

2차원 사각 밀폐 공간에서의 구분 종좌표법을 위한 하이브리드 공간 차분법

김일경* · 김우승**
(1998년 8월 1일 접수)

A Hybrid Spatial Differencing Scheme for Discrete Ordinates Method in 2D Rectangular Enclosures

Il-Kyoung Kim and Woo-Seung Kim

Key Words : Discrete Ordinates Method (DOM, 구분 종좌표법), Hybrid Spatial Differencing Scheme (하이브리드 공간 차분법), Numerical Smearing (수치 소산), Fix-Up Procedure (수정 과정)

Abstract

A hybrid spatial differencing scheme for the discrete ordinates method is proposed to predict radiative heat transfer in two-dimensional rectangular enclosures. Since this scheme takes the advantages of the diamond scheme and step scheme and includes the characteristics of medium, more accurate and stable results can be obtained. In its development several spatial differencing schemes are examined to address the effect of numerical smearing (or false scattering). Predictions from the proposed hybrid scheme are compared to those of other schemes for transparent, purely absorbing, purely scattering, or absorbing-emitting-isotropically scattering media. It is found that the proposed scheme predicts stable and less smeared results than others.

기호설명	
E_b	: 방사력, πb
f	: 공간 차분 가중치
G	: 입사량
I	: 복사 강도
I_b	: 흑체 복사 강도
L_x, L_y	: 사각 밀폐 공간의 길이
N	: 종좌표의 총 개수
S	: 생성항, 식 (2b)
\vec{s}	: 복사 방향, 벡터
s	: 복사광의 이동 거리
w	: 방향 가중치
x, y	: 직교 좌표계

Φ	: 산란 위상 함수
κ	: 흡수 계수
σ_s	: 산란 계수
μ, ξ	: 방향 여현
Ω	: 입체각
상첨자	
'	: 입사 방향
m	: 방향 지수
하첨자	
E, W, N, S	: 제어 체적 P 주위의 격자점
e, w, n, s	: 제어 체적 P 의 경계면
H	: 하이브리드 도식
P	: 격자점

그리스 문자

β	: 소멸 계수, $\beta = \kappa + \sigma$
$\Delta x, \Delta y$: 격자의 길이

1. 서론

복사 열전달의 해석을 위하여 구분 종좌표법 (Discrete Ordinates Method, DOM)은 주된 관심의 대상이 되어왔다⁽¹⁻³⁾. 구분 종좌표법은 적분-미분형

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계공학파

방정식인 복사 전달 방정식을 1차 미분 방정식으로 근사화해서 해석하는 방법으로서 해석 기법이 비교적 단순하고, 기존의 유한 체적법⁽⁹⁾에의 적용이 용이하다. 그러나, 입체각내에서 연속적으로 변하는 복사광을 불연속의 종좌표로 근사화하는 과정에서 레이 효과(ray effect)가 발생하고, 격자 방향과 종좌표 방향의 불일치로 인한 가상 산란(false scattering⁽²⁾) 또는 수치 소산(numerical smearing⁽⁶⁾)이 발생하는 문제점을 안고 있다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 여러 연구자들이 변형된 구분 종좌표법에 관해 연구를 수행하였다. Raithby와 Chui⁽⁷⁾는 FVM을 제시하였고, 김만영과 백승욱⁽⁸⁾은 수정된 구분 종좌표법을 제시하였으며, Pessoa-Filho와 Thynell⁽⁹⁾은 해석적 기법을 도입한 방법을 사용하였고, Mohamad⁽¹⁰⁾은 국소 해석적 구분 종좌표법(Local Analytical DOM, LADOM)을 제안하였다. 또한 Cheong과 Song⁽¹¹⁾은 기존 수송 방정식과의 호환을 위해 2계 구분 종좌표법을 사용하였다.

다차원 문제에서 발생하는 가상 산란은 구분 종좌표법의 구조상 완전히 배제될 수는 없으나, 적절한 공간 차분법을 사용하여 그 크기를 최소화할 수 있다⁽¹²⁾. 주로 사용되는 공간 차분법으로는 계단 차분 도식(step differencing scheme)과 중앙 차분 도식(central/diamond differencing scheme)이 있으나, 이들은 각각 정확성이 떨어지고, 상·하향 발산(over-/under-shooting)의 발생으로 인한 안정성에 문제가 있다. 이와 같은 문제점을 보완하기 위해 양수 도식(positive scheme⁽¹³⁻¹⁵⁾), 가변 가중치 도식(variable-weight scheme⁽¹⁶⁻¹⁷⁾) 등이 개발되었다. 이들은 중앙 차분 도식에 적절한 수정 과정(fix-up procedure)을 수행하여 물리적으로 타당한 해를 유발하도록 한 기법이다. 최근에는 지수(exponential) 계열과 고차(higher order) 계열의 도식 등이 개발되고 있으나, 각각 수정 과정을 거쳐야 하고, 계산이 복잡하다는 단점이 있다. Chai 동⁽¹²⁾은 고차 계열의 기법을 제외한 모든 기법에 대해 기술하고 있으며, Jesse와 Fiveland⁽⁶⁾는 고차 계열의 bounded HR(High Resolution) 기법을 개발하였다.

본 연구에서는 2차원 직교 좌표계에서 구분 종좌표법의 수치 소산을 최소화하고, 물리적으로 타당하지 않은 복사 강도의 발생을 배제하여 수정 과정이 필요 없는 공간 차분 도식을 개발하고, 이것을 투명(transparent) 매체, 흡수(absorbing) 매체, 산란(scattering) 매체 및 흡수-방사-등방성 산란(absorbing-emitting-isotropically scattering) 매체에 적용하여 다른 공간 차분 도식과의 비교를 수행하고자 한다.

2. 지배방정식

2차원 직교 좌표계에 대한 복사 전달 방정식은 다음과 같다.

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \xi \frac{\partial I}{\partial y} = -\beta I + \kappa I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega'=-4\pi}^{\Omega} I(\Omega') \Phi(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \quad (1)$$

식 (1)에 구분 종좌표법을 적용하면 다음의 구분 종좌표 방정식을 얻는다.

$$\mu_m \frac{\partial I^m}{\partial x} + \xi_m \frac{\partial I^m}{\partial y} = -\beta I^m + S^m \quad (2a)$$

여기서

$$S^m = \kappa^m I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \sum_{m=1}^N w_m \Phi^{m,m} I^m \quad (2b)$$

식 (2)를 Fig. 1에 나타난 제어 체적에 대해 적용하면 다음의 방정식을 얻는다.

$$\mu_m \Delta y (I_w^m - I_e^m) + \xi_m \Delta x (I_s^m - I_n^m) = (-\beta_p I_p^m + S_p^m) \Delta x \Delta y \quad (3)$$

식 (3)에 공간 차분식을 도입하면 격자점 P에 대한 최종 방정식을 얻을 수 있다. $\mu_m > 0$, $\xi_m > 0$ 인 경우에 대한 공간 차분식과 그에 따른 구분 종좌표 방정식은 다음과 같다.

$$I_p^m = (1 - f_x^m) I_w^m + f_x^m I_e^m = (1 - f_y^m) I_s^m + f_y^m I_n^m \quad (4)$$

$$I_p^m = \frac{\frac{\mu_m \Delta y}{f_x^m} I_w^m + \frac{\xi_m \Delta x}{f_y^m} I_s^m + S_p^m \Delta x \Delta y}{\frac{\mu_m \Delta y}{f_x^m} + \frac{\xi_m \Delta x}{f_y^m} + \beta_p \Delta x \Delta y} \quad (5)$$

여기서 f_x^m 과 f_y^m 는 각각 x, y 방향으로의 공간 차분 가중치이다.

$\mu_m > 0$, $\xi_m > 0$ 인 경우에 대해 식 (5)를 사용하

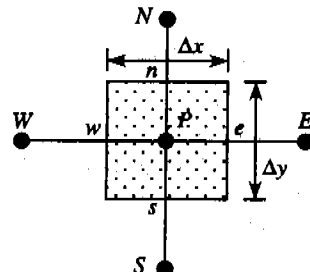
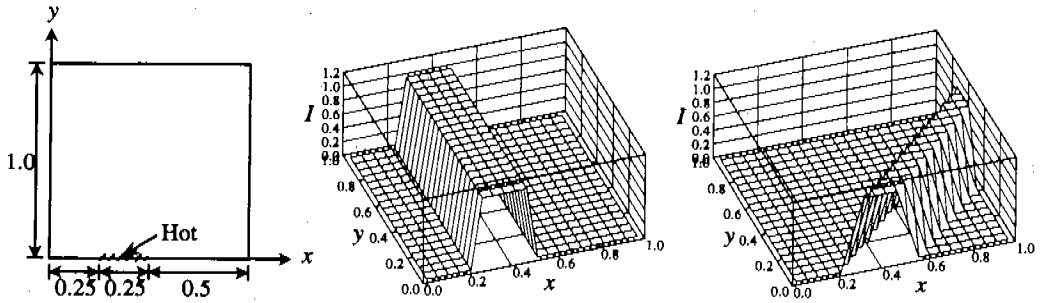


Fig. 1 Typical internal control volume.



(a) schematic of test problem (b) step scheme for $\mu_m=0, \xi_m=1$ (c) diamond scheme for $\mu_m=\xi_m=1/\sqrt{2}$

Fig. 2 Intensity distribution in a special direction ($\Delta x=\Delta y$).

여 격자점 P 에서의 복사 강도를 구할 수 있고, 식 (4)를 이용하여 하류의 복사 강도 I_x^m, I_y^m 를 구할 수 있다.

일반적으로 계단 차분의 경우 공간 차분 가중치 $f = f_x^m = f_y^m = 1.0$ 을 사용하고, 중앙 차분의 경우 $f = f_x^m = f_y^m = 0.5$ 를 사용한다. 수치 기법상 중앙 차분이 계단 차분보다 정확성이 높음을 알 수 있으나, 계단 차분이 물리적으로 안정적인 해를 제시하는데 반하여 중앙 차분은 범주를 벗어난 하향 발산(음의 복사 강도 발생 포함)과 상향 발산 등이 유발된다.

중앙 차분에서 발생하는 이러한 문제를 해결하고자 Carlson과 Lathrop^(13,15)은 음의 복사 강도 발생시에 0으로 교정을 수행하는 기법을 제시하고, 또한 항상 양의 복사 강도를 제시하는 양수 도식을 제안하였으나 상향 발산에 대한 문제점을 해결하지 못했으며, Jamaluddin과 Smith⁽¹⁶⁾와 Sanchez와 Smith⁽¹⁷⁾는 적절한 해가 나올 때까지 f 값을 0.5에서 1.0까지 증가시키는 가변 가중치 도식을 제안하였으나 계산 시간이 많이 소요되고, 계산된 복사 강도의 신뢰성을 높이기 위해서는 물리적으로 엄격한 복사 강도의 범주를 사용해야 한다는 단점이 있다.

3. 이론

3.1 하이브리드 공간 차분 도식

비참여 매체(non-participating media)에서 계단 도식 및 중앙 도식은 각각 앞에서 언급한 문제점을 갖고 있지만, 특정한 방향에 대해서는 엄밀해물 제시하는 특성을 갖고 있다.

Fig. 2(a)에 보인 흑체 벽면으로 이루어진 사각

밀폐 공간에 비참여 매체가 존재하고 빗금 친 부분($0.25 \leq x \leq 0.5, y = 0$)에서 단위 복사($I_b = 1$)가 이루어질 경우에 특정한 방향으로의 복사 강도 분포에 대한 계단 도식과 중앙 도식의 결과를 각각 Fig. 2(b)와 (c)에 나타내었다. 계단 도식의 경우 격자의 방향과 일치하는 방향에서 엄밀해물을 예측하고 있고, 중앙 도식의 경우 격자의 대각선 방향에서 엄밀해물을 나타내고 있다.

이러한 두 가지 공간 차분 도식의 장점을 이용하기 위해 비참여 매체에 대한 하이브리드(hybrid) 공간 차분 가중치를 아래와 같이 구성하였다.

$$f_{H,trans}^m = f_x^m = f_y^m = \frac{1}{1 + \gamma^m} \quad (6a)$$

여기서

$$\gamma^m = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left| \frac{\mu_m}{\xi_m} \right|, & \Delta y |\mu_m| < \Delta x |\xi_m| \\ \frac{\Delta x}{\Delta y} \left| \frac{\xi_m}{\mu_m} \right|, & \Delta y |\mu_m| \geq \Delta x |\xi_m| \end{cases} \quad (6b)$$

비참여 매체에 대한 하이브리드 공간 차분 가중치 $f_{H,trans}^m$ 은 격자의 형상과 종좌표의 방향에 관한 함수로써 0.5에서 1.0 사이에서 변하는 값을 나타내며, 격자의 방향으로는 1.0(=계단 도식), 대각선 방향으로는 0.5(=중앙 도식)를 나타낸다.

비참여 매체에서와 마찬가지로 흡수 매체에서도 특정한 방향에 대해 엄밀해물 제시할 수 있는 공간 차분 가중치가 존재하며, 이 가중치는 다음과 같이 유도할 수 있다.

흡수 매체에 대한 복사 전달 방정식과 엄밀해는 다음과 같다.

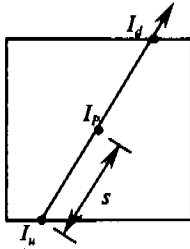


Fig. 3 Control volume and the direction of radiative transport.

$$\frac{dI}{ds} + \kappa I = 0 \quad (7)$$

$$I = I_u e^{-\kappa s} \quad (8)$$

여기서 I_u 는 상류 값(upstream value)을 나타내고 s 는 복사광의 이동 거리를 나타낸다. 이 관계를 Fig. 3에 나타낸 일반적인 제어 체적에 적용하면 다음과 같다.

공간 차분식과 식 (8)에 의한 I_p 와 하류 값(downstream value)인 I_d 는 다음과 같다.

$$I_p = (1 - f_{H,absorb})I_u + f_{H,absorb}I_d \quad (9)$$

$$I_p = I_u e^{-\kappa s} \quad (10a)$$

$$I_d = I_u e^{-\kappa(2s)} \quad (10b)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하고 정리하면 흡수 매체에 대한 하이브리드 공간 차분 가중치를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_{H,absorb} = \frac{1}{1 + e^{-\kappa s}} \quad (11)$$

$f_{H,absorb}$ 는 I_u 및 I_d 가 $I_e^m, I_w^m, I_n^m, I_s^m$ 등이 계산되는 위치(제어 체적면의 중앙)와 일치할 때 엄밀해를 나타내는 공간 차분 가중치이다. 즉, 격자의 방향과 일치하는 종파표의 방향에서 엄밀해를 나타낸다.

식 (6)과 식 (11)의 공간 차분 가중치 $f_{H,trans}$ 과 $f_{H,absorb}$ 의 분모에서 γ^m 과 $e^{-\kappa s}$ 는 각각 격자와 종파표의 관계와 매체의 특성을 나타내는 인자로서 0보다 크고 1보다 작은 값을 갖는다. 이러한 두 가중치의 특성을 갖고, 식 (2)를 만족하는 일반적인 매체에 적용이 가능한 가중치 f_H^m 를 다음과 같이 정의하였다.

$$f_H^m = f_x^m = f_y^m = \min \left[\frac{1}{\gamma^m + e^{-\beta s^m}}, 1 \right] \quad (12a)$$

여기서 γ^m 은 식 (6b)에서 정의된 바와 같으며 방향에 따른 이동 거리 s^m 은 다음과 같이 정의된다.

$$s^m = \begin{cases} \frac{\Delta y}{2|\xi_m|}, \Delta y|\mu_m| < \Delta x|\xi_m| \\ \frac{\Delta x}{2|\mu_m|}, \Delta y|\mu_m| \geq \Delta x|\xi_m| \end{cases} \quad (12b)$$

식 (12)에서 정의된 공간 차분 가중치 f_H^m 가 비참여 매체와 흡수 매체 및 흡수-방사-산란 매체에 적용이 가능하며, 안정성이 있는지를 살펴보기 위해 다음을 고려하였다.

Chai 등⁽¹²⁾은 순수 흡수 매체가 존재하는 정사각 격자($\Delta x = \Delta y$)에서 $\mu_m > 0, \xi_m > 0$ 의 방향으로 $I_w^m = 0$ 인 경우에 계단 도식은 물리적으로 타당한 해를 예측하고 있으나, 중앙 도식은 $\mu_m \geq \xi_m$ 인 경우에 I_n^m 은 음의 값을 갖게 됨을 해석적으로 나타내었다. 본 연구에서 제시한 하이브리드 도식에서 f_H^m 가 1보다 작은 경우를 이러한 상황에 적용해 보면 다음과 같다.

$\mu_m \geq \xi_m$ 인 경우 식 (4), (5) 및 (12)에 의해 I_p^m 와 I_n^m 은 다음과 같이 표현된다.

$$I_p^m = \frac{(\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m)\xi_m I_s^m + S^m \Delta y \mu_m}{(\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m)(\mu_m + \xi_m) + \beta \Delta y \mu_m} \quad (13)$$

$$I_n^m = \frac{\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m}{\mu_m} \times \left[I_p^m - \frac{\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m - \mu_m}{\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m} I_s^m \right] \quad (14)$$

식 (14)에서 $I_n^m \geq 0$ 이 될 조건은 다음과 같다.

$$(1 - e^{-\beta s^m}) I_s^m \geq \frac{\beta \Delta y}{\mu_m} \times \left[\frac{\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m - \mu_m}{\mu_m e^{-\beta s^m} + \xi_m} I_s^m - \frac{S^m}{\beta} \right] \quad (15)$$

식 (15)에서 순수 흡수 매체인 경우($S^m = 0, \beta = \kappa$)가 흡수-방사-산란 매체인 경우($S^m \geq 0$)보다 엄격한 조건을 가지게 되며, 순수 흡수 매체인 경우에 대해서 $I_n^m \geq 0$ 이 될 조건은 다음과 같다.

$$F = (1 - e^{-\kappa s}) - \frac{\kappa \Delta y}{\mu_m} \frac{\mu_m e^{-\kappa s} + \xi_m - \mu_m}{\mu_m e^{-\kappa s} + \xi_m} \geq 0 \quad (16)$$

수치적으로 F 는 $\mu_m, \xi_m, \kappa, \Delta y$ 등의 값과

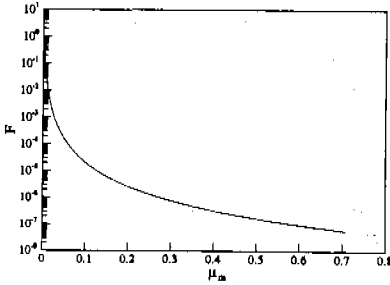


Fig. 4 Distribution of F due to the change of μ_m .

관계없이 항상 식 (16)의 조건을 만족한다. 특정한 경우($\kappa=1.0$, $\Delta y=0.01$, $\mu_m=\xi_m$)에 대한 F 의 분포를 Fig. 4에 나타내었다.

$\mu_m < \xi_m$ 인 경우에도 $\mu_m \geq \xi_m$ 인 경우와 같은 방법으로 확인한 결과 항상 $I_n^m \geq 0$ 이 만족된다. 오른쪽 제어 체적면의 복사 강도 I_r^m 은 아래의 식 (17)로 표현되고 항상 양의 값을 갖는다.

$$I_r^m = \frac{\mu_m e^{-\kappa \Delta x} + \xi_m}{\mu_m} I_p^m \quad (17)$$

3.2 공간 차분 도식과 수치 소산

Fig. 2(a)에 나타낸 밀폐 공간에서 비참여 매체가 차 있는 경우 임의의 방향에 대해 각 공간 차분 도식에 예측하는 복사 강도의 분포를 Fig. 5에 나타내었다. 계단 도식은 수치 소산이 많이 나타나고 있고, 중앙 도식은 상·하향 발산이 나타나고 있어 수정 과정이 필요함을 알 수 있다. 이에 반해 하이브리드 도식은 계단 도식보다 정확한 해를 예측하고 있으며, 상·하향 발산이 발생하지 않음을 알 수 있다. 그림에 결과는 나타내지 않았지만, 아래의 식 (18)로 주어진 Lathrop⁽¹³⁾의 양수 도식은 하이브리드 도식과 비슷한 복사 강도의 분포를 예측하고, 아래의 식 (19)로 주어진 Chai 등⁽¹⁸⁾의 수

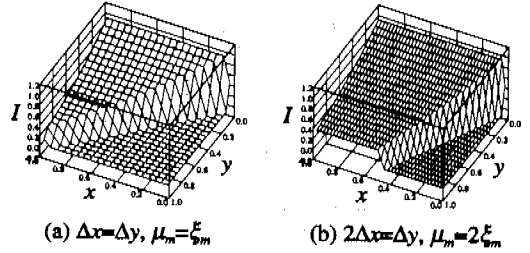


Fig. 6 Intensity distribution of hybrid scheme for purely absorbing medium.

정 지수 도식(modified-exponential scheme)은 비참여 매체($\beta = 0$)에 대해서는 계단 도식과 동일해 짐을 알 수 있다.

$$f_x^m = \max[1 - D_y^m / D_x^m (D_y^m + 2), 0.5] \quad (18a)$$

$$f_y^m = \max[1 - D_x^m / D_y^m (D_x^m + 2), 0.5] \quad (18b)$$

여기서

$$D_x^m = \frac{\beta \Delta x}{|\mu_m|} \quad (18c)$$

$$D_y^m = \frac{\beta \Delta y}{|\xi_m|} \quad (18d)$$

$$I_x^m = I_p^m e^{-\beta d_x^m} + \left(\frac{S^m}{\beta}\right)_p (1 - e^{-\beta d_x^m}) \quad (19a)$$

$$I_n^m = I_p^m e^{-\beta d_n^m} + \left(\frac{S^m}{\beta}\right)_p (1 - e^{-\beta d_n^m}) \quad (19b)$$

여기서 d_x^m 및 d_n^m 은 제어 체적 내에서 종좌표의 방향에 따라 각각 오른쪽 및 위쪽 제어 체적면의 중앙에 이르는 거리를 나타낸다.

정사각 밀폐 공간의 아래 벽면($y = 0$)에서 단위 의 흑체 복사($I_b = 1$)가 이루어 지고, 다른 모든 벽

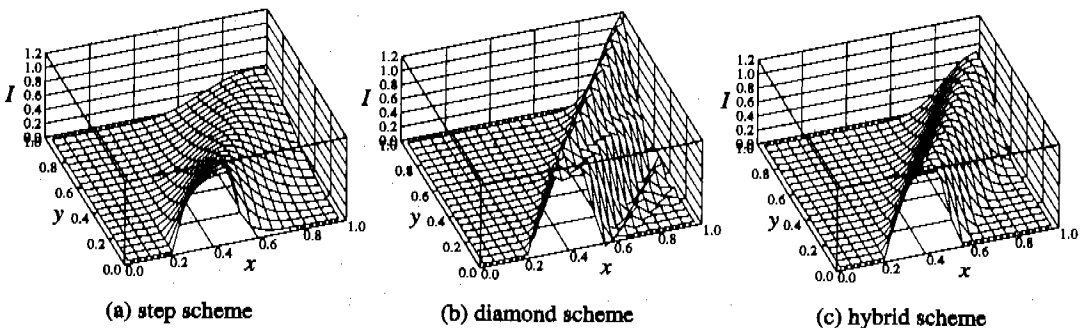


Fig. 5 Intensity distribution for non-participating medium in an arbitrary direction ($\mu_m=0.52250$, $\xi_m=0.85264$).

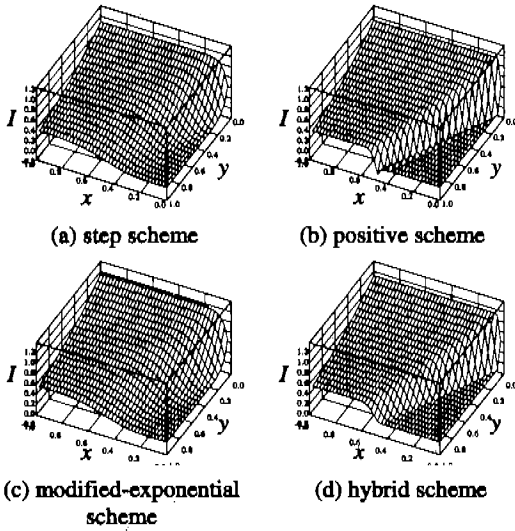


Fig. 7 Intensity distribution for purely absorbing medium in an arbitrary direction ($\mu_m=0.47925$, $\xi_m=0.87768$).

면과 매체의 복사량이 없는 경우, 흡수 계수(κ)가 1인 순수 흡수 매체에 대해서 하이브리드 도식을 적용해 본 결과, Fig. 6에 나타낸 바와 같이 격자의 대각선 방향에서 수치 소산이 거의 나타나지 않음을 볼 수 있다. 이는 비참여 매체의 경우와 같은 결과로써, 구분 종좌표법의 특성을 고려해 볼 때 격자의 크기가 작아질수록 엄밀해에 가까워짐을 예측할 수 있다.

앞에서 다룬 밀폐 공간 및 매체에서 특정한 격자($2\Delta x=\Delta y$)와 특정한 방향($\mu_m=0.47925$, $\xi_m=0.87768$)에 대하여 복사 전달이 이루어지고 있는 경우, 여러 가지 공간 차분법이 예측하고 있는 복사 강도의 분포를 Fig. 7에 나타내었다. 비참여 매체의 경우와 유사하게 계단 도식(a)은 수치 소산이 많이 나타나고 있는 반면, 양수 도식(b)은 가파른 복사 강도의 분포를 나타내며 약간의 수치 소산을 보이고 있다. 그러나 음의 복사 강도의 발생으로 물리적으로 타당하지 않은 결과를 나타내고 있다. 즉, 양수 도식의 사용에 있어서도 수정 과정이 필요함을 알 수 있다. 수정 지수 도식(c)은 비참여 매체에서의 경우와 마찬가지로 계단 도식과 비슷하게 수치 소산이 많이 나타나고 있다. 단, 지수 계열의 공간 도식이므로 계단 도식보다 매체의 흡수 특성을 잘 나타내어 흑체 복사가 이루어지는 벽면에서의 복사 강도를 보다 적절히 예측하고 있다. 하이브리드 도식(d)은 계단 도식과 수정 지수 도식보다 수치 소산이 적은 결과를 보이며, 물리적으로

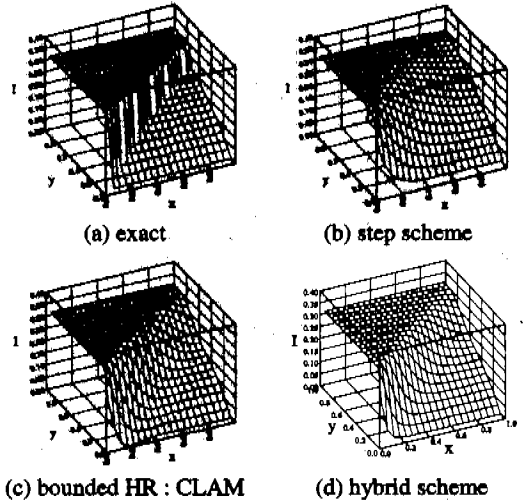


Fig. 8 Intensity distribution for absorbing-emitting medium in an arbitrary direction ($\mu_m=0.8040087$, $\xi_m=0.5773503$).

타당한 해를 예측하고 있다. 그러나, Fig. 6(b)와 Fig. 7(d)에서 보인 복사 강도의 분포를 비교해 볼 때 격자의 대각선 방향에서는 수치 소산이 거의 없는 반면, 대각선 이외의 방향에서는 수치 소산이 나타나고 있으며, 이는 사각 격자의 특성상 대각선 이외의 방향에서 수치 소산을 완전히 없애기는 불가능하기 때문이다.

정사각 밀폐 공간에 단위 방사력(emissive power, $E_b = 1$)의 순수 흡수 매체($\kappa = 1$)가 차 있는 경우, 특정한 방향($\mu_m=0.8040087$, $\xi_m=0.5773503$)으로의 복사 강도의 분포를 Fig. 8에 나타내었다. 고차 계열의 도식인 Jessee와 Fiveland⁽⁶⁾의 bounded HR : CLAM(c)과 하이브리드 도식(d)은 계단 도식(b)보다 엄밀해(a)에 가까운 복사 강도의 분포를 예측하고 있음을 볼 수 있다.

4. 적용예

4.1 사각 밀폐 공간에서의 표면 복사

2차원 사각 밀폐 공간에서의 표면 복사 문제의 해석을 위해 Sanchez와 Smith⁽¹⁷⁾가 고려한 해석 대상을 사용하였다. 모든 벽면은 흑체이고, 왼쪽 벽면의 온도가 310K이고, 왼쪽 벽면을 제외한 모든 벽면의 온도가 300K인 밀폐 공간을 Fig. 9에 나타내었다.

Fig. 9에서 무차원 벽면 거리 ζ 는 밀폐 공간의 왼쪽 아래 꼭짓점을 원점으로 하여 시계 방향으로

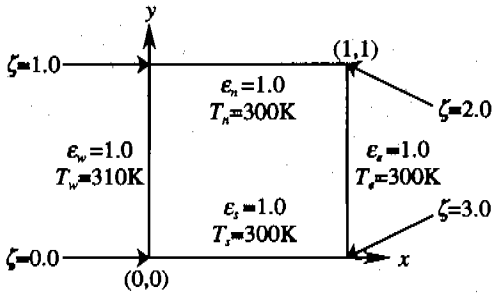


Fig. 9 Schematic diagram of a rectangular enclosure.

밀폐 공간의 벽면을 따르는 거리를 나타낸다. 동일한 가중치와 동일한 각 증분(angular increment)을 갖는 종좌표를 사용하였으며 4 분원에 M 개의 종좌표가 있도록 하였다.

Fig. 10에 60×60 격자계를 사용하여 $\zeta = 2.0 \sim 2.5$ 인 표면, 즉 밀폐 공간의 오른쪽 벽면의 위쪽 끝에서 중앙까지의 국소 열유속 분포를 나타내었다. Fig. 10을 살펴 보면 M 이 10, 15, 25에서 열유속의 분포는 진동하는 모습을 나타내고, M 이 증가할수록 진동의 크기는 작아짐을 알 수 있다. 이러한 현상은 불연속의 종좌표로 인해 복사 강도가 벽면에 불연속적으로 도달하게 되는 레이 효과에 의한 것으로 M 이 50일 때 레이 효과는 사라지고 RIM(Radiosity/Irradiation Method)과 동일한 결과를 나타낸다. M 이 15, 25일 때 $\zeta = 2.0$ (밀폐 공간의 모서리) 근방에서 열유속의 분포는 RIM과 차이를 보이는데, 이는 M 이 홀수일 때 격자의 대각선 방향과 일치하는 종좌표의 방향이 존재하여 그 방향만으로는 수치 소산이 거의 나타나지 않음으로 인해 레이 효과가 극명하게 나타나기 때문이다. M 이 짝수일 때는 모든 방향으로 고른 수치 소산이 발

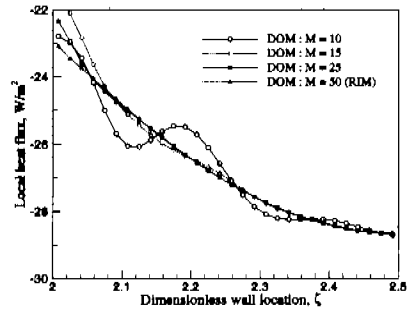


Fig. 10 Local heat fluxes at the east wall for the rectangular enclosure.

생하여 이러한 현상은 사라진다.

20×20 격자계와 60×60 격자계(괄호 안)를 사용하여 밀폐 공간의 위쪽 벽면과 오른쪽 벽면의 평균 열유속과 형태 계수(괄호 안)를 Table 1에 나타내었다. 계단 도식, 수정 지수 도식과 가변 가중치 도식을 사용한 Sanchez와 Smith⁽¹⁷⁾의 결과는 조밀한 격자에서 엄밀해에 가까운 결과를 보이고 있다. 그러나 M 의 값이 증가할수록 엄밀해로부터 멀어지는 결과를 보이는데, 이는 종좌표의 개수가 증가할수록 그에 따른 수치 소산량이 증가하기 때문이다. 반면에 양수 도식과 하이브리드 도식은 비참여 매체($\beta = 0$), 정사각 격자($\Delta x = \Delta y$)에서 동일한 결과를 예측하고 있다. 또한 두 도식은 성긴 격자에서도 우수한 결과를 보이고 다른 도식들보다 엄밀해에 가까운 결과를 나타내는데, 이는 다른 도식들에 비해 수치 소산량이 적기 때문이다. M 이 짝수일 때 두 도식 모두 엄밀해를 나타내는데, 특히 M 이 10과 20일 때 진동을 나타내던 열유속의 분포(Fig. 10)가 평균을 취함으로써 상쇄되

Table 1 Overall heat fluxes.

	DOM M	Heat flux, W/m^2 ; 20×20 grid, (60×60 grid), {View factor}		
		step, modified-exponential	variable-weight (Sanchez & Smith ⁽¹⁷⁾)	positive, hybrid
north wall	10	-18.351 (-18.709)	-18.790 (-18.844)	-18.849 (-18.849) {0.292893}
	15	-18.324 (-18.683)	-18.764 (-18.834)	-18.912 (-18.912) {0.293862}
	20	-18.315 (-18.674)	-18.755 (-18.824)	-18.849 (-18.849) {0.292893}
	25	-18.311 (-18.670)	-18.751 (-18.820)	-18.872 (-18.872) {0.293242}
	50	-18.305 (-18.664)	-18.745 (-18.814)	-18.849 (-18.849) {0.292893}
	RIM	-18.849		{0.292893}
east wall	10	-27.654 (-26.937)	-26.775 (-26.667)	-26.657 (-26.657) {0.414214}
	15	-27.706 (-26.989)	-26.827 (-26.687)	-26.532 (-26.532) {0.412275}
	20	-27.725 (-27.007)	-26.846 (-26.708)	-26.657 (-26.657) {0.414214}
	25	-27.733 (-27.016)	-26.854 (-26.716)	-26.612 (-26.612) {0.413516}
	50	-27.744 (-27.027)	-26.865 (-26.727)	-26.657 (-26.657) {0.414214}
	RIM	-26.657		{0.414214}

었기 때문이다. M 이 흡수일 때에는 앞에서 언급한 바와 같이 레이 효과가 크게 나타나는 방향이 존재하여 RIM의 값과 편차를 나타내고 있음을 알 수 있다.

4.2 순수 흡수 매체

정사각 밀폐 공간에 순수 흡수 매체($\kappa L_x = \kappa L_y = 1$)가 차 있고, 밀폐 공간의 아래쪽 벽면($y = 0$)만이 고온($T_b = 1$)으로 유지될 때, S-10의 종좌표와 59x59의 격자를 사용하여 복사 열전달 해석을 수행하였다. 각 공간 차분 도식이 예측하고 있는 해외 정확성을 알아 보고자 밀폐 공간의 4개의 위치에서의 평균 입사량(average incident radiation)을 Table 2에 나타내었다.

수정 지수 도식은 생성항(S^m , 식 (19))이 도식에 포함되어 있기 때문에 계산 초기에 발산을 막기 위해서 계단 도식의 결과를 사용하였다.

Table 2를 살펴 보면 균일 격자계를 사용한 경우 대부분의 도식이 해석적 기법을 사용한 Pessoa-Filho와 Thynell⁽⁹⁾의 해에 근접한 결과물 보이고 있으나, 밀폐 공간의 중앙($0.5L_x, 0.5L_y$)에서 큰 차이를 보이고 있다. 이는 해석적 기법과 DOM의 방법의 차이에 의한 것으로 판단된다. 대체적으로 양수 도식과 하이브리드 도식이 다른 차분 도식에 비해 정확한 해를 예측하고 있다. 그러나, 격자의 영향을 살펴보기 위해 밀폐 공간의 벽면쪽으로 격자를 밀집시킨 비균일 격자를 사용한 경우에 양수 도식은 0보다 작은 복사 강도를 예측하여 수정 과정을 필요로 한다. 그러나 비균일 격자를 사용한 경우에도 하이브리드 도식은 계단 도식과 수정 지수 도식보다 정확한 해를 예측하고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Incident radiation predicted by various spatial differencing schemes in the case of purely absorbing medium.

position	grid	G/4π				Pessoa-Filho & Thynell ⁽⁹⁾
		spatial differencing scheme				
		step	positive	modified-exponential	hybrid	
(0.5L _x , 0.5L _y)	UG	0.11740	0.11632	0.11807	0.11607	0.11753
	NG	0.11684	-	0.11940	0.11648	
(0.5L _x , L _y)	UG	0.04107	0.03825	0.04041	0.03866	0.03863
	NG	0.04234	-	0.04115	0.03954	
(0, 0.5L _y)	UG	0.07445	0.07550	0.07336	0.07537	0.07525
	NG	0.07343	-	0.07215	0.07504	
(0, L _y)	UG	0.03055	0.02979	0.02933	0.02997	0.02986
	NG	0.03083	-	0.02993	0.02984	

(UG - Uniform Grid, NG - Non-uniform Grid)

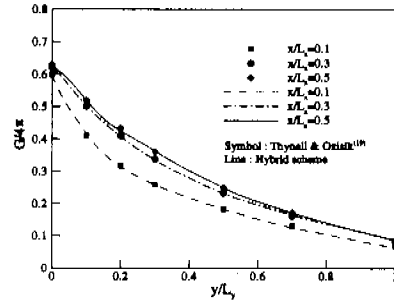


Fig. 11 Incident radiation for purely isotropically scattering medium.

4.3 순수 산란 매체

순수 흡수 매체의 경우와 같은 밀폐 공간에 순수 산란 매체($\sigma L_x = \sigma L_y = 1$)가 차 있을 때, 앞에서와 같은 방법으로 복사 열전달 해석을 수행하였다. 하이브리드 도식을 사용하여 해석한 결과로부터 $x/L_x = 0.1, 0.3, 0.5$ 에서 y/L_y 의 변화에 따른 평균 입사량($G/4\pi$)의 분포를 Thynell과 Ozisik⁽¹⁹⁾의 결과와 비교하였으며 그 결과를 Fig. 11에 나타내었다.

Fig. 11을 살펴 보면 하이브리드 도식을 사용한 S-10의 결과가 Thynell과 Ozisik⁽¹⁹⁾의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. $x/L_x = 0.5$ 에서 약간의 불일치를 보이며 매끄럽지 않은 결과를 나타내는데, 이는 종좌표로 인한 레이 효과로 판단된다.

순수 산란 매체의 경우 각 공간 차분 도식이 예측하고 있는 해외 정확성을 살펴 보기 위해 밀폐 공간의 4개의 위치에서의 평균 입사량을 Table 3에 나타내었다.

흡수 매체의 경우와 비슷하게 수정 지수 도식은 계산 초기에 발산을 막기 위해서 계단 도식의 결과를 사용하였다. 균일 격자계를 사용한 경우

Table 3 Incident radiation predicted by various spatial differencing schemes in the case of purely scattering medium.

position	grid	G/4π				Thynell & Ozisik ⁽¹⁹⁾
		spatial differencing scheme				
		step	positive	modified-exponential	hybrid	
(0.5L _x , 0.5L _y)	UG	0.25000	0.25000	0.25000	0.25000	0.250
	NG	0.25000	-	0.25000	0.25008	
(0.5L _x , L _y)	UG	0.08993	0.08612	0.08951	0.08657	0.086
	NG	0.09193	-	0.09091	0.08770	
(0, 0.5L _y)	UG	0.14128	0.14231	0.14069	0.14210	0.142
	NG	0.13999	-	0.13942	0.14151	
(0, L _y)	UG	0.05935	0.05878	0.05870	0.05887	0.059
	NG	0.05990	-	0.05898	0.05887	

(UG - Uniform Grid, NG - Non-uniform Grid)

대부분의 차분법이 Thynell 과 Ozisik⁽¹⁹⁾의 해에 근접한 결과를 보이고 있으나, 양수 도식과 하이브리드 도식이 다른 도식에 비해 보다 정확한 해를 예측하고 있다. 그러나, 비균일 격자를 사용한 경우에 양수 도식은 흡수 매체의 경우와 같이 수정 과정을 필요로 한다.

4.4 흡수-방사-동방성 산란 매체

앞에서 고려된 밀폐 공간에 흡수-방사-동방성 산란 매체($\kappa L_x = \kappa L_y = \sigma_s L_x = \sigma_s L_y = 0.5$)가 차 있을 때, 4 개의 위치에서의 평균 입사량을 Table 4 에 나타내었다.

다른 매체의 경우와 유사하게 양수 도식과 하이브리드 도식이 다른 도식에 비해 정확한 해를 예측하고 있으며, 비균일 격자에서 양수 도식은 수정 과정을 필요로 한다. 비균일 격자를 사용한 경우에도 하이브리드 도식이 계단 도식과 수정 지수 도식보다 정확한 해를 예측하고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서 제안한 하이브리드 도식은 계단 도식과 중앙 도식의 장점을 취하고, 매체의 특성을 포함한 것으로써, 계단 도식보다 수치 소산이 적게 나타나고, 중앙 도식에서 나타나는 상·하향 발산 문제가 발생하지 않는다. 한편 하이브리드 도식은 가변 가중치 도식에서처럼 수정 과정을 통한 반복적인 공간 차분 가중치의 개선을 필요로 하지 않으며, 고차 계열의 기법 보다 계산이 간단한 장점을 갖고 있다.

2차원 사각 밀폐 공간에 각각 비참여 매체, 순수 흡수 매체, 순수 산란 매체 및 흡수-방사-동방성 산란 매체가 존재하는 경우에 대해 하이브리드

도식을 적용한 결과 다음의 결론을 얻었다.

(1) 하이브리드 도식은 계단 도식, 중앙 도식, 양수 도식, 수정 지수 도식 등 기존의 공간 차분 도식보다 수치 소산량이 적기 때문에 엄밀해에 가까운 결과를 나타내고 있다.

(2) 하이브리드 도식은 격자의 형상, 종좌표의 방향 및 매체에 관계 없이 물리적으로 타당한 해를 예측하고 있기 때문에 수정 과정을 필요로 하지 않는다.

(3) 하이브리드 도식을 동일한 가중치와 동일한 각 중분을 갖는 종좌표계와 S-10 의 종좌표계에 적용해 본 결과, 동일한 각 중분을 갖는 종좌표계에서 더욱 우수한 결과를 예측하였다. 하이브리드 도식은 격자의 대각선 방향으로는 수치 소산이 거의 없는 반면, 대각선 이외의 방향으로는 약간의 수치 소산이 나타나고 있기 때문에 수치 소산량의 불균형을 줄이기 위해서는 동일한 각 중분을 갖는 종좌표계의 사용이 바람직 하다.

(4) 하이브리드 도식은 격자의 변화에 대해서도 안정적인 결과를 예측하고 있으며, 다른 도식보다 우수함을 나타내고 있다. 이러한 특성은 본 연구에서 제안한 하이브리드 도식이 유한체적법동 기 존의 유동 및 열해석 기법과 함께 복사열 포함한 복합 열전달 해석에 잘 적용될 수 있음을 의미한다.

참고문헌

- (1) Chandrasekhar, S., 1960, *Radiative Transfer*, Dover, New York.
- (2) Carlson, B. G., and Lathrop, K. D., 1968, "Transport Theory-The Method of Discrete Ordinates," *Computing Methods in Reactor Physics*, edited by H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, Gordon & Breach, New York.
- (3) Fiveland, W. A., 1984, "Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.106, pp.699-706.
- (4) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (5) Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1993, "Ray Effect and False Scattering in the Discrete Ordinates Method," *Num. Heat Transfer, Part B*, Vol.24, pp.373-389.
- (6) Jessee, J. P., and Fiveland, W. A., 1997, "Bounded, High-Resolution Differencing Schemes Applied to the Discrete Ordinates Method," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.11, No.4, pp.540-548.
- (7) Raithby, G. D., and Chui, E. H., 1990, "A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer

Table 4 Incident radiation predicted by various spatial differencing schemes in the case of absorbing-emitting-scattering medium.

position	grid	G/4π				Thynell & Ozisik ⁽¹⁹⁾
		spatial differencing scheme				
		step	positive	modified-exponential	Hybrid	
(0.5L _x , 0.5L _y)	UG	0.16290	0.16224	0.16368	0.16234	0.1631
	NG	0.16242	-	0.16474	0.16225	
(0.5L _x , L _y)	UG	0.05719	0.05399	0.05668	0.05444	0.0542
	NG	0.05872	-	0.05769	0.05539	
(0, 0.5L _y)	UG	0.09782	0.09891	0.09705	0.09875	0.0988
	NG	0.09666	-	0.09581	0.09830	
(0, L _y)	UG	0.04026	0.03957	0.03927	0.03981	0.0396
	NG	0.04063	-	0.03978	0.03961	

(UG - Uniform Grid, NG - Non-uniform Grid)

- in Enclosures with Participating Media," ASME Journal of Heat Transfer, Vol.112, pp.415-423.
- (8) 김만영, 백승욱, 1998, "측대칭 원통좌표계에서 수정된 구분종좌표법에 의한 복사열전달 해석," 대한기계학회논문집 (B), 제 22 권, 제 2 호, pp.213-220.
- (9) Pessoa-Filho, J. B., and Thynell, S. T., 1997, "An Approximate Solution to Radiative Transfer in Two-Dimensional Rectangular Enclosures," ASME Journal of Heat Transfer, Vol.119, pp.738-745.
- (10) Mohamad, A. A., 1996, "Local Analytical Discrete Ordinate Method for the Solution of the Radiative Transfer Equation," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.39, No.9, pp.1859-1864.
- (11) Cheong, K. B., and Song, T. H., 1995, "Examination of Solution Methods for the Second-Order Discrete Ordinate Formulation," Num. Heat Transfer, Part B, Vol.27, pp.155-173.
- (12) Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1994, "Evaluation of Spatial Differencing Practices for the Discrete-Ordinates Method," Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol.8, No.1, pp.140-144.
- (13) Lathrop, K. D., 1969, "Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs. Accuracy," Journal of Computational Physics, Vol.4, pp.475-478.
- (14) Kim, T. K., and Lee, H. O., 1988, "Effect of Anisotropic Scattering on Radiative Heat Transfer in Two-Dimensional Rectangular Enclosures," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.31, No.8, pp.1711-1721.
- (15) Lathrop, K. D., and Carlson, B. G., 1967, "Numerical Solution of the Boltzmann Transport Equation," Journal of Computational Physics, Vol.2, pp.173-197.
- (16) Jamaluddin, A. S., and Smith, P. J., 1988, "Predicting Radiative Transfer in Rectangular Enclosures Using the Discrete Ordinates Method," Combustion and Technology, Vol.59, pp.321-340.
- (17) Sanchez, A., and Smith, T. F., 1992, "Surface Radiation Exchange for Two-Dimensional Rectangular Enclosures Using the Discrete-Ordinates Method," ASME Journal of Heat Transfer, Vol.114, pp.465-472.
- (18) Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V., 1994, "Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer," Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol.8, No.3, pp.419-425.
- (19) Thynell, S. T., and Ozisik, M. N., 1987, "Radiation Transfer in Isotropically Scattering, Rectangular Enclosures," Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol.1, No.1, pp.69-76.