

표본크기에 제약이 있는 누적 축차관리도

장영순 · 배도선

한국과학기술원 산업공학과

Cumulative Sequential Control Charts with Sample Size Bound

Young-Soon Chang · Do-Sun Bai

This paper proposes sequential control charts with an upper bound on sample size. Existing sequential control charts have no restriction on the number of observations at a sampling point. For situations where sampling and testing an item is time-consuming or expensive, sequential control charts may not be directly applied. When the number of observations in a sampling point reaches the upper bound and there is no out-of-control signal, the proposed cumulative sequential control chart defers the decision to the next sampling point of which starting value is the value of the current statistic. Two Markov chains, inner and outer chains, are used to derive the formulas for evaluating the performance of the proposed chart. It is compared with \bar{X} and cumulative sum control charts with fixed and variable sample sizes. The fast initial response (FIR) feature is studied. Guidelines for the design of the proposed charts are also given.

1. 서론

최근 품질관리 분야에서는 공정을 검사하여 불량품이 생산되지 않도록 미리 예방활동을 하는 통계적 공정관리(statistical process control: SPC)의 체계적인 활용이 강조되고 있다. SPC의 중요한 목적중의 하나는 공정에 이상이 발생했을 때 이를 빨리 탐지하여 적절한 수정조치를 취하는 것이다. 이러한 목적으로 사용되는 가장 대표적인 기법이 관리도이다. 관리도란 관리한계선이 있는 그래프에 시간의 흐름에 따른 품질의 변동 상황을 나타낸 것으로, 표본으로부터 계산한 타점통계량의 값을 순차적으로 타점하여 공정의 이상유무를 판단한다. 만일 모든 점들이 관리한계선 안에 놓이고 점들의 형태로부터 별다른 이상 징후가 발견되지 않으면 공정이 관리상태에 있다고 보고, 만약 한 점이라도 관리한계선을 벗어나거나 점들이 어떤 특정한 추세를 보이면 공정이 이상상태에 있다고 판단하여 공정을 면밀히 조사하게 된다.

일반적으로 관리도는 매 표본관찰시점에서 동일한 개수의 관찰값들로 구성된 표본을 얻어서 운영되는데, 이러한 관리도를 고정표본크기(fixed sample size: FSS) 관리도라 한다. 최근 들어 FSS 관리도의 효율을 높이기 위하여 현재 얻어진 타점통계량의 값에 따라 다음 표본관찰시점에서의 표본크기를 달리하

는 가변표본크기(variable sample size: VSS) 관리도에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. VSS 관리도에서는 표본으로부터 계산된 타점통계량의 값이 관리한계선 근처에 타점되면 공정이 이상상태일 가능성이 높다고 보고 다음 표본관찰시점에서 많은 수의 관찰값을 얻고, 그렇지 않으면 공정이 관리상태일 가능성이 높다고 보고 적은 수의 관찰값을 얻는다. Prabhu 등(1993)과 Costa(1994)는 VSS \bar{X} 관리도를, Annadi 등(1996)은 VSS 누적합 관리도를 제안하였으며 Tagaras(1998)는 VSS 관리도에 관한 문헌들을 종합하여 정리하였다. 이들은 모두 VSS 관리도를 사용하는 것이 FSS 관리도를 사용하는 것에 비해 공정의 이상을 더 빨리 탐지할 수 있음을 보였다.

VSS 관리도의 효율을 개선하기 위한 관리도로 Stoumbos와 Reynolds(1997)는 축차확률비검정(sequential probability ratio test; SPRT)을 통하여 공정의 이상유무를 판단하는 축차관리도를 제안하였다. 축차관리도에서는 매 표본관찰시점에서 관찰값을 하나씩 얻을 때마다 SPRT를 실시한 후, i) 공정을 이상상태로 판단하여 공정을 면밀히 조사하거나, ii) 공정을 관리상태로 판단하여 검사를 중단하고 다음 표본관찰시점으로 넘어가거나, 또는 iii) 공정의 이상유무를 판단하기가 용이하지 않을 때에는 공정에 대한 정보가 부족한 것으로 여기고 관찰값을 하나 더 얻게 된다. 축차관리도는 현 표본관찰시점에서 얻어지는 정보에 의하여 표본크기가 다양하게 변화되므로, 이전 표

본관찰시점에서 얻어진 타점통계량의 값에 따라 표본크기를 미리 결정하는 VSS 관리도보다 공정의 이상을 더 빨리 탐지할 수 있다.

축차관리도는 공정의 이상유무를 판단할 수 있을 때까지 계속하여 관찰값을 얻게 되는 축차확률비검정의 특성상 한 표본 관찰시점에서 얻을 수 있는 관찰값의 수에 제한이 없다는 가정하에 설계되었다. 그러나 실제로 관찰값을 하나 더 얻어 검사할 때마다 그만큼의 비용과 시간이 들게 되므로 많은 수의 표본을 채취하여 검사하는 것은 어려운 일이다. 특히 표본을 검사하는 데 많은 시간이 드는 경우에는 한 표본관찰시점 내에서 얻을 수 있는 관찰값의 수에 제한이 있으므로 Stoumbos와 Reynolds(1997)의 축차관리도를 그대로 적용하기가 어렵다. 따라서 이 연구에서는 시간적 혹은 경제적인 이유로 인해 채취 가능한 표본크기에 상한이 있는 경우에 적용할 수 있는 누적 축차관리도를 제안한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2절에서는 기존의 축차관리도에 대해 살펴보고, 제 3절에서는 표본크기에 제약이 있는 경우에 사용할 수 있는 누적 축차관리도를 제안한다. 제 4절에서는 마코프 연쇄(Markov chain)를 이용하여 제안된 관리도의 수행도 평가를 위한 식들을 유도하고, 제 5절에서는 기존의 FSS 관리도 및 VSS 관리도와 수행도를 비교한다. 제 6절에서는 제안된 관리도를 실제로 사용할 수 있도록 누적 축차관리도의 설계절차에 관해 다룬다.

2. 축차관리도

Stoumbos와 Reynolds(1997)의 축차관리도는 고정된 매 표본관찰시점에서 SPRT를 실시하는 관리도이다. Wald(1947)에 의해 제안된 SPRT는 관찰값을 축차적으로 하나씩 얻으면서 가설을 기각, 채택, 또는 추가적으로 관찰값을 더 얻을 것인지 판단하는 검정방법이다. 이는 두 단순가설을 검정할 때, 동일한 제 1종과오를 범할 확률과 검정력을 갖는 검정방법들 중에서 검정에 필요한 관찰값의 수가 가장 적은 것으로 알려져 있다.

관리상태에서 공정평균이 $\mu = \mu_0$ 이고 분산이 σ^2 인 정규모집단에서 공정에 이상이 발생한 경우, 공정평균이 $\mu = \mu_1$ 으로 증가한 경우를 탐지하기 위한 축차관리도의 타점통계량은 i 번째 표본관찰시점에서 얻어진 j 개의 관찰값들 X_{i1}, \dots, X_{ij} 를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$U_{ij} = \begin{cases} u_0 + \sum_{k=1}^j (Z_{ik} - \gamma), & i=1, \\ \sum_{k=1}^j (Z_{ik} - \gamma), & i=2, 3, \dots \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $Z_{ik} = (X_{ik} - \mu_0) / \sigma$ 로 X_{ik} 를 표준화시킨 값이고, γ 는 공정평균의 특정변화 즉, $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ ($\delta > 0$)가 되는 것을 빠르게 탐지하기 위한 목적으로 사용되는 참고값(reference

value)으로 Stoumbos와 Reynolds(1997)는 $\gamma = \delta/2$ 로 사용하는 것이 최적의 값이 됨을 보였다. 또한 u_0 는 공정이 이상상태로 시작되는 경우, 이를 빠르게 탐지하기 위해 도입되는 값이다.

축차관리도의 운영절차는 다음과 같다.

i 번째 표본관찰시점에서 j 번째 관찰값을 얻었을 때,

- i) $U_{ij} > h$ 이면 공정이 이상상태라고 판단하여 검사를 중단하고 공정을 조사한다.
- ii) $U_{ij} \leq g$ 이면 공정이 관리상태라고 판단하여 검사를 중단하고 $(i+1)$ 번째 표본관찰시점으로 넘어간다.
- iii) $g < U_{ij} \leq h$ 이면 관찰값을 하나 더 얻어서 $U_{i,j+1}$ 을 구한 후 위의 절차를 반복한다.

<그림 1>은 축차관리도의 예이다. 첫번째 표본관찰시점에서 실시된 $SPRT_1$ 에서는 6번째 관찰값을 얻은 후 $U_{1,6} \leq g$ 가 되어 공정이 관리상태라고 판단하고 다음 표본관찰시점으로 이동하였다. $SPRT_2$ 에서는 8번째 관찰값을 얻은 후 $U_{2,8} > h$ 가 되어 공정에 이상이 발생했다고 판단하게 된다.

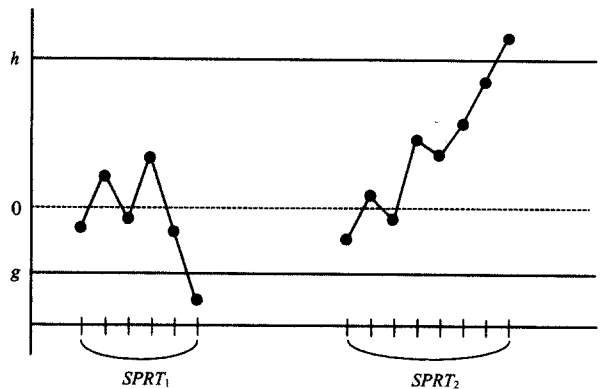


그림 1. 축차관리도의 예.

이와 같은 축차관리도는 기존의 관리도들보다 공정의 이상을 탐지하는 능력이 매우 우수하지만, 축차확률비검정의 특성상 공정의 이상유무를 판단할 수 있을 때까지 계속하여 관찰값을 얻을 수 있는 경우에만 사용할 수 있다. 그러나 실제로 관찰값을 얻어 검사하는 데 드는 시간과 비용이 큰 경우에는 한 표본관찰시점에서 일정 개수 이상의 관찰값을 취하기가 어려우므로 기존의 축차관리도를 그대로 사용할 수 없게 된다.

<표 1>은 $\gamma = 0.15$ 이고 관리한계선이 $h = 16.01$, $g = 0.00$ 인 축차관리도의 한 표본관찰시점에서 얻게 되는 관찰값 개수에 관한 확률과 평균을 구한 것이다. 이를 구하는 방법은 부록에 정리되어 있다. <표 1>을 살펴보면 $\delta \leq 1.0$ 인 경우에는 한 표본관찰시점에서 얻게 되는 관찰값의 개수가 상당히 크다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, $\delta = 0.5$ 인 경우 관찰값의 수가 10보다 클 확률은 0.43이고, 25보다 클 확률도 0.35나 되는 것을 알 수 있다. 또한 매 표본관찰시점에서 평균적으로 18개 정도

표 1. 축차관리도의 관찰값 개수에 관한 확률

($\gamma=0.15, b = 16.01, g = 0.00$ 인 경우) (SN : 한 표본관찰시점에서 얻게 되는 관찰값의 개수)

$\delta \backslash SN$	>5	>10	>15	>20	>25	평균
0.00	0.17	0.10	0.07	0.05	0.04	5.00
0.25	0.31	0.24	0.21	0.20	0.18	17.04
0.50	0.46	0.43	0.41	0.39	0.35	18.21
1.00	0.74	0.73	0.56	0.25	0.08	14.48
2.00	0.97	0.20	0.00	0.00	0.00	8.97

의 관찰값을 얻어야 함을 알 수 있다. 따라서 앞서 언급한 바와 같이 한 표본관찰시점에서 얻을 수 있는 관찰값의 수가 한정되어 있는 경우에는 기존의 축차관리도를 사용할 수 없게 된다.

3. 누적 축차관리도

이 연구에서는 한 표본관찰시점에서 취할 수 있는 표본크기에 제약이 없는 경우에만 사용이 가능하도록 설계된 축차관리도의 문제점을 개선한 누적 축차관리도(cumulative sequential control chart)를 제안한다. 누적 축차관리도에서는 한 표본관찰시점에서 얻을 수 있는 표본크기의 상한을 N 이라 하면, N 번째 관찰값을 얻을 때까지도 공정의 이상에 대한 뚜렷한 증거가 없을 경우에는 다음 표본관찰시점으로 넘어간 후 이전 시점에서 얻어진 타점통계량의 값을 누적하여 사용한다. 즉, 타점통계량이 공정평균의 변화에 민감하도록 현재 공정상태에 대한 정보를 다음 시점에서 함께 이용한다. 따라서 누적 축차관리도에서는 i 번째 표본관찰시점에서 j 번째 관찰값을 얻었을 때의 타점통계량으로

$$Y_{ij} = y_{i-1} + \sum_{k=1}^j (Z_{ik} - \gamma), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

를 사용한다. 여기서 y_{i-1} 은 $i-1$ 번째 표본관찰시점에서 얻어진 공정에 대한 정보를 나타내는 값으로, i 번째 표본관찰시점에서 누적하여 사용된다. 따라서 $i-1$ 번째 표본관찰시점에서 얻은 관찰값의 수가 n_{i-1} 일 때

$$y_{i-1} = \begin{cases} 0, & Y_{i-1, n_{i-1}} \leq g \\ Y_{i-1, n_{i-1}}, & g < Y_{i-1, n_{i-1}} \leq h \end{cases} \quad n_{i-1} = 1, \dots, N \quad (3)$$

이며, y_0 는 공정이 이상상태로 시작되는 경우, 이를 빠르게 탐지하기 위해 도입된 값이다.

누적 축차관리도의 운영절차는 다음과 같다.

i 번째 표본관찰시점에서 j 번째 관찰값을 얻었을 때,

- i) $Y_{ij} > h$ 이면 공정이 이상상태라고 판단하여 검사를 중단하고 공정을 조사한다.
- ii) $Y_{ij} \leq g$ 이면 공정이 관리상태라고 판단하여 검사를 중단하고 $(i+1)$ 번째 표본관찰시점으로 넘어간다. 이 때 $y_i = 0$ 으로 한다.
- iii) $g < Y_{ij} \leq h$ 이면,

- (a) $j \leq N-1$ 인 경우에는 추가적으로 관찰값을 하나 더 얻어 위의 절차를 반복한다.
- (b) $j = N$ 인 경우에는 $y_i = Y_{i, N}$ 으로 하여 $(i+1)$ 번째 표본관찰시점으로 넘어간다.

<그림 2>는 $N=5$ 인 경우의 누적 축차관리도의 예이다. 첫번째 표본관찰시점에서 실시한 $SPRT_1$ 에서 마지막 5번째로 얻은 타점통계량의 값이 $g < Y_{1,5} \leq h$ 가 되므로, $SPRT_2$ 에서의 타점통계량의 초기값을 $y_1 = Y_{1,5}$ 로 한다. $SPRT_2$ 에서는 2개의 관찰값을 취한 후 $Y_{2,2} > h$ 가 되어 이상신호가 발생하게 된다.

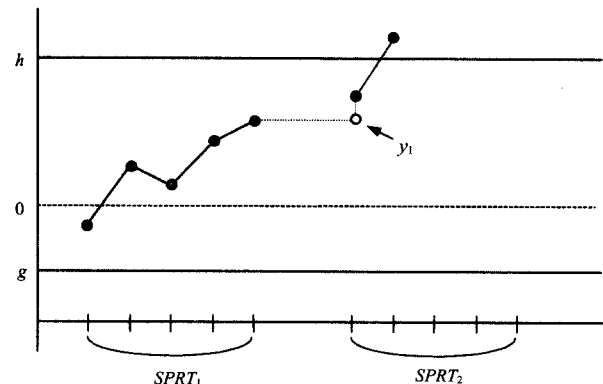


그림 2. 누적 축차관리도의 예($N=5$ 인 경우).

4. 수행도 평가 척도

관리도의 성능을 평가하는 여러 가지 수행도 평가 척도들 중에서 널리 쓰이는 것으로 관리도에 의하여 이상신호가 발생될 때까지의 평균 표본추출횟수인 ARL (average run length), 이상신호가 발생될 때까지 얻게 되는 총 관찰값 개수의 평균인 ANOS (average number of observations to signal)와 매 표본관찰시점에서 얻게 되는 표본크기의 평균인 ASN (average sample number) 등이 있다. FSS 관리도에서는 매 표본관찰시점에서 얻게 되는 표본의 크기가 동일하므로 표본의 크기를 n 이라고 할 때, $ASN = n$ 이고 $ANOS = n \cdot ARL$ 이 되어 ARL만으로 관리도의 성능을 평가할 수 있다. 그러나 VSS 관리도와 축차관리도에서는 매 표본관찰시점에서의 표본의 크기가 서로 다르므로 ARL뿐만 아니라 ANOS와 ASN도 관리도의 성능을 평가하는 척도가 된다.

관리도의 수행도 평가를 위한 식들은 마코프 연쇄(Brook와 Evans, 1972) 혹은 적분방정식(Goel과 Wu, 1971)을 이용하여 구할 수 있다. 이 논문에서는 비교적 적용범위가 넓은 마코프 연쇄를 이용하여 이들을 유도한다. 기존의 축차관리도에서는 매 표본관찰시점에서의 축차확률비검정들이 서로 독립적으로 수행되므로 한 표본관찰시점에서 수행되는 축차확률비검정의 특성을 알아내면 모든 표본관찰시점에서의 특성뿐 아니라 관리도 전체의 특성을 밝힐 수가 있다. 그러나 누적 축차관리도에서는 현 표본관찰시점에서의 결과를 다음 표본관찰시점에서 이용하므로 매 표본관찰시점에서 실시되는 축차확률비검정들은 서로 독립이 아니다. 따라서 누적 축차관리도의 특성을 알아내기 위해서는 한 표본관찰시점 내에서의 타점통계량의 전이뿐 아니라 표본관찰시점들 사이에서의 전이를 고려하여 두 종류의 마코프 연쇄를 구성해야 한다.

누적 축차관리도의 특성을 알아내기 위한 마코프 연쇄의 상태를 정의하기 위해서는 타점통계량이 취할 수 있는 값에 따라 관리도를 몇 개의 구간으로 나누어야 한다. 구간 $(-\infty, g]$ 를 Ω_0 , 구간 (h, ∞) 를 Ω_{m+1} 이라 하고, 구간 $(g, h]$ 를 m 개로 나누어 이를 각각 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ 이라 하자.

먼저 한 표본관찰시점 내에서의 타점통계량의 전이를 나타내는 내부 마코프 연쇄의 상태는 i 번째 표본관찰시점에서 j 번째로 얻어진 타점통계량 Y_{ij} 가 취할 수 있는 값을 이용하여 정의할 수 있다. Y_{ij} 가 Ω_0 또는 Ω_{m+1} 에 속하면 현 표본관찰시점에서의 검사를 중단하게 되므로 Ω_0 와 Ω_{m+1} 은 흡수 상태(absorbing state)가 되고, 나머지 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ 은 일시상태(transient state)가 된다. 이렇게 나누어진 $m+2$ 개의 상태들간의 전이확률(transition probability)로 이루어진 내부 마코프 연쇄의 전이확률행렬 R 은

$$R = \begin{bmatrix} P & L_1 & U_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

이 된다. 여기서 P 는 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ 간의 전이를 나타내는 전이확률행렬이고, L_1 은 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ 에서 Ω_0 로의 전이를, U_1 은 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ 에서 Ω_{m+1} 로의 전이를 나타내는 전이확률벡터이다.

다음으로 표본관찰시점들간의 전이를 다루기 위한 외부 마코프 연쇄는 매 표본관찰시점에서 마지막으로 얻어진 타점통계량 $Y_{i,n_i} (= y_i)$ 가 취할 수 있는 값을 이용하여 정의한다. Y_{i,n_i} 가 Ω_{m+1} 에 속하면 공정이 이상상태라고 판단되어 관리도의 운영을 일시적으로 중지하게 되므로 Ω_{m+1} 은 흡수상태가 되고, 나머지 구간에 속하면 공정이 관리상태라고 판단되어 다음 표본관찰시점에서 계속하여 관리도를 운영하게 되므로 $\Omega_0, \dots, \Omega_m$ 은 일시상태가 된다. 이렇게 나누어진 상태들간의 전이확률행렬 W 는

$$W = \begin{bmatrix} Q & (I-Q)\mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 Q 는 일시상태 $\Omega_0, \dots, \Omega_m$ 간의 전이확률들로 이루어진 전이확률벡터로, 식 (4)의 전이확률행렬 R 을 이용하여 부록에서와 같이 구할 수 있다. 또한, 관리도 시작시에 타점통계량의 초기값이 y_0 인 경우, Y_{1,n_1} 의 값이 일시상태 $\Omega_0, \dots, \Omega_m$ 에 있을 확률들로 이루어진 초기확률벡터를 $\mathbf{q}(y_0)$ 라 하자. 이상의 전이확률행렬과 초기확률벡터를 이용하면 아래와 같은 누적 축차관리도의 ARL, ANOS, ASN을 얻을 수 있다. 이에 대한 유도과정은 부록에 정리되어 있다.

$$ARL = 1 + \mathbf{q}(y_0)^T (I-Q)^{-1} \mathbf{1} \quad (6)$$

$$ANOS = ES(y_0) + \mathbf{q}(y_0)^T (I-Q)^{-1} \mathbf{V}_S \quad (7)$$

$$ASN = \frac{ANOS}{ARL} \quad (8)$$

여기서 $ES(a)$ 는 타점통계량의 초기값이 a 인 표본관찰시점에서 얻게 되는 관찰값의 평균개수를 나타내며, $\mathbf{V}_S = \{ES(\omega_0), \dots, ES(\omega_m)\}^T$ 이다. 또한 ω_v 는 각 구간 Ω_v 의 대표값으로 $\omega_0 = 0$ 이고 그 이외의 구간에서는 각 구간의 중간값이다.

5. 수행도 평가

\bar{X} 관리도 및 누적합 관리도와의 비교

이 절에서는 제안된 누적 축차관리도를 FSS \bar{X} 관리도, VSS \bar{X} 관리도(Costa, 1994), FSS 누적합 관리도(Page, 1954) 및 VSS 누적합관리도(Annadi *et al.*, 1996)와 비교한다. 관리도들을 서로 동일한 조건에서 비교하기 위하여 이 논문에서는 공정이 관리 상태일 경우의 ARL과 ASN인 ARL_0 와 ASN_0 를 동일하게 맞춘 후, 공정이 이상상태일 경우의 ARL과 ANOS인 ARL_1 과 $ANOS_1$ 을 비교한다. 이 경우 ARL_1 의 값이 작은

관리도가 성능이 더 좋은 관리도라 할 수 있고, ARL_1 의 값이 유사한 경우 $ANOS_1$ 의 값이 작은 관리도가 더 효율적이라 할 수 있다.

누적 축차관리도의 수행도는 제 4절에서 설명한 방법을 이용하여 구하고, FSS 및 VSS \bar{X} 관리도의 수행도는 Costa(1994)가 유도한 식을 이용하며, FSS 및 VSS 누적합 관리도의 수행도는 Annadi 등(1996)이 유도한 식을 이용하기로 한다.

<표 2>와 <표 3>은 각각 N 이 10과 5인 경우의 누적 축차 관리도, \bar{X} 관리도, 누적합 관리도의 ARL과 ANOS 값들을 구한 것이다. \bar{X} 관리도와 누적합 관리도에서는 표준화된 타점통계량의 값이 관리한계선 h 보다 크면 공정에 이상이 발생했다고 판단한다. VSS 관리도에서는 2종류의 표본크기 n_1 과

표 2. $N=10$ 인 경우의 누적 축차관리도, \bar{X} 관리도, 누적합 관리도의 ARL_1 과 $ANOS_1$

(a) $ARL_0=740.8, ASN_0=3.0$ 인 경우

δ	누적 축차관리도		FSS \bar{X} 관리도		VSS \bar{X} 관리도				FSS 누적합 관리도		VSS 누적합 관리도			
					$n_1=2, n_2=7$		$n_1=1, n_2=10$				$n_1=2, n_2=7$		$n_1=1, n_2=10$	
	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$
0.25	18.87	107.91	194.96	584.87	166.04	588.84	143.76	530.86	36.62	109.87	29.34	124.72	30.97	134.35
0.50	6.44	40.32	60.89	182.68	37.72	134.74	20.94	88.74	16.02	48.05	13.75	59.16	15.55	66.50
0.75	3.84	24.49	22.48	67.45	8.93	40.10	6.08	26.19	10.27	30.80	9.05	39.23	10.41	45.35
1.0	2.77	17.60	9.76	29.29	4.05	18.62	3.41	14.64	7.59	22.77	6.80	29.72	7.86	35.09
1.5	1.77	11.29	2.91	8.72	2.06	9.38	2.25	10.85	5.06	15.17	4.66	20.64	5.42	25.73
2.0	1.16	8.36	1.47	4.42	1.59	6.93	1.94	10.55	3.85	11.55	3.65	16.33	4.14	20.05
2.5	1.03	6.67	1.10	3.30	1.30	5.06	1.72	9.57	3.15	9.45	2.94	13.01	3.28	15.51
3.0	1.01	5.57	1.01	3.04	1.11	3.75	1.51	7.89	2.74	8.21	2.46	11.16	2.92	14.53
γ	0.15	0.15	.	0.15	.	0.15	.
h	14.28	.	3.00	.	3.00	.	3.00	.	10.96	.	10.96	.	10.96	.
g	0.37
ξ	0.84	.	0.76	.	.	.	3.88	.	3.61	.

(b) $ARL_0=740.8, ASN_0=6.0$ 인 경우

δ	누적 축차관리도		FSS \bar{X} 관리도		VSS \bar{X} 관리도				FSS 누적합 관리도		VSS 누적합 관리도			
					$n_1=2, n_2=7$		$n_1=1, n_2=10$				$n_1=2, n_2=7$		$n_1=1, n_2=10$	
	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$
0.25	15.28	129.87	117.94	707.65	108.31	694.42	89.44	610.40	23.92	143.52	22.47	150.46	20.58	160.61
0.50	5.50	46.56	26.37	158.19	22.46	149.43	14.74	108.8	10.94	65.61	10.64	71.45	10.46	78.93
0.75	3.41	28.06	8.17	49.00	7.32	49.22	4.97	37.39	7.15	42.87	7.15	48.07	7.25	54.17
1.0	2.52	20.08	3.44	20.62	3.62	24.13	2.87	21.44	5.36	32.14	5.49	36.94	5.62	42.30
1.5	1.84	12.84	1.33	8.00	1.97	12.80	2.02	15.30	3.64	21.87	3.90	26.20	3.95	30.56
2.0	1.25	9.48	1.03	6.18	1.57	10.02	1.86	14.29	2.88	17.27	3.11	20.77	3.23	25.90
2.5	1.01	7.55	1.00	6.01	1.30	8.07	1.69	12.88	2.24	13.45	2.78	18.49	2.79	22.82
3.0	1.00	6.30	1.00	6.00	1.11	6.75	1.50	10.99	2.01	12.04	2.26	14.80	2.20	17.64
γ	0.15	0.15	.	0.15	.	0.15	.
h	16.36	.	3.00	.	3.00	.	3.00	.	10.96	.	10.96	.	10.96	.
g	-0.85
ξ	-0.84	.	0.14	.	.	.	-0.08	.	1.14	.

표 3. $N=5$ 인 경우의 누적 축차관리도, \bar{X} 관리도, 누적합 관리도의 ARL_1 과 $ANOS_1$ ($ARL_0=740.8, ASN_0=3.0$ 인 경우)

δ	누적 축차관리도		FSS \bar{X} 관리도		VSS \bar{X} 관리도				FSS 누적합 관리도		VSS 누적합 관리도			
	ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$	$n_1=2, n_2=4$		$n_1=1, n_2=5$		ARL_1	$ANOS_1$	$n_1=2, n_2=4$		$n_1=1, n_2=5$	
					ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$			ARL_1	$ANOS_1$	ARL_1	$ANOS_1$
0.25	26.13	108.49	194.96	584.87	181.81	594.89	169.88	575.14	36.62	109.87	32.05	114.36	29.69	118.22
0.50	9.50	40.43	60.89	182.68	48.90	171.19	39.36	146.33	16.02	48.05	14.53	52.20	14.11	55.49
0.75	5.78	24.52	22.48	67.45	16.34	59.67	12.43	48.92	10.27	30.80	9.48	34.19	9.44	36.96
1.0	4.19	17.61	9.76	29.29	7.10	26.27	5.62	22.55	7.59	22.77	7.09	25.68	7.17	28.14
1.5	2.74	11.31	2.91	8.72	2.63	9.44	2.53	9.96	5.06	15.17	4.80	17.55	4.93	19.68
2.0	2.11	8.38	1.47	4.42	1.67	5.70	1.92	7.45	3.85	11.55	3.71	13.61	3.82	15.51
2.5	1.89	6.68	1.10	3.30	1.30	4.21	1.70	6.45	3.15	9.45	3.09	11.31	3.19	13.21
3.0	1.51	5.59	1.01	3.04	1.11	3.43	1.50	5.50	2.74	8.21	2.77	10.06	2.91	12.22
γ	0.15	0.15	.	0.15	.	0.15	.
h	14.32	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	10.96	10.96	10.96	10.96	10.96	10.96
g	0.02
ξ	0.00	0.00	0.00	0.00	.	.	1.44	1.44	1.44	1.44

$n_2(> n_1)$ 를 사용하여 타점통계량의 값이 경계한계선 (threshold limit) ξ 보다 작으면 다음 표본관찰시점에서 크기 n_1 의 표본을 취하고, ξ 보다 크면 크기 n_2 의 표본을 취한다. <표 2>의 (a)와 (b)는 $N=10$ 인 경우, $ARL_0=740.8$ 로 동일하게 하면서 ASN_0 가 각각 3.0과 6.0이 되도록 관리한계선과 경계한계선을 조정 한 후 계산한 ARL_1 과 $ANOS_1$ 값이고, <표 3>은 $N=5$ 인 경우, $ASN_0=3.0$ 이 되도록 한 후 계산한 값이다. 이들 표에는 각 관리도의 관리한계선 및 경계한계선의 값들도 포함되어 있다.

이들 표로부터 다음의 내용을 알 수 있다.

- (a) 제안된 누적 축차관리도는 \bar{X} 관리도, 누적합 관리도보다 공정평균의 변화를 더 빨리 탐지한다. 특히 $\delta \leq 1.0$ 정도로 공정평균의 변화가 크지 않은 경우에는 그 성능이 매우 우수하다. 공정평균의 변화가 큰 경우에는 이를 탐지하는 능력이 누적합 관리도보다 뛰어나고, \bar{X} 관리도와 비슷하게 된다.
- (b) 공정평균의 변화가 아주 큰 경우를 제외하고는 누적 축차관리도의 $ANOS_1$ 값이 \bar{X} 관리도, 누적합 관리도의 $ANOS_1$ 값보다 작다.

기존 축차관리도와의 비교

<그림 3>은 $ARL_0=740.8$ 이고 $ASN_0=3.0$ 인 누적 축차관리도에서 N 을 변화시켜 가면서 $\delta=0.50, 1.50$ 일 때의 ARL_1 과 $ANOS_1$ 을 계산하여 도표화한 것이다. 이를 살펴 보면 N 이 증가함에 따라 ARL_1 은 일정한 값으로 수렴하고 $ANOS_1$ 은 거의 동일한 값을 유지함을 알 수 있다. 또한 $N < 15$ 인 경우 ARL_1 이 빠르게 감소하고, 이후에는 $N = \infty$

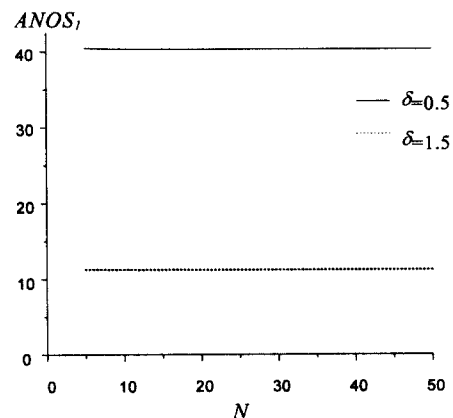
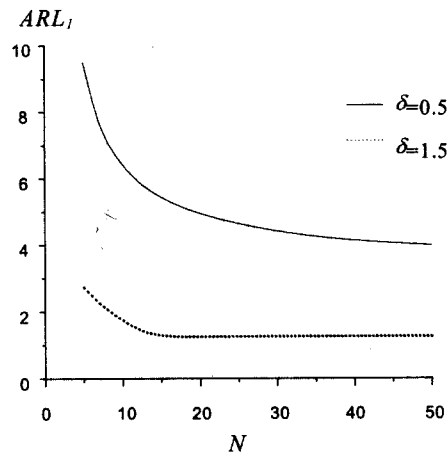


그림 3. N 에 따른 누적 축차관리도의 ARL_1 과 $ANOS_1$.

표 4. 누적 축차관리도의 FIR특성
($N=10$, $\gamma=0.15$, $h=15.92$, $g=-0.41$ 인 경우)

δ	$y_0=0.0$		$y_0=3.18$ ($y_0=h/5$)		$y_0=5.31$ ($y_0=h/3$)		$y_0=7.96$ ($y_0=h/2$)	
	ARL	ANOS	ARL	ANOS	ARL	ANOS	ARL	ANOS
0.0	740.80	3704.00	737.87(0.4)	3691.46(0.3)	726.81(1.9)	3642.48(1.7)	696.45(6.0)	3497.38(5.6)
0.25	15.74	123.96	13.10(16.8)	112.49(9.3)	11.23(28.7)	99.03(20.1)	8.78(44.2)	78.59(36.6)
0.50	5.63	44.99	4.32(23.3)	38.06(15.4)	3.68(34.6)	32.19(28.5)	2.92(48.1)	24.66(45.2)
0.75	3.47	27.20	2.70(22.2)	22.46(17.4)	2.35(32.3)	18.93(30.4)	1.89(45.5)	14.51(46.7)
1.0	2.55	19.51	2.07(18.8)	15.95(18.2)	1.81(29.0)	13.45(31.1)	1.43(43.9)	10.34(46.5)
1.5	1.82	12.50	1.40(23.1)	10.17(18.6)	1.17(35.7)	8.60(31.2)	1.04(42.9)	6.63(45.9)
2.0	1.21	9.24	1.03(14.9)	7.52(18.6)	1.01(16.5)	6.37(31.1)	1.00(17.4)	4.94(46.5)
2.5	1.01	7.36	1.00(1.0)	6.01(18.3)	1.00(1.0)	5.10(30.7)	1.00(1.0)	3.98(45.9)
3.0	1.00	6.15	1.00(0.0)	5.03(18.2)	1.00(0.0)	4.28(30.4)	1.00(0.0)	3.36(45.4)

인 기존 축차관리도와 크게 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 이는 제안된 누적 축차관리도는 현실적인 제약을 만족하면서 기존 축차관리도의 성능에 크게 뒤지지 않음을 의미한다.

c_0 의 변화에 따른 효과 분석

Lucas와 Crosier(1982)는 공정이 이상상태로 시작되는 경우 이를 조기에 발견하기 위하여 관리도의 타점통계량의 초기값으로 0보다 큰 값을 사용할 것을 제안하고, 누적합 관리도에 적용하였다. 이러한 경우에 나타나는 특성을 FIR(fast initial response)이라 한다. 제안된 누적 축차관리도에도 이를 위하여 관리도 시작시에 타점통계량의 초기값 y_0 를 0보다 큰 값으로 설정할 수 있다. <표 4>는 초기값 y_0 에 따른 누적 축차관리도의 ARL과 ANOS의 변화를 나타낸 것이다. 표에서 괄호안의 값은 $y_0=0$ 인 경우에 비하여 $y_0=a$ 를 사용한 경우의 ARL과 ANOS의 감소량을 백분율로 표시한 PD(percent difference)값으로

$$PD_{ARL}(a) = \frac{ARL(0) - ARL(a)}{ARL(0)} \times 100(\%)$$

$$PD_{ANOS}(a) = \frac{ANOS(0) - ANOS(a)}{ANOS(0)} \times 100(\%)$$

이다. 여기서 $ARL(a)$ 와 $ANOS(a)$ 는 각각 타점통계량의 초기값이 $y_0=a$ 인 경우의 ARL과 ANOS이다. <표 4>에 서 y_0 가 증가함에 따라서 ARL과 ANOS 값이 줄어드는 경향이 있음을 알 수 있다. 이때, ARL_0 와 $ANOS_0$ 의 감소량에 비하여 ARL_1 과 $ANOS_1$ 의 감소량은 상당히 크다. 예를 들어 공정평균이 $\delta=0.5$ 만큼 증가한 경우를 살펴보면,

$y_0 = h/5$ 인 경우 ARL_0 와 $ANOS_0$ 에는 거의 변화가 없으나 ARL_1 과 $ANOS_1$ 은 각각 23.3%, 15.4%정도 감소했다. 따라서 제안된 누적 축차관리도에서 y_0 를 0보다 큰 값으로 하면, ARL_0 와 $ANOS_0$ 에는 거의 영향을 미치지 않으면서 공정이 이상상태로 시작하는 경우를 보다 빠르게 탐지할 수 있다.

6. 누적 축차관리도의 설계

누적 축차관리도를 실제로 사용하기 위해서는 관리도의 사용 환경 등을 고려하여 표본채취간격, 관리한계선 등의 값을 미리 결정해 주어야 한다. 관리도의 설계에 관한 연구로는 누적합 관리도에 관한 Gan(1991), 축차관리도에 관한 Stoumbos와 Reynolds(1997) 등이 있다. 이 절에서는 이들의 연구를 기초로 제안된 관리도의 설계절차를 제시한다.

누적 축차관리도의 설계절차를 요약하면 다음과 같다.

1단계(사전준비): 표본채취간격, 표본크기의 상한 N , ASN_0 및 ARL_0 의 결정

작업자의 교대시간, 새로운 자재를 투입하는 시간 등 공정의 자연스런 변화시점을 기준으로 표본채취간격을 정한다. 또한, 샘플링 시간이나 비용, 거짓경보에 의한 손실, 공정이 이상상태로 운영되는 동안 발생하는 손실 등을 고려하여 N , ASN_0 및 ARL_0 를 결정한다.

2단계(설계변수 결정): 참고값 γ , 관리한계선 h 와 g 의 결정
가장 빠르게 찾고자 하는 공정평균의 변화를 $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ 라 할 때, $\gamma = \delta/2$ 로 한다. 또한 앞의 1단계에서 결정한 ASN_0 와 ARL_0 를 만족하는 관리한계선 h 와 g 를 식 (6)과 (8)을 이용

하여 결정한다. <그림 4>는 h 와 g 를 쉽게 찾을 수 있도록 $N=10$ 인 경우에 대하여 도표화 한 것이다. $N=10$ 인 경우, γ 가 주어지면 각각 $ARL_0 = 250.0, 740.8, 1500.0$ 과 $ASN_0 = 3.0, 5.0, 7.0$ 을 만족하는 h 와 g 를 <그림 4>로부터 찾을 수 있다. 이외의 값은 보간법을 이용하여 구할 수 있다.

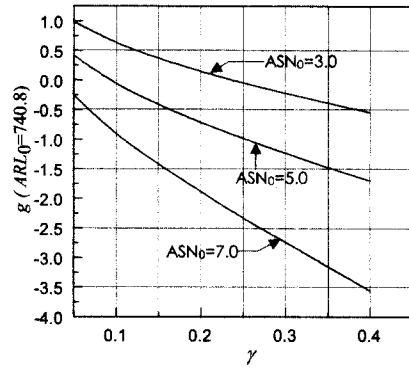
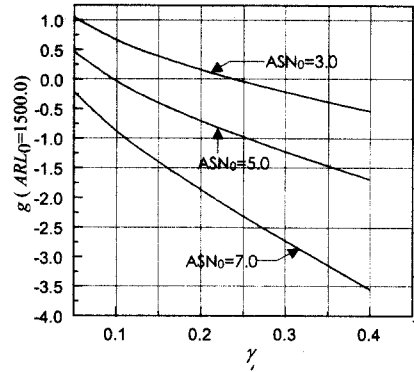
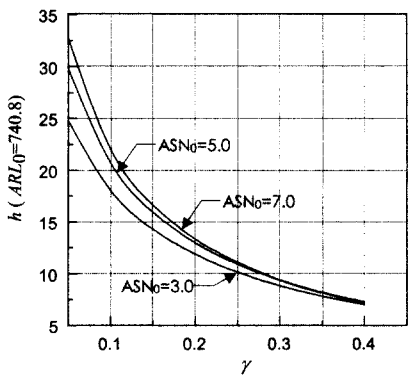
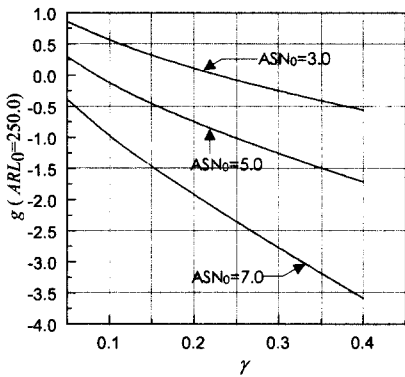
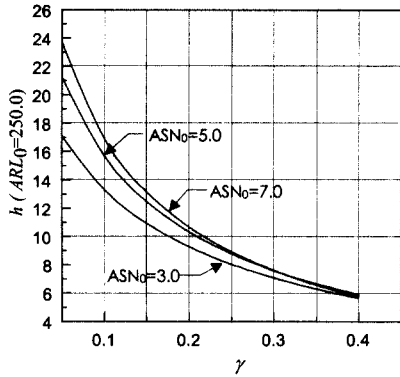


그림 4. N, ARL_0, ASN_0, γ 에 따른 누적 측차관리도의 h 와 g ($N=10$ 인 경우).

3단계(관리도 성능분석 및 설계변수 재설정): 관리도의 수행도 분석 및 결정변수들의 재설정

식 (6) ~ (8)을 이용하여 설계된 관리도의 성능을 평가한다. 관리도의 수행도가 예상치에 미치지 못한다면 원하는 결과를 얻도록 γ, ASN_0, ARL_0 를 조금씩 수정한 후 2단계를 반복한다. 또한 y_0 를 0보다 큰 값으로 설정하여 FIR 특성을 나타내도록 할 수도 있다.

[예제 1] 어느 회사의 품질관리 부서에서는 공정관리를 위하여 2시간 마다 3개씩의 관찰값을 얻어 이들로부터 구한 표본평균을 \bar{X} 관리도에 타점하여 공정을 관리하고 있다. 최근 이 부서에서는 지금까지 사용하던 \bar{X} 관리도가 공정의 변화를 빠르게 탐지하지 못한다고 판단하여 누적 측차관리도를 도입하기로 하였다. 이 때, 생산되는 제품의 품질특성치는 평균이 0.5이고 표준편차가 0.05인 정규분포를 따르며, 관찰값 하나를 얻어 검사하는 데 평균 10여분의 시간이 걸린다고 알려져 있다. 따라서 쉬지 않고 검사를 하더라도 한 표본관찰시점에서 10개 정도의 관찰값만을 검사할 수 있다. 그러나 작업자들의 피로도

표 5. [예제 1]의 누적 축차관리도의 수행도

δ	누적 축차관리도 ($y_0=0.0$)			누적 축차관리도 ($y_0=h/2=4.0$)			\bar{X} 관리도		
	ARL	ANOS	ASN	ARL	ANOS	ASN	ARL	ANOS	ASN
0.00	250.0	750.0	3.00	229.99	699.06	3.04	250.0	750.0	3.00
0.25	17.24	84.79	4.92	11.21	63.98	5.71	75.52	226.56	3.00
0.50	4.92	28.92	5.88	2.41	17.94	7.43	26.99	80.97	3.00
0.75	2.73	16.43	6.02	1.40	9.44	6.76	11.36	34.08	3.00
1.0	1.88	11.43	6.08	1.11	6.41	5.76	5.59	16.77	3.00
1.5	1.18	7.14	6.05	1.00	3.98	3.97	2.09	6.27	3.00
2.0	1.04	5.23	5.03	1.00	2.95	2.95	1.26	3.78	3.00
2.5	1.01	4.16	4.12	1.00	2.39	2.39	1.04	3.12	3.00
3.0	1.00	3.48	3.48	1.00	2.05	2.05	1.01	3.03	3.00

등을 감안하면 매년 10개의 관찰값을 검사하는 것은 무리이고 종전과 같이 표본관찰시점당 평균적으로 3개씩을 검사하는 것이 합리적이다. 이런 상황에서 위의 설계절차를 이용하여 누적 축차관리도를 설계하면 다음과 같다.

1단계: 표본채취간격은 2시간, $N=10$, $ASN_0=3.0$ 이 된다. 또한, 이 회사에서는 거짓경보에 의해 공정을 자주 조사하는 경우가 발생하더라도 공정의 이상을 빠르게 탐지하는 것이 중요하다고 생각하여 $ARL_0=250.0$ 정도로 하기로 하였다.

2단계: 제품의 품질특성치는 조금만 변화하여도 제품에 큰 영향을 미치게 되므로 $\mu_1=\mu_0+0.5\sigma$ 로 하여 $\gamma=0.25$ 로 결정하였다. 따라서 <그림 4>에서 대략 $h=8.0$, $g=-0.1$ 이 된다.

3단계: 위에서 얻은 관리도의 ARL_1 , $ANOS_1$ 과 ASN_1 을 구하면 <표 5>와 같다. 또, 이 회사에서는 잘못된 준비작업(set-up)에 의한 피해를 줄이고자 $y_0=h/2$ 로 하여 FIR특성을 이용하고자 하였다.

<표 5>는 새로 도입한 누적 축차관리도와 기존의 \bar{X} 관리도의 수행도를 나타낸 것이다. <표 5>에서 누적 축차관리도의 수행도가 기존의 \bar{X} 관리도의 수행도보다 우수함을 알 수 있다. 또한 타점통계량의 초기값을 $h/2$ 로 설정한 경우에는 공정이 이상상태로 시작하는 것을 더 빠르게 탐지함을 알 수 있다.

7. 결론

이 논문에서는 시간이나 비용 등의 제약으로 인하여 한 표본 관찰시점에서 얻을 수 있는 관찰값의 최대 개수에 제약이 있는 경우에 이용할 수 있는 누적 축차관리도를 제안하고 이의 설계절차에 대해 다루었다. 제안된 누적 축차관리도의 수행도를 평가할 수 있는 ARL, ANOS, ASN을 계산하는 식들을

마코프 연쇄방법을 이용하여 유도하였다. 누적 축차관리도의 수행도를 분석하여 기존의 \bar{X} 관리도와 누적합 관리도보다 공정평균의 변화를 탐지하는 능력이 우수함을 보였다. 따라서 표본크기의 제약으로 인해 기존의 축차관리도를 사용하기가 어려운 경우 누적 축차관리도를 사용하면 기존의 관리도에 비해 공정평균의 변화를 빠르게 탐지할 수 있게 된다. 이 논문에서는 ARL, ASN 등의 통계적 기준을 이용하여 제안된 관리도를 설계하는 방법을 제시하였으나, 관리도 운영시의 비용을 고려하여 제안된 관리도를 경제적인 관점에서 설계하는 연구도 필요하다고 여겨진다.

참고문헌

- Annadi, H. P., Keats, J. B., Runger, G. C. and Montgomery, D. C.(1996), An adaptive sample size CUSUM control chart, *International Journal of Production Research*, 33(6), 1605-1616.
- Brook, D. and Evans, D. A.(1972), An approach to the probability distribution of cusum run Length, *Biometrika*, 59(3), 539-549.
- Costa, A. F. B.(1994), \bar{X} charts with variable sample size, *Journal of Quality Technology*, 26(3), 155-163.
- Gan, F. F.(1991), An optimal design of CUSUM quality control charts, *Journal of Quality Technology*, 23(4), 279-286.
- Goel, A. L. and Wu, S. M.(1971), Determination of A.R.L. and a contour nomogram for CUSUM charts to control normal mean, *Technometrics*, 13(2), 221-230.
- Lucas, J. M. and Crosier, R. B.(1982), Fast initial response for CUSUM quality control schemes: give your CUSUM a head start, *Technometrics*, 24(3), 199-205.
- Page, E.S.(1954), Continuous inspection schemes, *Biometrika*, 41, 100-114.
- Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B.(1993), \bar{X} chart with adaptive sample sizes, *International Journal of Production Research*, 31(12), 2895-2909.
- Stoumbos, Z. G. and Reynolds, M. R.(1997), Control charts applying a sequential test at fixed sampling intervals, *Journal of Quality Technology*, 29(1), 21-29.
- Tagaras, G.(1998), A survey of recent developments in the design of adaptive control charts, *Journal of Quality Technology*, 30(3), 212-231.
- Wald, A.(1947), *Sequential Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

부 록: 누적 측차관리도의 수행도 평가 측도 유도

부록에서는 식 (6) ~ (8)의 누적 측차관리도의 ARL, ANOS, ASN 을 유도한다.

내부 마코프 연쇄에서 타점통계량이 상태 Ω_u 에 있을 때, n 번 전이한 후에 상태 Ω_v 에 있게 될 전이확률들로 구성된 전이 확률행렬은 Chapman-Kolmogorov 방정식을 이용하여 식 (4)의 전이확률행렬 R 을 n 번 곱하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R^n = \begin{bmatrix} P^n & L_n & U_n \\ \mathbf{0}^T & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A1)$$

여기서 $P^0 = I$, $L_0 = U_0 = \mathbf{0}^T$ 라 하면,

$$L_n = P^{n-1} L_1 + L_{n-1} \\ = (I - P)^{-1} (I - P^n) L_1,$$

$$U_n = (I - P)^{-1} (I - P^n) U_1$$

이 된다.

i 번째 표본관찰시점에서 n_i 개의 관찰값로부터 마지막으로 얻은 타점통계량의 값을 Y_{i,n_i} 라 할 때, 외부 마코프 연쇄의 상태 $\Omega_0, \dots, \Omega_m$ 간의 전이확률 q_{uv} 는 표본관찰시점내의 전이를 나타내는 식 (A1)으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$q_{u0} = \Pr \{ Y_{i+1, n_{i+1}} \in \Omega_0 \mid Y_{i, n_i} \in \Omega_u \} \\ \cong \Pr \{ Y_{i+1, n_{i+1}} \in \Omega_0 \mid y_i = \omega_u \} \\ = \beta(\omega_u) + \boldsymbol{p}(\omega_u)^T L_{N-1} \\ = \beta(\omega_u) + \boldsymbol{p}(\omega_u)^T (I - P)^{-1} (I - P^{N-1}) L_1, \\ (u = 0, \dots, m)$$

$$q_{uv} = \Pr \{ Y_{i+1, n_{i+1}} \in \Omega_v \mid Y_{i, n_i} \in \Omega_u \} \\ \cong \Pr \{ Y_{i+1, n_{i+1}} \in \Omega_v \mid y_i = \omega_u \} \\ = \left[\boldsymbol{p}(\omega_u)^T P^{N-1} \right]_v, \\ (u = 0, \dots, m, v = 1, \dots, m) \quad (A2)$$

여기서 $\boldsymbol{p}(a)$ 는 $p_v(a) = \Pr \{ Y_n \in \Omega_v \mid y_{n-1} = a \}$, $v = 1, \dots, m$ 을 원소로 하는 열벡터이고, $\beta(a) = \Pr \{ Y_n \in \Omega_0 \mid y_{n-1} = a \}$ 이며 $[V]_n$ 은 벡터 V 의 n 번째 원소를 의미한다. 따라서 식 (5)에서 전이확률행렬 Q 의 (i, j) 번째 원소는 $q_{i-1, j-1}$ 이 된다.

관리도 시작시 타점통계량의 초기값이 $y_0 = a$ 로 주어진 경우, 초기확률벡터 $\boldsymbol{q}(a)$ 의 원소 $q_v(a)$ 는

$$q_0(a) = \Pr \{ Y_{1, n_1} \in \Omega_0 \mid y_0 = a \} \\ = \beta(a) + \boldsymbol{p}(a)^T L_{N-1} \\ = \beta(a) + \boldsymbol{p}(a)^T (I - P)^{-1} (I - P^{N-1}) L_1,$$

$$q_v(a) = \Pr \{ Y_{1, n_1} \in \Omega_v \mid y_0 = a \} \\ = \left[\boldsymbol{p}(a)^T P^{N-1} \right]_v \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad (A3)$$

이 된다.

식 (A2)의 전이확률로 구성된 식 (5)의 전이확률행렬 W 와 초기확률벡터 $\boldsymbol{q}(a)$ 를 이용하여 다음과 같이 누적 측차관리도의 ARL, ANOS, ASN 을 얻을 수 있다.

(1) ARL

전이확률행렬 W 에서 마코프 연쇄의 기본행렬(fundamental matrix)을 $X = (I - Q)^{-1}$ 라 하면 X 의 $(u+1, v+1)$ 번째 원소는 일시상태 Ω_u , $u = 0, \dots, w$ 에서 흡수상태 Ω_{m+1} 에 도달하기 까지 상태 Ω_v , $v = 0, \dots, m$ 를 거치게 되는 평균횟수를 의미한다. ARL은 흡수상태 Ω_0 에 도달하기까지 마코프 연쇄가 전이하게 되는 평균 횟수이므로,

$$ARL = 1 + \boldsymbol{q}(y_0)^T (I - Q)^{-1} \mathbf{1} \quad (A4)$$

이 된다.

(2) ANOS

ANOS는 마코프 연쇄가 흡수상태에 도달하기 전에 각 상태에서 얻게 되는 관찰값들의 합이다. 확률변수 T_v 를 흡수상태 Ω_0 에 도달하기 전에 일시상태 Ω_v 를 방문하게 되는 횟수라 하고, $S(a)$ 를 타점통계량의 초기값을 $y_i = a$ 로 하는 표본관찰시점에서 얻게 되는 관찰값의 개수라 하면 ANOS는

$$ANOS \cong E \left[T(y_0) + \sum_{k=1}^{T_0} S(\omega_0) + \dots + \sum_{k=1}^{T_m} S(\omega_m) \right]$$

가 된다. 그런데, $S(\omega_v)$ 는 T_v 와 무관하고 서로 독립인 동일한 분포를 따르게 된다. 따라서

$$ANOS \cong ES(y_0) + \sum_{i=0}^m ET_i ES(\omega_i) \quad (A5) \\ = ES(y_0) + \boldsymbol{q}(y_0)^T (I - Q)^{-1} V_S$$

이 된다.

여기서, $V_S = (ES(\omega_0), ES(\omega_1), \dots, ES(\omega_m))^T$ 이고, $ET_v = E(T_v)$ 이며 $ES(\omega_v) = E(S(\omega_v))$ 로 아래의 식 (A8)에서와 같이 구할 수 있다. 타점통계량의 초기값이 $y_i = a$ 인 표본관찰시점에서

S의 누적분포함수는

$$\begin{aligned} \Pr\{S \leq n \mid y_i = a\} &= 1 - \boldsymbol{p}(a)^T \boldsymbol{P}^{n-1} \mathbf{1} \\ (n = 1, \dots, N-1) \\ \Pr\{S \leq N \mid y_i = a\} &= 1 \end{aligned} \tag{A6}$$

이다. 따라서 S의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} \Pr\{S = 1 \mid y_i = a\} &= 1 - \boldsymbol{p}(a)^T \mathbf{1} \\ \Pr\{S = n \mid y_i = a\} &= \boldsymbol{p}(a)^T (\boldsymbol{P}^{n-2} - \boldsymbol{P}^{n-1}) \mathbf{1} \\ (n = 2, \dots, N-1) \end{aligned} \tag{A7}$$

$$\Pr\{S = N \mid y_i = a\} = \boldsymbol{p}(a)^T \boldsymbol{P}^{N-1} \mathbf{1}$$

이 되고, 이를 이용하여 ES(a)를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ES(a) &= \sum_{n=1}^N n \cdot \Pr\{S = n \mid y_i = a\} \\ &= 1 + \boldsymbol{p}(a)^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{N-1}) \mathbf{1} \end{aligned} \tag{A8}$$

(3) ASN

ASN은 이상신호가 발생할 때까지 얻은 총 관찰값의 개수를 평균 표본추출 횟수로 나누어 주면 되므로

$$ASN = \frac{ANOS}{ARL} \tag{A9}$$

가 된다.

(4) 기존 측차관리도의 관찰값 개수에 대한 분포

$u_0 = a$ 인 경우 기존 측차관리도의 관찰값 개수에 대한 분포는 식(A6)와 비슷하게 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pr\{S \leq n \mid u_0 = a\} &= \boldsymbol{p}(a)^T (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{n-1}) \mathbf{1} + (1 - \boldsymbol{p}(a)^T \mathbf{1}) \\ &= 1 - \boldsymbol{p}(a)^T \boldsymbol{P}^{n-1} \mathbf{1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{A10}$$