1})^{\alpha}}=$$

$$\alpha^n\beta^{n\alpha}e^{-(\beta x_n)^{\alpha}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}$$

실제 $T$ 기간 동안 고장발생까지의 시간데이터 $(X_2, X_3, \ldots, X_n)$를 윗식에 대입하면 $X_n$ 이후의 확률을 반영하지 못하므로 $P(X_{n+1}\geq T\,|X_n=x_n)$을 곱하여 다음과 같이 우도함수(likelihood function)를 구한다(전치혁 등, 1998).

$$P(X_{n+1}\geq T\,|X_n=x_n)=1-P(X_{n+1}<T\,|X_n=x_n)$$

$$=1-\int_0^T f(X_{n+1}|X_n)dx_{n+1}=1-F(T\,|X_n)$$

$$=1-(1-e^{-(\beta x_n)^{\alpha}}e^{-(\beta T)^{\alpha}})=e^{(\beta x_n)^{\alpha}}e^{-(\beta T)^{\alpha}}$$

$$L(\alpha,\beta)=\alpha^n\beta^{n\alpha}e^{-(\beta T)^{\alpha}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}$$

먼저 우도함수에 자연로그를 취하면 다음과 같다.

$$\ln L(\alpha,\beta)=n\ln\alpha+n\alpha\ln\beta$$

$$-(\beta T)^{\alpha}+(\alpha-1)\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)$$

이 우도함수를 $\beta$에 관해 미분하면 식 (10)의 추정치를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\frac{n\alpha}{\beta}-T\alpha(\beta T)^{\alpha-1}=0$$

$$n\alpha-\alpha\beta^{\alpha}T^{\alpha}=n-(\beta T)^{\alpha}=0,\ (\alpha\neq0)$$

$$n^{\frac{1}{\alpha}}=\beta T\ \rightarrow\ \beta=\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{T}$$

$$\hat{\beta}=\frac{n^{\frac{1}{\hat{\alpha}}}}{T}\qquad(11)$$

다음으로 $\alpha$에 관해 미분하여 식 (12)의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial\ln L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-n\ln\beta-n\ln(\beta T)+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)$$

여기서 $\beta$ 대신 $\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{T}$ 을 대입하면

$$\frac{n}{\alpha}+n\ln\left(\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{T}\right)-n\ln(n^{\frac{1}{\alpha}})+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)=0$$

$$\frac{n}{\alpha}+n\ln(n^{\frac{1}{\alpha}})-n\ln T-n\ln(n^{\frac{1}{\alpha}})+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)=0$$

$$\frac{n}{\alpha}-n\ln T+\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)=0$$

따라서

$$\frac{n}{\alpha}=\ln T^n-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)$$

$$\frac{n}{\alpha}=\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{T^n}{x_i}\right)$$

$$\hat{\alpha}=\frac{n}{\ln\left(\frac{T^n}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right)}\qquad(12)$$

## 참고문헌


전치혁, 박광수, 황욱현, 주민보 (1998), 최소수리를 갖는 정기 정비 정책하에서의 고장률 추정 및 정비주기 산정, *대한 설비관리 학회*, 3(1), 217-228.

Alchian, A. A. (1952), *Economic Replacement Policy*, The Rand Corp., Santa monica, CA., Publication, R-224.

Bean, J. C., Lohmann, J. R. and Simth, R. L. (1985), A dynamic infinite horizon replacement economy decision model, *The Engineering Economist*, 30(2), 99-120.

Bellman, R. (1955), Equipment replacement policy, *SIAM Journal of Applied*

*Mathematics*, 3, 133-136.

Jayabalan, V. and Chaudhuri, D. (1995), Replacement polices: a near optimal algorithm, *IIE Transactions*, 27(27), 784-788.

Lohmann, J. R. (1986), A stochastic replacement economic decision model, *IIE Transactions*, 18(18), 182-194.

Oakford, R. V., Lohmann, J. R. and Salazar, A. (1984), A dynamic replacement economy decision model, *IIE Transactions*, 16(1), 86-96.

Sethi, S. and Chand, S. (1979), Planning horizon procedures for machine replacement models, *Management Science*, 25(2), 140-151.

Sethi ,S. and Mortan, T. (1972), A mixed optimization technique for the generalized machine replacement problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, 19(3), 471- 481.

Terborgh, G. (1949), *Dynamic Equipment Policy*, Machinery and Allied Products Institute, Washington, D.C .

Wagner, H. and Whitin, T. (1958), Dynamic version of the economic lot size model, *Management Science*, 5(5), 86-96.