

원형 덕트유동에서의 Graetz 문제에 대한 이중교환 경계요소 해석

최 창 용*
(1998년 8월 5일 접수)

Dual Reciprocity Boundary Element Analysis for the Graetz Problem in Circular Duct

Chang Yong Choi

Key Words : Graetz Problem (Graetz 문제), Dual Reciprocity Boundary Element Method (이중교환 경계요소법), Source Term (원천항), Domain Discretization (영역이산화), Radial Basis Interpolation Function (Radial Basis 보간함수), Boundary Integral Equation (경계적분식), Nusselt Number (Nusselt 수), Dimensionless Axial Location (무차원 축방향 위치)

Abstract

The dual reciprocity boundary element method (DRBEM) is used to solve the Graetz problem of laminar flow inside circular duct. In this method the domain integral term of boundary integral equation resulting from source term of governing equation is transformed into equivalent boundary-only integrals by using the radial basis interpolation function, and therefore complicate domain discretization procedure is completely removed. Velocity profile is obtained by solving the momentum equation first and then, using this velocities as input data, energy equation is solved to get the temperature profile by advancing from duct entrance through the axial direction marching scheme. DRBEM solution is tested for the uniform temperature and heat flux boundary condition cases. Local Nusselt number, mixed mean temperature and temperature profile inside duct at each dimensionless axial location are obtained and compared with exact solutions for the accuracy test. Solutions are in good agreement at the entry region as well as fully developed region of circular duct, and their accuracy are verified from error analysis.

기호설명

b : Poisson 방정식에서의 원천항
 c : 비열 또는 상수
 C : 계수행렬
 f_j : 보간함수
 F : f_j 를 원소로 갖는 행렬
 G : u^* 와 관련된 계수행렬
 H : q^* 와 관련된 계수행렬
 L : 내부점의 개수
 N : 경계요소의 개수
 n : 단위 수직벡터

p : 압력
 Q : \hat{q}_N 를 원소로 갖는 행렬
 q : u 의 수직방향 도함수
 \hat{q} : 특수해
 q^* : 기본해
 r : 반경 또는 source point i 에서 collocation point j 까지의 거리
 T : 온도
 \hat{T} : T 의 축방향 도함수 ($\partial T / \partial z$)
 T_m : 혼합 평균온도
 U_D : $w(x, y) / a_t$ 를 원소로 갖는 대각행렬
 \hat{U} : \hat{u}_N 를 원소로 갖는 행렬
 u : 입반식의 독립변수

* 회원, 전주대학교 기계공학과

- \hat{u} : u 의 축방향 도함수 ($\partial u/\partial z$)
- \hat{u} : 특수해
- u^* : 기본해
- w : 축방향 유동속도
- w_m : 축방향 평균유동속도
- z^+ : 축방향 무차원좌표 ($z/(r_o RePr)$)
- α_j : f_j 의 미정계수
- α_i : 열확산율
- Γ : 경계
- Δ : Dirac delta 함수
- ξ : 0과 1사이의 값
- θ : 각도
- μ : 점성계수
- ν : 동점성계수
- ρ : 밀도
- ϕ : 선형보간함수
- Ω : 유동영역

1. 서 론

속도분포는 완전히 발달되어 있고 온도분포는 가해진 열적 경계조건에 따라 변화해야 하는 덕트유동의 경우, 이는 열적 입구길이 문제(thermal entry length problem)인 Graetz 문제로서 알려져 있다. Graetz 문제는 그 중요성으로 인하여 해석적 및 수치적 해법이 집중적으로 연구되어 왔으며 이는 참고문헌들^(1,2)에 잘 정리되어 있다. 특히 덕트유동 열전달 문제에 대한 수치적 해법은 유한요소법, 유한차분법, 유한체적법 등과 같은 다양한 수치해석 방법의 발달과 함께 지속적으로 연구되어 왔으며, 최근에는 속도 및 온도분포 모두 완전히 발달된 경우에 대하여 Velusamy 등⁽³⁾이 반타원형(semi-elliptical) 덕트유동에서의 총류 대류열전달 문제를 다루었고 Sim 등⁽⁴⁾은 편심환(eccentric annulus) 덕트유동에 대한 새로운 수치적 해법을 제시하였다. 한편 Ramachandran⁽⁵⁾은 Graetz 문제에 대하여 경계요소법을 적용하였으나 문제의 차원을 일차원으로 제한하였다. 본 논문에서는 기존 경계요소법의 문제점을 개선한 새로운 수치해석 방법인 이중교환 경계요소법(dual reciprocity boundary element method)⁽⁶⁾을 원형 덕트유동에서의 Graetz 문제에 대하여 적용 연구하였다.

경계요소법⁽⁷⁾은 처음 열전달 문제의 해법으로

소개된 이후 여러 가지 장점 때문에 다양한 수치해석법 중에서 가장 선호하는 방법의 하나로 연구되고 있다. 이 방법은 수치해를 얻기 위하여 기존의 유한차분법이나 유한요소법과 같이 영역 전체를 격자 혹은 요소로 나눌 필요없이 단지 영역의 경계만을 요소로 나누어 경계에 대한 해뿐만 아니라 영역내부의 임의의 위치에 대한 해를 구할 수 있도록 한다. 따라서 문제의 차원은 한 단계 줄어들고 해를 구하기 위해 필요한 입력자료는 크게 감소된다. 경계요소법의 또 다른 장점은 식의 구성이 적분식에 기초함으로써 미분보다는 안정적인 수치적분을 사용한다는 것이다⁽⁸⁾. 전도열전달 문제에 관해서는 경계요소 해법이 활발히 적용 연구^(9,10,11)되어 왔지만 대류열전달 문제에 대해서는 이의 연구가 아직 미흡한 실정이다. 대류효과는 열전달 현상에서 매우 중요한 모드중의 하나이므로 경계요소법의 대류열전달 해법개발은 보다 많은 연구노력을 필요로 한다. 대류열전달 문제에 관한 경계요소법 적용의 주요한 어려움은 기본해(fundamental solution)라 불리는 일반화된 Green 함수가 Laplace 방정식과 같은 단지 몇가지 지배방정식 형태에 대해서만 존재한다는 사실이며, 이외의 지배방정식에 대해서는 원천항(source term) 형태의 영역적분항 발생으로 인하여 경계요소외에 추가적인 영역이산화(domain discretization)를 필요로 한다는 것이다.

이중교환 경계요소법(DRBEM)은 1982년 Nardini와 Brebbia⁽¹²⁾에 의해 처음 도입되었으며 지금까지는 위에서 언급된 제한적인 기본해 형태 및 영역적분 문제 등을 해결하는 가장 성공적인 기술로 여겨지고 있다. 이 방법은 주어진 지배방정식에 대하여 단순히 이용 가능한 기본해를 사용하고 나머지 원천항에서 생기는 영역적분항은 radial basis interpolation function^(13,14)을 사용하여 경계로 이동시키며, 따라서 해는 경계만을 요소로 나눔으로서 얻어진다. 이러한 장점의 결과로서 이중교환 경계요소법은 다양한 공학적 분야에서 적용되고 있으며 최근에는 대류유동 열전달 문제로의 적용 연구노력^(15,16,17,18)이 이루어지고 있다.

본 논문에서는 axial direction marching 방법을 사용한 이중교환 경계요소법을 적용하여 원형 덕트유동에서의 Graetz문제에 대한 해를 구하는 방법이 연구되었다. 유체는 완전히 발달된 총류 상태에서 열적 경계조건이 가해지며, 대류열전달 문제에 대한 이중교환 경계요소 해법을 시험하기 위한 목적으로 균일 온도 경계조건과 균일 열유속 경계조건의 경우가 선정되었다. 이 방법

에 의한 수치해는 그 정확도가 문헌⁽²⁾에서 얻어지는 엄밀해와 비교되었으며 선정된 모두의 시험 경우에 대하여 해석결과는 엄밀해와 잘 일치하였다.

2. 식의 구성

Fig. 1과 같이 반경 r 의 크기가 r_0 인 원형덕트에서 작동유체가 비압축성 뉴우먼 유체인 경우를 고려하였다. z 방향 좌표는 유동 축방향을 나타내며, x - y 방향은 유동 축에 수직인 단면에 부착된 좌표를 표시한다. 수리학적으로 완전히 발달된 층류 유동에 대하여 운동량 방정식인 Navier-Stokes 방정식은 체적력이 무시되고 일정한 물성치를 갖는 경우 단순 압력구배 유동인 Poiseuille 유동방정식이 된다. 여기서 유동은 완전히 발달된 경우이므로 축방향 유동속도는 단지 x - y 좌표만의 함수이며 이때 축방향 압력구배는 일정한 값을 갖는다. 한편 에너지 방정식에서는 점성소산 및 축방향 열전도 효과를 무시하였다. 따라서 Graetz 문제를 지배하는 방정식은 아래와 같은 Poisson 방정식의 형태⁽¹⁸⁾로 표현된다.

운동량 방정식 :

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (1)$$

에너지 방정식 :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{w}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

위 식에서 w , μ , p , T , 및 $\alpha(k/\rho c)$ 등은 각각 축방향 유동 속도, 점성계수, 압력, 온도 그리고 열확산율을 나타낸다. 여기서 운동량 방정식에 대한 경계조건은 고체 경계면에서의 비활조건(no slip condition)에 따라

$$w = 0 \quad \text{at } r = r_0 \quad (3)$$

이며, 에너지 방정식에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$T = T_0 \quad \text{or} \quad q = q_0 \quad \text{at } r = r_0 \quad (4)$$

위 식에서 T_0 은 원형덕트의 표면에 가해지는 온도조건을, q_0 은 열유속 조건을 각각 나타낸다. 식을 완성하는 최종적인 조건은 시간변수가 포함된 미분방정식에서의 초기조건과 같은 개념으로

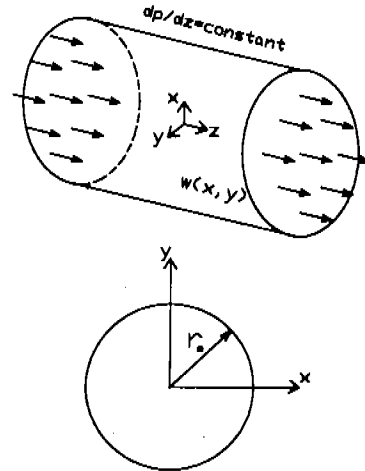


Fig. 1 Schematic of circular duct flow for the Graetz problem analysis.

취급할 수 있는 입구조건이며 이는 아래와 같이 주어진다.

$$T = T_0 \quad \text{at } z = 0 \quad (5)$$

온도분포 해를 얻기 위해서는 먼저 운동량 방정식 식 (1)과 경계조건 식 (3)으로 부터 속도 w 에 대한 해를 구한 후에 에너지방정식 식 (2)를 경계조건 식 (4) 및 입구조건 식 (5)와 함께 풀어서 온도 T 에 대한 해를 구한다. 여기서 운동량 방정식과 에너지방정식은 점성이 일정하다는 가정의 도입으로 각각 별개의 식으로 풀 수 있게 되었다.

3. 이중교환 경계요소식

주어진 경계 및 입구조건에서의 지배방정식 식 (1)과 (2)는 경계요소해를 구하기 위하여 다음과 같은 Poisson 방정식의 형태로 일반화 될 수 있다.

운동량 방정식:

$$\nabla^2 u(x, y) = b(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (6)$$

에너지 방정식:

$$\nabla^2 u(x, y) = b(x, y, z, u), \quad (x, y) \in \Omega \quad (7)$$

여기서 주어진 경계조건은 두 식 모두에 대하여 아래와 같이 주어지며

$$u(x, y) = \bar{u}, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (8)$$

$$q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \bar{q}, \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad (9)$$

에너지 방정식의 경우는 추가적으로 다음의 초기 조건을 필요로 한다.

$$u(x, y) = u_0, \quad \text{at } z=0 \quad (10)$$

여기서 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ 는 해의 영역 Ω 의 전체 경계를, n 은 경계에 대한 수직방향을, \bar{u}, \bar{q} 는 각각 주어진 경계조건을, u_0 는 주어진 초기조건을 나타낸다 (Fig. 2 참조). 한편 총류대류 Graetz 열전달문제를 위 일반식으로 표현하면 다음과 같다.

운동량 방정식 (식 (1) 참조):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w, \\ b(x, y) &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{constant} \end{aligned} \quad (11)$$

에너지 방정식 (식 (2) 참조):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= T, \\ b(x, y, z, u) &= \frac{1}{\alpha_i} u(x, y) \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (6) 또는 (7)을 함수 u^* 로 가중하여 적분한 후 Green's second identity와 기존의 경계요소 기법⁽⁷⁾을 적용하면 다음과 같은 적분식이 유도된다.

$$\begin{aligned} c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \\ - \int_{\Omega} b u^* d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 q^* 는 u^* 의 수직방향 도함수 $\partial u^*/\partial n$ 을 나타내며, 상수 c_i 는 점위치 i 에 따라 아래의 값을 갖는다.

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{for } (x_i, y_i) \in \Omega \\ \frac{\theta}{2\pi} & \text{for } (x_i, y_i) \in \Gamma \end{cases} \quad (14)$$

한편 θ 는 점 i 에서의 양쪽 경계 Γ 의 접선 사이 각을 표시한다. 또한 u^* 는 한점 i 에 가해지

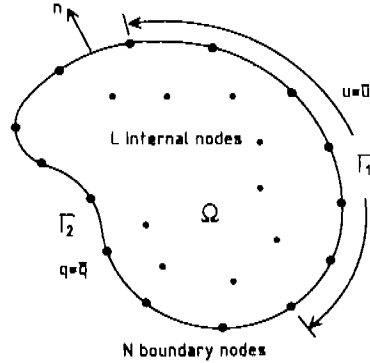


Fig. 2 Geometric definitions for the DRBEM analysis.

는 단위 집중원(unit impulse source)에 의해 발생하는 장(field)을 의미하고, Dirac delta function Δ_i 를 이용하면 다음식으로 표시되며 이 해를 기본해라 부른다.

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (15)$$

이중교환 경계요소법의 핵심은 식 (13)의 우변에 있는 영역적분을 경계로 이동시켜 복잡한 영역 이산화과정을 제거하는 것이다. 따라서 원천항에 해당하는 $b(x, y)$ 또는 $b(x, y, z, u)$ 항은 각 점 j 에서의 값과 보간함수(interpolating function) f_j 의 세트로서 다음식으로 근사화될 수 있다⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} b(x, y) &\approx \sum_{j=1}^{N+L} a_j f_j(x, y) \quad \text{or} \\ b(x, y, z, u) &\approx \sum_{j=1}^{N+L} a_j(z) f_j(x, y) \end{aligned} \quad (16)$$

이때 a_j 는 정해져야할 미정계수 세트이며, $N+L$ 은 경계의 점점 수 N 과 내부점들의 개수 L 의 합이다. 이제 다음식을 만족하는 함수 \hat{u}_j 를 얻는다면 영역 적분항은 경계로 이동될 수 있다.

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (17)$$

최종적으로 식 (17)을 식 (16)에 대입하고 식 (13)의 영역 적분항에 부분적분을 두 번 수행하면 다음의 이중교환 경계적분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \\
 & = \sum_{j=1}^{N+1} a_j (c_i \hat{u}_j \\
 & + \int_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{q}_j u^* d\Gamma)
 \end{aligned} \tag{18}$$

한편 DRBEM에서의 보간함수 f_j 로는 radial basis 함수의 일반적 형태인 $f_j = 1 + r^2 + \dots + r^m$ 를 사용⁽⁶⁾ 하며 참고문헌^(13,14)에서 이에 대한 다양한 차수의 보간함수가 시험되었지만 고차의 보간함수가 정확도에서 미미한 정도의 개선을 보인 반면에 $f_j = 1 + r$ 는 적용의 간편함과 동시에 충분한 정확도를 보였다. 따라서 본 연구에서는 다음의 radial basis 함수를 선택하였다.

$$f_j(x, y) = 1 + r(x, y) \tag{19}$$

위에서 $r(x, y) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$ 는 source point i 또는 DRBEM collocation point j 로부터 field point (x, y) 까지의 거리를 나타내며, u^* , q^* , \hat{u} , \hat{q} 들은 다음과 같이 유도⁽⁶⁾된다.

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{21}$$

$$q^* = \frac{-1}{2\pi r} \nabla r \cdot \vec{n}$$

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \tag{22}$$

$$\hat{q} = \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3}\right) \nabla r \cdot \vec{n}$$

적분식 식 (18)의 수치해를 구하기 위하여 전체 경계는 여러개의 요소로 이산화되고 각 경계 요소 내에서의 u , q , \hat{u} 와 \hat{q} 는 선형변화로서 모델링^(11,18)된다.

$$\int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma = u_k h_{ik}^1 + u_{k+1} h_{ik}^2 \tag{23}$$

$$\int_{\Gamma_k} q u^* d\Gamma = q_k g_{ik}^1 + q_{k+1} g_{ik}^2 \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_k} \hat{u}_j q^* d\Gamma \\
 & = \hat{u}_{kj} h_{ik}^1 + \hat{u}_{(k+1)j} h_{ik}^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_k} \hat{q}_j u^* d\Gamma \\
 & = \hat{q}_{kj} g_{ik}^1 + \hat{q}_{(k+1)j} g_{ik}^2
 \end{aligned} \tag{26}$$

여기서

$$h_{ik}^1 = \int_{\Gamma_k} \phi_1 q^* d\Gamma, \quad h_{ik}^2 = \int_{\Gamma_k} \phi_2 q^* d\Gamma \tag{27}$$

$$g_{ik}^1 = \int_{\Gamma_k} \phi_1 u^* d\Gamma, \quad g_{ik}^2 = \int_{\Gamma_k} \phi_2 u^* d\Gamma \tag{28}$$

식 (27)과 식 (28)에서 첫 번째 아래첨자는 유속이나 온도가 계산되는 위치를, 두 번째 하첨자는 적분이 수행되는 경계요소를 각각 나타내며 위치자 1과 2는 각각 선형 보간함수(linear interpolation function) ϕ_1 과 ϕ_2 로서 u^* , q^* 로 가중된 적분을 수행함을 의미한다.

따라서 경계 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 를 N 개의 요소로 나누면, 식 (18)에서의 항들은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma & = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma \\
 & = \sum_{k=1}^N [h_{ik}^2 (k-1) + h_{ik}^1] u_k = \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\text{or} = \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_k \text{ for } \hat{u}_j$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma & = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q u^* d\Gamma \\
 & = \sum_{k=1}^N [g_{ik}^2 (k-1) + g_{ik}^1] q_k = \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k \tag{30}
 \end{aligned}$$

$$\text{or} = \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_k \text{ for } \hat{q}_j$$

이때 $h_{i0}^2 = h_{iN}^1$ 그리고 $g_{i0}^1 = g_{iN}^2$ 이다.

최종적으로 식 (29)와 (30)을 식 (18)에 도입하여 식을 정리하면 다음의 이중교환 경계요소식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k \\
 & = \sum_{j=1}^{N+1} a_j (c_i \hat{u}_j \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_k \\
 & - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_k)
 \end{aligned} \tag{31}$$

여기서 H_{ik} , G_{ik} 는 위에 설명한 과정에 따라 정리된 적분항을 표시하는 influence coefficient 행렬이며, 해석대상 경계의 기하학적 형상만의 함수로서 수치적분의 방법으로 쉽게 구할 수 있다.

4. 수치해석 과정

수치해를 얻기 위하여 식 (31)는 다음 행렬식의 형태로 정리될 수 있다. 이때 $[H]$ 와 $[G]$ 는 각각 H_{ik} 와 G_{ik} 를 원소로 갖는 행렬이며, 계수 c_i 는 행렬 $[H]$ 의 주대각 원소에 포함되었다.

$$\begin{aligned} & [H]\{u\} - [G]\{q\} \\ & = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{a\} \end{aligned} \quad (32)$$

위에서 $\{u\}$, $\{q\}$, $\{a\}$, $[\hat{U}]$, $[\hat{Q}]$ 등은 벡터 u_k , q_k , a_j ; 그리고 j 번째 열벡터(column vector) \hat{u}_k , \hat{q}_k 를 갖는 행렬을 각각 나타내며, 특히 벡터 $\{a\}$ 는 식 (16)으로부터 $\{a\} = [F]^{-1}\{b\}$ 로 주어진다.

최종 해인 온도 T 를 구하기 위해서는 먼저 운동량 방정식을 풀어 유동속도 w 를 구해야 하며, 이 경우 식 (11)에 따라 행렬식은 다음과 같이 간단히 정리된다.

$$\begin{aligned} & [H]\{u\} - [G]\{q\} \\ & = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}]) [F]^{-1}\{b\} \\ & = \{d\} = \text{known vector} \end{aligned} \quad (33)$$

이때 u 는 유동속도 w 를, q 는 $\partial w / \partial n$ 를 의미하며, 우변항은 경계요소의 절점 및 내부점의 위치와 주어지는 축방향 압력구배 항에 의해서만 결정되는 값으로서 벡터 $\{d\}$ 로서 간단히 정리된다. 따라서 식 (33)에 경계조건을 도입하여 좌우변을 정리하면 [coefficient matrix](unknown vector) = (known vector)와 같은 선형방정식 세트 형태로 변환되어 유동속도를 간단히 구할 수 있다.

한편 유체온도 T 는 파이프 입구에서 축방향 위치 z 에 따라 변화하는 경우이므로 $\partial T(x, y, z) / \partial z = \dot{T}$ 라 두면 식 (12)와 식 (16)에 따라 원천항 b 는 아래의 행렬식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_i} w(x, y) \dot{T}(x, y, z) = [U_D]\{\dot{T}\} \\ & = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j(z) f_j(x, y) = [F]\{a\} \end{aligned} \quad (34)$$

이 식에서 행렬 $[U_D]$ 는 $w(x, y) / \alpha_i$ 를 원소로 하는 대각행렬을 나타내며, 벡터 $\{\dot{T}\}$, $\{a\}$ 는 모두 입구의 축방향 위치 z 에서 계산되는 값이다. 또

한 온도 T 를 본 논문에서 채택한 일반변수 u 로서 표시하면 벡터 $\{a\}$ 는 다음과 같으며

$$\begin{aligned} \{a\} & = [F]^{-1}[U_D]\{\dot{T}\} \\ & = [F]^{-1}[U_D]\{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (35)$$

이를 식 (32)에 대입하고

$$\begin{aligned} & [H]\{u\} - [G]\{q\} \\ & = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}]) \\ & \cdot [F]^{-1}[U_D]\{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (36)$$

각 항들을 정리하면 최종적으로 아래와 같은 식을 얻는다.

$$[C]\{\dot{u}\} + [H]\{u\} = [G]\{q\} \quad (37)$$

여기서 $[C] = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}]) [F]^{-1}[U_D]$ 이며, 위식에 편미분항의 축방향 z 좌표 관한 two-level integration scheme⁽⁶⁾을 적용하면 선정된 축방향 간격 Δz 사이의 위치 m 과 $m+1$ 내에서의 변수 u 와 q 의 변화는 다음의 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} u & = (1 - \xi_1)u^m + \xi_1 u^{m+1} \\ q & = (1 - \xi_2)q^m + \xi_2 q^{m+1} \\ \dot{u} & = \frac{1}{\Delta z} (u^{m+1} - u^m) \end{aligned} \quad (38)$$

한편 식 (38)에서 ξ_1 과 ξ_2 는 0에서 1사이의 상수값이다. 본 논문에서는 fully implicit scheme을 택하였고, ξ_1 과 ξ_2 에 각각 상수값 1을 대입하여 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{[C]}{\Delta z} + [H] \right) u^{m+1} - [G]q^{m+1} \\ & = \frac{[C]}{\Delta z} u^m \end{aligned} \quad (39)$$

각 축방향 z 좌표 위치에서의 덕트내 온도분포 T 를 구하기 위해서는 위식을 덕트입구에서 부터 시작하여 축방향으로 단계적 전진을 하면서 차례로 풀어가는 axial direction marching 방법으로 풀어야 한다. 시간변수에서의 초기조건과 동일한 개념의 $z=0$ 즉 $m=0$ 에서의 주어진 입구조건을 대입하고 다음의 축 위치 즉 $m=1$ 에서의 경계조건을 적용한 후 온도 T 를 구하며, 이는 다시 다음 단계의 초기조건으로 사용되는 반복과정을 통하여 축 방향의 온도분포 T 를 차례로 구해나갈 수 있다.

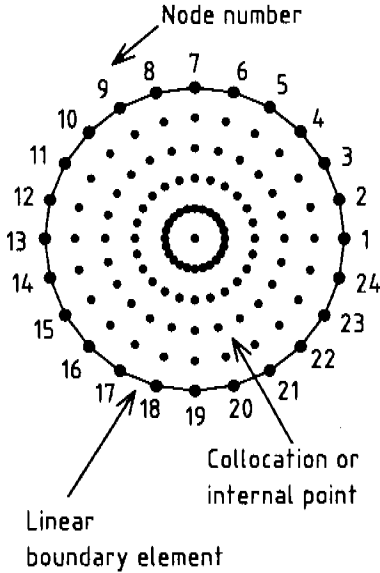


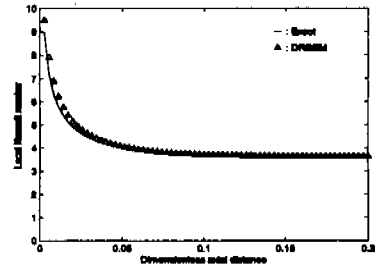
Fig. 3 Boundary element nodes and internal points for the system to be analyzed.

수치해를 구하기 위한 계산 알고리즘은 아래와 같이 요약될 수 있다.

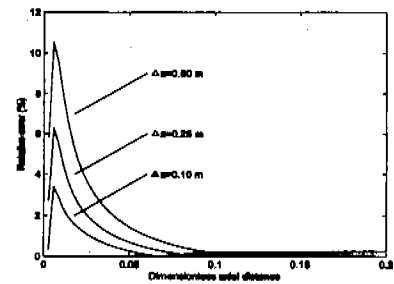
- (1) 운동량 방정식에 해당하는 식 (33)에 주어진 경계조건을 도입한다.
- (2) 덕트단면에서의 유동 속도분포 w 를 구한다.
- (3) 에너지 방정식에 해당하는 식 (39)에 주어진 경계조건 및 입구조건을 도입한다.
- (4) 덕트입구에서 시작하여 다음 축방향 위치로 반복 진행하면서 온도분포를 구해나간다.

5. 결과 및 고찰

이 절에서는 이중교환 경계요소법(DRBEM)을 원형덕트 층류유동에서의 Graetz 문제에 적용하여 얻은 결과를 제시하고 있다. 이 해법을 시험하기 위하여 반경 $r_o = 0.02\text{m}$ 의 원형덕트 내에서 유체유동이 $(1/\mu) \times (dp/dz) = -643.18 (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$ 에 상당하는 압력구배에 의하여 발생하는 경우를 선택하였으며, 입구에서의 유체온도는 $T_s = 30^\circ\text{C}$ 로 일정하고 열확산율과 Prandtl 수가 각각 $\alpha_t = 0.147 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, $\text{Pr} = 5.83$ 인 유체를 고려하였다. 한편 경계는 Fig. 3과 같이 24개의 등일 크기 경계요소로 이산화되었으며, 내부점은



(a) Variation of Nu



(b) Accuracy test

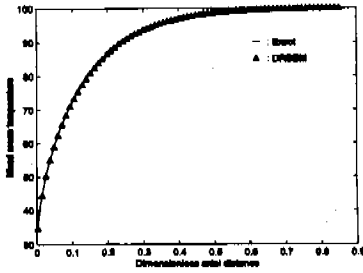
Fig. 4 Comparison of local Nusselt number variation along the dimensionless axial distance ($z^+ = z/(r_o Re Pr)$) for the uniform temperature imposed case.

총 97개가 그리고 축방향 계산간격은 $\Delta z = 0.5\text{m}$ 가 선정되었다.

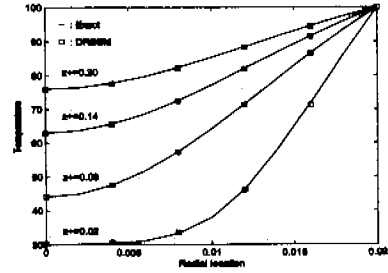
한편 수치적 과정을 통하여 얻어진 덕트단면에서의 속도 및 온도는 선정된 내부점 및 경계요소 절점에서만 주어지므로 무차원 수인 Reynolds 수와 Nusselt 수를 얻기 위해 단면에서의 평균속도 w_m 및 혼합 평균온도 T_m 은 다시 아래 식으로부터 수치적으로 계산되었다.

$$\begin{aligned}
 w_m &= \frac{2}{r_o^2} \int_{r=0}^{r=r_o} w r dr \\
 T_m &= \frac{2}{r_o^2 w_m} \int_{r=0}^{r=r_o} w T r dr \\
 Re &= \frac{w_m D}{\nu} = \frac{w_m 2r_o}{\nu} \\
 Nu &= \frac{hD}{k} = 2r_o \frac{-(\frac{\partial T}{\partial r})_{r=r_o}}{(T_w - T_m)}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

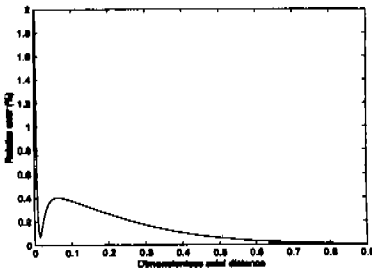
덕트내 유동은 완전히 발달된 경우이므로 속도 분포는 축방향으로 변하지 않으며, 속도분포의



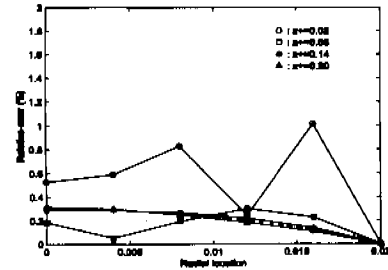
(a) Variation of mixed mean temperature (°C)



(a) Variation of temperature profile (°C)



(b) Accuracy test



(b) Accuracy test

Fig. 5 Comparison of mixed mean temperature variation along the dimensionless axial distance ($z^+ = z/(r_o RePr)$) for the uniform temperature imposed case.

Fig. 6 Comparison of temperature profile variation along the dimensionless axial distance ($z^+ = z/(r_o RePr)$) for the uniform temperature imposed case.

DRBEM 해는 이전의 연구결과⁽¹⁸⁾에서 보여졌듯이 24개의 경계요소로서 만족할 만한 정확도를 얻을 수 있다. 비록 엄밀해를 얻을 수 있는 경우이지만 수치해석의 일관성을 유지하기 위해 속도 분포의 수치해를 에너지 방정식의 입력으로 사용하여 온도분포 해를 구하였다.

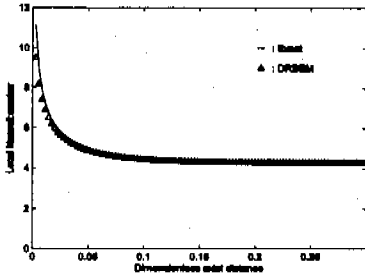
열적 문제에 대해서는 균일 온도 경계조건 및 균일 열유속 경계조건이 가해지는 두가지 조건에 대하여 시험하였다. Fig. 4는 균일 온도 경계조건 $T_w = 100^\circ\text{C}$ 이 가해질 때 무차원 축방향위치 $z^+ = z/(r_o RePr)$ 에 대한 국소 Nusselt 수의 변화와 수치해의 정확도를 나타낸다. DRBEM 국소 Nusselt 수의 변화는 엄밀해의 변화와 잘 일치하며 열적 완전발달 조건인 3.657로 매우 정확히 수렴함을 알 수 있다. 한편 Fig. 4(b)에서와 같이 수치계산된 국소 Nusselt 수의 오차는 입구영역에서 $\Delta z = 0.5\text{m}$ 일 때 최대 11%, $\Delta z = 0.1\text{m}$ 일 때 최대 4% 정도의 오차를 보이지만 축방향으로 갈수록

오차는 급속히 감소하며 $z^+ = 0.05$ 이상에서는 상대 오차 2%이내의 정확도를 나타낸다. Fig. 5는 축방향 위치 z^+ 에 따른 혼합 평균온도분포를 나타낸다. 역시 수치해와 엄밀해는 최대 2% 상대오차 내로 잘 일치함을 나타내며 최대오차는 예상되듯이 입구영역에서 나타난다. 한편 Fig. 6는 각 축방향 위치에서의 원형덕트내 온도분포를 표시하며 수치해는 1.2%이내의 상대오차로 매우 좋은 결과를 보여준다. 또한 균일 열유속 조건으로서 $\partial T/\partial n = 100^\circ\text{C}/\text{m}$ 의 경계조건이 가해질 때 Fig. 7은 축방향에 따른 국소 Nusselt 수의 변화와 수치해의 정확도를 표시한다. 수치계산된 Nusselt 수는 4.283으로 수렴하며 엄밀해의 수렴값 4.364와는 약 2%정도의 상대오차를 나타낸다. 이때 Fig. 7(b)는 온도조건의 경우와 마찬가지로 최대오차가 입구영역에서 발생함을 보여준다. Fig. 8은 경계표면 온도 T_w 와 혼합평균온도 T_m 의 변화를 나타낸다. 두 온도 모두 초기에는

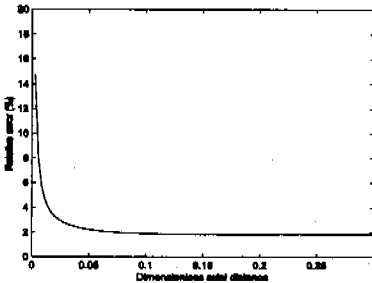
계산치가 엄밀해와 매우 잘 일치하지만 약간의 기울기 차이를 가지고 변화한다는 사실을 Fig. 8(b)에서 알 수 있다. 그러나 이미 충분한 정확도를 갖고 있어서 $z^+=0.5$ 일 때 약 0.35%정도의 매우 낮은 오차를 보인다.

6. 결론

원형덕트 유동의 Graetz 문제에 대하여 DRBEM 해법이 적용되었다. 운동량 방정식 및 에너지 방정식의 경계적분식으로 부터 복잡한 영역적분항을 제거하는 방법을 통해 경계만을 요소로 나누어 수치해결 구할 수 있는 행렬식을 유도하였다. 시험조건으로 선정된 균일 온도 및 균일 열유속 경계조건 모두에서 DRBEM은 엄밀해와 잘 일치하며 연구 결과는 다음과 같이 요약된다.



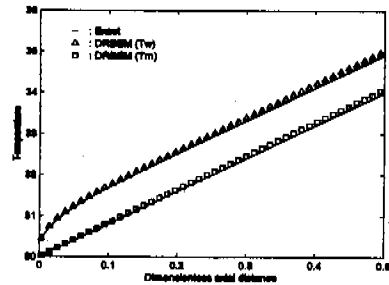
(a) Variation of Nu



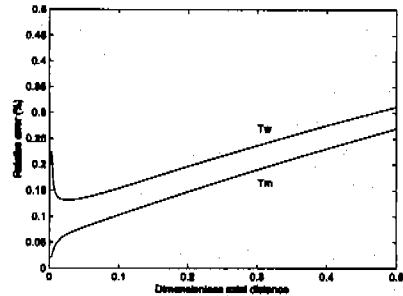
(b) Accuracy test

Fig. 7 Comparison of local Nusselt number variation along the dimensionless axial distance ($z^+=z/(r_o Re Pr)$) for the uniform heat flux imposed case.

이상의 결과로 부터 본 연구에서 제시된 DRBEM 해법은 온도 및 열유속 경계조건 모두에 대한 원형덕트 유동의 Graetz 문제에 대하여 성공적으로 적용되었으며, DRBEM 해는 엄밀해와 비교검토됨으로서 그 정확도를 검증하였다. 덕트 입구영역에서의 상대적으로 큰 오차는 DRBEM 과도변화 문제에서 공통적인 것⁽¹⁰⁾으로 인식되지만 이는 곧 급격히 감소되는 경향을 보인다. 마지막으로 본 해법은 시험된 경계조건 및 덕트형상에 제한되지 않고 일반적인 경계조건 및 임의의 덕트형상에 대한 열적 입구길이 문제에 수정없이 적용될 수 있다.



(a) Variations of wall temperature ($T_w, ^\circ C$) and mixed mean temperature ($T_m, ^\circ C$)



(b) Accuracy test

Fig. 8 Comparison of mixed mean and wall temperature variations along the dimensionless axial distance ($z^+=z/(r_o Re Pr)$) for the uniform heat flux imposed case.

- (1) 단지 경계만을 요소로 나누어 Graetz 문제에 대한 해를 구할 수 있는 DRBEM 행렬식과 이의 수치적 해석과정을 제시하였다.
- (2) 본 해법은 균일 온도 및 균일 열유속 경계조건에서 24개의 선형변화 경계요소 및 97개의

내부점이 선정된 원형덕트 유동에 대하여 시험되었다.

(3) 무차원 축방향 위치에 따른 국소 Nusselt 수, 혼합평균온도 및 덕트내 온도분포변화 등의 DRBEM 결과가 엄밀해와 비교되었고 상대오차가 분석되었다.

(4) 수치해석 결과는 엄밀해와 잘 일치하였고 그 정확도가 검증되었으며, 덕트 입구영역에서외 최대오차는 축방향으로 진행함에 따라 급격히 감소됨을 보였다.

참고문헌

- (1) Kays, W. M. and Crawford, M. E., 1993, Convective Heat and Mass Transfer McGraw-Hill, Singapore.
- (2) Kakac, S., Shah, R. K. and Aung, W., 1987, Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, John Wiley, New York.
- (3) Velusamy, K., Garg, V. K. and Vaidyanathan, G., 1995, "Fully Developed Flow and Heat Transfer in Semi-Elliptical Ducts," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 16, No. 2, pp. 145~152.
- (4) Sim, W. G. and Kim, J. M., 1996, "Application of Spectral Collocation Method to Conduction and Laminar Forced Heat Convection in Eccentric Annuli," KSME Journal, Vol. 10, No. 1, pp. 94~104.
- (5) Ramachandran, P. A., 1993, "Boundary Integral Solution Method for the Graetz Problem," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 23, pp. 257~268.
- (6) Partridge, P. W., Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C., 1992, The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- (7) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New-York.
- (8) Kane, J. H., 1994, Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics, Prentice-Hall, New Jersey.
- (9) Goto, T. and Suzuki, M., 1996, "A Boundary Integral Equation Method for Nonlinear Heat Conduction Problems with Temperature-Dependent Material Properties," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, No. 4, pp. 823~830.
- (10) Choi, C. Y. and Kim, H. G., 1996, "Boundary Element Solutions of the Geometrical Inverse Heat Conduction Problems Using Regularization Procedure," Proceedings of the 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conferences, Vol. 2, pp. 1089~1095.
- (11) Choi, C. Y., 1997, "Detection of Cavities by Inverse Heat Conduction Boundary Element Method Using Minimal Energy Technique," Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing, Vol. 17, No. 4, pp. 237~247.
- (12) Nardini, D. and Brebbia, C. A., 1982, "A New Approach for Free Vibration Analysis Using Boundary Elements", Boundary Element Methods in Engineering, Compuataional Mechanics Publications, Southampton, pp. 312~326.
- (13) Partridge, P. W., 1994, "Dual Reciprocity BEM: Local versus Global Approximation Functions for Diffusion, Convection and Other Problems," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 14, pp. 349~356.
- (14) Yamada, T., Wrobel, L. C. and Power, H., 1994, "On the convergence of the dual reciprocity boundary element method", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 13, pp. 291~298.
- (15) Wrobel, L. C. and DeFigueiredo, D. B., 1991, "A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Convection-Diffusion Problems with Variable Velocity Fields," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 8, pp. 312~319.
- (16) Davis, B. A., Gramann, P. J., Matzig, C. M. and Osswald, T. A., 1994, "The Dual-Reciprocity Method for Heat Transfer in Polymer Processing," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 13, pp. 249~261.
- (17) Rahaim, C. P. and Kassab, A. J., 1996, "Pressure Correction DRBEM Solution for Heat Transfer and Fluid Flow in Compressible Viscous Fluids," Engineering

- Analysis with Boundary Elements, Vol. 18, pp. 265~272.
- (18) Choi, C. Y., 1998, "Dual Reciprocity Boundary Element Analysis for the Laminar Forced Convection Problem in Concentric Annulus," KSME International Journal, Submitted.
- (19) Singh, K. M. and Kalra, M. S., 1996, "Time Integration in the Dual Reciprocity Boundary Element Analysis of Transient Diffusion," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 18, pp. 73~102.