

# 약한 역압력구배의 난류유동장 해석을 위한 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형 개발

송 경\* · 조강래\*\*  
(1998년 11월 10일 접수)

## Development of Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Model for Prediction of a Turbulent Flow with a Weak Adverse Pressure Gradient

Kyoung Song and Kang Rae Cho

**Key Words:** Low Reynolds Number  $k-\epsilon$  Model(저레이놀즈수  $k-\epsilon$  모형), Separated Flow(박리유동), Adverse Pressure Gradient(역압력구배), SIMPLE Algorithm(심플알고리즘)

### Abstract

Recently, numerous modifications of low Reynolds number  $k-\epsilon$  model have been carried out with the aid of DNS data. However, the previous models made in this way are too intricate to be used practically. To overcome this shortcoming, a new low Reynolds number  $k-\epsilon$  model has been developed by considering the distribution of turbulent properties near the wall. This study proposes the revised a turbulence model for prediction of turbulent flow with adverse pressure gradient and separation. Nondimensional distance  $y^+$  in damping functions is changed to  $y^*$  and some terms modeled for one dimensional flow in  $\epsilon$  equations are expanded into two or three dimensional form. Predicted results by the revised model show an acceptable agreement with DNS data and experimental results. However, for a turbulent flow with severe adverse pressure gradient, an additive term reflecting an adverse pressure gradient effect will have to be considered.

### 기호설명

$a_\phi, b_\phi$  :  $\phi$ 의 벽면전개식의 계수  
 $C_\phi$  : 모형상수  
 $C_f$  : 벽면마찰계수 ( $= 2u_\tau^2/U_\infty^2$ )  
 $f_\mu, f_\beta, f_\xi, f_{wk}$  : 감쇄함수  
 $f_{Ro}$  : 레이놀즈수에 따른 감쇄함수  
 $H$  : 후향계단높이  
 $k$  : 난류운동에너지 ( $k^+ = k/u_\tau^2$ )  
 $P$  : 평균압력값  
 $P_k$  : 난류운동에너지 생성항

$Re_t$  : 난류레이놀즈수 ( $k^2/\nu\epsilon$ )  
 $Re_x$  : 무차원 유동방향거리 ( $U_\infty x/\nu$ )  
 $Re_\delta$  : 유동레이놀즈수 ( $U_\infty \delta/\nu$ )  
 $Re_\theta$  : 무차원 경계층운동량 두께 ( $U_\infty \theta/\nu$ )  
 $Re_r$  : 유동레이놀즈수 ( $U_r \delta/\nu$ )  
 $S$  : 평균변형률변수 ( $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ )  
 평균변형률텐서  
 $S_{ij}$  :  $\left( S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right)$   
 $U$  : 유동방향국부평균 속도 ( $U^+ = U/u_\tau$ )  
 $U_\infty$  : 자유유동속도  
 $u_i$  : 변동속도성분

\* 회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

\*\*회원, 연세대학교 기계공학과

- $\overline{u_i u_j}$  : 난류응력 ( $\overline{u_i u_j^+} = \overline{u_i u_j} / u_r^2$ )
- $u_r$  : 벽마찰속도 ( $\sqrt{\tau_w / \rho}$ )
- $x$  : 유동방향거리
- $y$  : 벽에서부터 유동방향에 수직한 거리
- $y^+$  : 벽면무차원거리 ( $y u_r / \nu$ )
- $y^*$  : 벽면무차원거리 ( $(\nu \epsilon)^{1/4} y / \nu$ )
- 평균류시간척도에 대한 난류시간척도
- $\beta$  :  $(S / (\epsilon / \nu))^{1/2}$
- $\delta$  : 경계층두께(평행평판 : 높이, 원판 : 직경)
- $\epsilon$  : 난류운동에너지 진소산률 ( $\epsilon^+ = \epsilon / (u_r^4 / \nu)$ )
- $\epsilon_w$  : 벽면소산률
- $\tilde{\epsilon}$  : 가소산률 ( $\epsilon - 2\nu(\sqrt{k_r})^2$ )
- $\kappa$  : Von Karman 상수 (=0.41)
- $\nu$  : 점성계수
- $\nu_t$  : 와점성계수
- $\theta$  : 경계층 운동량두께
- $\phi_{,i}, \phi_{,ii}$  : 거리  $x_i$ 에 대한  $\phi$ 의 1차, 2차편미분
- $\overline{\phi}$  :  $\phi$ 에 대한 시간평균값
- $\sigma_k, \sigma_\epsilon$  : 난류프란틀수
- $\xi$  : 소산률소멸추가항 ( $-0.3 \tilde{\epsilon} S f_\beta$ )

### 1. 서 론

난류유동은 대부분의 유체유동에서 발생하는 유동현상으로, 이를 수치적인 방법으로 해석하기 위한 난류모형의 개발이 여러 연구자들에 의해 수행되어 왔으며, 그 중에서도  $k-\epsilon$ 모형에 대한 많은 연구가 이루어져 왔다. 현재  $k-\epsilon$  모형 개발은 벽법칙을 사용하는 고레이놀즈수  $k-\epsilon$  모형(High Reynolds number  $k-\epsilon$  model, Standard  $k-\epsilon$  model)의 단점을 개선하기 위해 벽면영역까지 해석할 수 있는 저레이놀즈수  $k-\epsilon$  모형(Low Reynolds number  $k-\epsilon$  model, 이후 LRN 모형으로 표기)에 대하여 중점적으로 수행되고 있다.

$k-\epsilon$  모형에 대한 재고찰은 Patel *et al.*<sup>(1)</sup>에 의해 진행되었으며, 최근에는 Sarkar *et al.*<sup>(2)</sup>에 의해

최근의  $k-\epsilon$ 모형 및  $k-\tau$ ,  $k-\omega$ ,  $k-l$  LRN 모형이 고찰된 바 있다. 그러나, Patel *et al.*<sup>(1)</sup>과 Sarkar *et al.*<sup>(2)</sup>가 검증한 난류모형들은 가장 간단한 평행평판 유동장의 수치계산에 있어서도 난류 운동에너지  $k$ 와 소산률  $\epsilon$ 을 정확하게 예측하지 못하고 있다. 이는 기존에 사용된 소산률방정식이 벽면유동장을 예측하기에 부적절하였기 때문이라고 생각된다.<sup>(3)</sup> 최근의 모형개발에는 모형은 DNS결과가 이용되고 있으며, 대표적인 것으로 Nagano and Shimada,<sup>(4)</sup> 신종근과 최영돈<sup>(5)</sup>의 모형이 있다. 그러나, 이들은 DNS결과<sup>(6)</sup>를 이용하여 곡선접합식에 의해 소산률방정식을 모형화하였기 때문에 물리적인 근거가 빈약하다. 그러므로 모형식의 형태가 난해하며 평행평판의 낮은 레이놀즈수 유동 예측에서 DNS결과와 차이를 보였다.

이에 본 저자들은 앞서 벽면근처의 물리적인 근거를 이용하여 소산률방정식과 와점성감쇄함수를 수정한 LRN모형(이후 SYC모형)<sup>(3)</sup>을 제안한 바 있으며, 모형에 의해 여러 가지 레이놀즈수와 평행평판유동과 원형관유동장을 수치해석한 결과들이 DNS 및 실험결과와 좋은 일치율을 보임을 확인하였다.

본 연구에서는 완전발달 유동장에서 정확성이 확인된 SYC 모형을 박리가 있는 유동장에 적용할 수 있도록  $y^+$ 로 모형화된 항들을  $y^*$ 로 표현하고, 1차원 유동 모형식을 2, 3차원으로 확장하였다. 그리고 SYC모형에 포함된 레이놀즈수에 따른 변환함수  $f_{Re}$ 가 실제 공학응용문제에서 정의되기 어려우므로 제외하여 모형화하였다. 수정된 모형을 평판유동장에 적용하여 수정모형의 타당성을 확인한 후 역압력구배(adverse pressure gradient)가 있는 평판난류유동장과 후향계단유동장에 대한 수치계산결과를 DNS결과<sup>(7)</sup> 및 실험결과<sup>(8-10)</sup>와 비교하여 역압력구배가 있을 때의 모형의 성능을 검토하였다. 또한, 모형의 성능을 평가하기 위해서 Sarkar *et al.*<sup>(2)</sup>에 의해 검증된 모형들 중에서 Launder and Sharma(이후 LS 모형), Yang and Shih(이후 YS 모형), Sarkar(이후 SA모형)와 Nagano and Tagawa(이후 NT 모형),<sup>(11)</sup> Nagano and Shimada(이후 NS 모형), Abe, Kondoh and Nagano(이후 AKN모형)<sup>(12)</sup>의 모형들에 의해 계산된 결과와 비교하였다.

## 2. 수정된 난류모형

## 2.1. 지배방정식

비압축성, 정상 난류유동장 해석을 위한 지배 방정식은 연속방정식, 운동량방정식, 난류운동에너지 방정식과 소산률  $\varepsilon$  방정식이 있으며,  $k-\varepsilon$  모형인 경우에는 와점성  $\nu_t$ 에 대한 가정식이 추가된다. 이 중에서  $k$ ,  $\varepsilon$ 의 엄밀방정식과  $\nu_t$ 의 가정식은 다음과 같다.

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + T_k + \Pi_k + D_k - \varepsilon \quad (1)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} + P_{\varepsilon 3} + P_{\varepsilon 4} + T_{\varepsilon} + \Pi_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} - \Gamma \quad (2)$$

$$\nu_t = C_{\mu} f_{\mu} k^2 / \varepsilon \quad (C_{\mu} = 0.09) \quad (3)$$

본 저자들은 소산률방정식<sup>(2)</sup>에서 평균속도구배에 의한 소산생성 추가항  $P_{\varepsilon 1}, P_{\varepsilon 2}$ 을 Tennekes and Lumley<sup>(13)</sup>의 크기해석법을 이용하여 무차원화하였으며,  $P_{\varepsilon 4}$ 와  $\Gamma$ 는 기존의 LRN모형과 동일하게 모형화하여, 이로 인해 나타나는 차이를 보정하기 위해 소산소멸 추가항  $\xi$ 를 도입하였다.  $\xi$ 는 비등방성 스펙트럼방정식으로부터 모형화되었다. 다음의 식(4), (5)는 저자들에 의해 새롭게 모형화된  $k$ ,  $\varepsilon$ 방정식들<sup>(3)</sup>이다.

$$\frac{Dk}{Dt} = \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) k, y \right], y + P_k - \varepsilon - 0.5 \left[ \nu f_{wk} \frac{k}{\varepsilon} \varepsilon, y \right], y \quad (4)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \varepsilon, y \right], y + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - 0.35 \tilde{\varepsilon} \frac{dU}{dy} f_{\beta} + 0.5 \left[ \nu f_{wk} (1 - f_{wk}) \frac{\varepsilon}{k} k, y \right], y + 0.8 \left[ \nu \nu_t (U, yy)^2 + 0.006 \nu \frac{k}{\varepsilon} k, y U, y U, yy \right] \quad (5)$$

$$\text{단, } C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} (1 + 0.65 \beta f_{\beta}), \quad \beta = \frac{dU/dy}{(\varepsilon/\nu)^{1/2}}$$

$$\sigma_k = 1.2/f_{\sigma}, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3/1.2\sigma_k \text{이다.}$$

또한, 와점성  $\nu_t$ 의 와점성 감쇄함수  $f_{\mu}$ 는 벽면부근의 길이스케일을 고려함으로써 식(6)과 같이 모형화하였다.

$$f_{\mu} = \left[ \left( \frac{C_1}{Re_t^{1/2}} \frac{1}{\tanh(Re_t^{1/4}/C_{d1})} \right)^4 + 1 \right]^{1/4} \cdot \frac{[1 - \exp(-y^+/41)^2]}{2} \quad (6)$$

여기서  $C_1$ 은 4.0 이다. 위의 모형식(4)~(6)에서 사용된 감쇄함수와 모형상수들은 이전의 저자들의 논문<sup>(3)</sup>에 소개되어 있으며, 각각은 Table 1과 2.4절의 Table 3에 다시 제시되어 있다.

그러나, 모형식(4)~(6)은 박리가 없는 완전발달 유동장에서 모형화된 것으로 2, 3차원 유동장이나 박리가 있는 유동장 해석을 위해서는 식(5)의 밀줄 친 항과  $y^+$ 로 표현된 감쇄함수들이 수정되어야 하며, 복잡한 유동장에서 정의하기 어려운  $f_{Re}$ 함수들 모형에서 제외시켰다.

Table 1 List of Damping functions.

Damping function	Expressions
$f_2$	$[1 - 0.3 \exp[-(Re_t/6.5)^2]] \cdot [1 - \exp(-y^+/6)]^2$
$f_{wk}$	$\exp[-(y^+/9)^2]$
$f_{\beta}$	$\exp[-(Re_t/140f_{Re})^2]$
$f_{\sigma}$	$1 + 3.5 \exp[-(Re_t/120f_{Re})]$
$f_{Re}$	$1 - 0.5 \cdot \exp(-Re_t/10^4)$

2.2.  $y^+$ 로 표현된 감쇄함수의 수정

역압력구배가 존재하는 유동장의 실험결과에 의하면 역압력구배에 의하여 대수영역과 벽면마찰속도  $u_t$ 가 감소함이 알려져 있다. 이 유동장을 난류모형을 이용하여 해석할 때 벽면무차원거리  $y^+ (= u_t y / \nu)$ 로 표현된 감쇄함수를 사용할 경우 벽면마찰속도  $u_t$ 가 감소하므로 감쇄효과는 증가하여 대수영역에서도 감쇄효과가 존재한다. 그러나, 감쇄함수는 벽면부근의 점성저층해석을 위하여 도입된 것으로 대수영역에서는 감쇄효과가 소멸되어 1의 값을 가져야 한다. 따라서, 역압력구배가 있는 난류유동장을 해석할 때  $y^+$ 로 표현된 감쇄함수는 부적절하다. 또한 박리가 발

생하는 유동장에서는  $u_r$ 가 정의되지 않으므로  $y^+$ 의 사용은 불합리하다. 이를 해결하기 위해  $Re_y (= \sqrt{k}y/\nu)$ , 난류레이놀즈수  $Re_t$ 를 이용하거나  $y^* (= (\nu\varepsilon)^{1/4}y/\nu)$ 를 이용한 함수모형화<sup>(12)</sup>가 수행되고 있다. 본 연구에서도 저자들의 SYC 모형에서  $y^+$ 로 나타난 감쇄함수들을  $y^*$ 를 이용하여 모형화한다.

2.3.1 와점성감쇄함수  $f_\mu$ 의 수정

$f_\mu$ 와 식(6) 우변항의 ②항은 다음의 식(7)로 수정하였으며, 이 식은 식(6)의 ②항과 매우 유사한 분포를 나타낸다.

$$[1 - \exp(-(y^+/41)^2)] \rightarrow \tanh[(y^*/C_{fd})^2] \quad (7)$$

모형상수  $C_{fd}$ 는 식(7)이 벽에서 충분히 떨어진 대수영역( $y^+ \geq 100$ )에서 '1'이 되어야 하는 조건으로부터 결정될 수 있다. 대수영역에서의  $y^*$ 는 이 영역에서의  $\varepsilon (\approx u_r^3/xy)$ 와 분포로부터  $y^+$ 로 나타낼 수 있다.

$$y^* = \frac{(\varepsilon\nu)^{1/4}y}{\nu} \approx \frac{1}{x^{1/4}} \left( \frac{u_r y}{\nu} \right)^{3/4} \quad (8)$$

식(8)을 식(7)에 대입하고 대수영역( $y^+ \geq 100$ )에서 식(7)이 '1'이 되어야 하는 조건으로부터  $C_{fd} \approx 25$ 가 된다.

한편, 난류운동에너지 소산률  $\varepsilon^+$ 와  $y^*$ 의 벽면분포는 벽면무차원거리  $y^+$ 로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon}{u_r^3/\nu} = 2a_k + b_k y^+ + O(y^{+2}) \quad (9)$$

$$y^* = (2a_k)^{1/4} y^+ + O(y^{+2}) \quad (10)$$

식(10)에 의하면 식(7)은 다음의 식(11)과 같이  $y^{+2}$ 의 분포가 된다.

$$\tanh[(y^*/C_{fd})^2] \approx y^{+2}/C_{fd}^2 \approx O(y^{+2}) \quad (11)$$

그런데  $f_\mu$ 는 벽면부근에서  $1/y^+$ 를 가지므로 이를 위해서는  $1/y^{+3}$ 의 분포를 가지는 함수를 곱해야 하며 본 연구에서는 다음의 식(12)의 밑줄 친 항을 곱하여 모형화하였다.

$$f_\mu = \left[ \frac{C_1}{Re_t^{3/4}} \frac{1}{\tanh[(y^*/C_{fd})^{1/2}/C_{fd}] + 1} \right] \cdot \tanh[(y^*/C_{fd})^2] \quad (12)$$

식(12)에서 모형상수  $C_1, C_{fd}$ 은 본 저자들이 이전의 연구<sup>(3)</sup>에서 제시한 방법에 따라 구할 수 있다. 식(12)의 벽면분포로부터 구한  $f_\mu$ 의 벽면분포식(13)과  $f_\mu$ 의 정의에 의한 벽면분포식(14)는 아래와 같다.

$$f_\mu = \frac{C_1 \cdot C_2}{Re_t^{3/4}} \frac{(2a_k)^{1/2} y^{+2}}{C_{fd}^2} + \dots \\ = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_{fd}^2} \left( \frac{2}{a_k} \right)^{3/4} \frac{(2a_k)^{1/2}}{y^+} + \dots \quad (13)$$

$$f_\mu = \frac{\varepsilon^+ \overline{uv}^+}{C_\mu k^{+2} dU^+/dy^+} \\ = \frac{a_{uv} 2a_k}{C_\mu a_k^2} \frac{1}{y^+} + \dots \quad (14)$$

위 식에서 모형상수  $C_2$ 는 식(12)에서 다음 항의 값이다.

$$C_2 = \frac{1}{\tanh[(y^*/C_{fd})^{1/2}/C_{fd}]} \quad (15)$$

식(13), (14)는 동일해야 함으로  $C_1 \cdot C_2$ 에 대한 관계식이 구해진다.

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{a_{uv} 2a_k}{C_\mu a_k^2} C_{fd}^2 \frac{a_k^{1/4}}{2^{3/4}} \quad (16)$$

여러 가지 레이놀즈수의 DNS결과로부터  $a_k$ 와  $a_{uv}$ 를 식(16)에 대입함으로써  $C_1 \cdot C_2$ 이 결정된다.

$$C_1 \cdot C_2 \approx 30 \quad (17)$$

식(17)은  $C_1, C_2$ 의 곱의 형태이므로 본 저자가 제시한 방법<sup>(3)</sup>과 동일하게 다음과 같이 분리한다.

$$C_1 = 3.0, \quad C_2 = 10 \quad (18)$$

식(17), (18)과 다음의  $y^*/Re_t$  분포로부터  $C_{fd}$ 의 값을 구할 수 있다.

$$y^*/Re_t \approx \frac{2a_k y^{+4}}{a_k/2 y^{+4}} = 4 \quad (19)$$

$$C_{fd} = (y^*/Re_t)^{1/2} / \tanh^{-1}(1/C_2) \approx 19 \quad (20)$$

그러나, 완전발달유동장에 대한 수치해석결과  $C_{df} \approx 10$ 일 때 보다 정확한 결과물 구할 수 있으므로 본 연구에서는 이 값을 사용하였다.

식(18), (20)을 식(12)에 대입하면 최종적인 와 점성감쇄함수를 구할 수 있다.

$$f_{\mu} = \left[ \left( \frac{3}{Re_{\tau}^{3/4}} \frac{1}{\tanh((y^{*4}/Re_{\tau})^{1/2}/10)} \right) + 1 \right] \cdot \tanh[(y^{*}/25)^2] \quad (21)$$

### 2.3.2 소멸항 감쇄함수 $f_2$ 와 압력확산항감쇄함수 $f_{wk}$ 의 수정

SYC모형에서는 소산률방정식(5)의 소멸항 감쇄함수  $f_2$ 함수로 Nagano and Tagawa<sup>(11)</sup>의 다음의 모형함수를 사용하였다.

$$f_2 = \frac{[1 - 0.3 \exp[-(Re_{\tau}/6.5)^2]]}{\textcircled{1}} \cdot \frac{[1 - \exp(-y^{*+}/6)]^2}{\textcircled{2}} \quad (22)$$

식(22)의 ②항의 벽면분포는 지수함수의 성질에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_2 = \frac{y^{*+2}}{36} + \dots \quad (23)$$

함수  $f_2$ 는 벽면부근에서  $y^{*+2}$ 의 분포를 만족시키기 위해 다음의 식(24)와 같이 모형화할 수

$$f_2 = [1 - 0.3 \exp[-(Re_{\tau}/6.5)^2]] \cdot [1 - \exp(-y^{*}/C_{f2})]^2 \quad (24)$$

있으며, 벽면분포는 지수함수와 식(10)으로부터 다음의 식(25)와 같이 유도된다.

$$f_2 = \frac{\sqrt{2a_k} y^{*+2}}{C_{f2}^2} + \dots \quad (25)$$

식(23), (25)는 벽면부근에서 동일하여야 함으로부터  $C_{f2}$ 를 결정할 수 있다.

$$C_{f2} = 6 \cdot (2a_k)^{1/4} \quad (26)$$

윗 식(26)에  $Re_{\tau} = 395$ 일 때  $a_k = 0.22081/2$ 를 대입하여  $C_{f2} \approx 3.6$ 로 결정하였다.

$f_2$ 함수와 마찬가지로 압력확산항의 감쇄함수  $f_{wk}$ 도 수정되어야 하지만 이 항은 수치계산에서

많은 영향을 미치지 않았으므로 무시하였다.

### 2.3. $Re_{\tau}$ 로 표현된 감쇄함수 수정

난류레이놀즈수  $Re_{\tau}$ 는 난류스칼라 량으로 계산되어지므로 벽면으로부터 거리를 고려해야 하는 무차원량  $y^{*}$ 와  $y^{*+}$ 에 비하여 감쇄함수에 사용되기가 편리하지만 레이놀즈수의 따른 변화가 커서 넓은 레이놀즈수 범위의 유동장에 적용하기에는 적절하지 않다. 이에 본 연구자들은 이전의 연구에서 레이놀즈수의 변화를 고려하기 위하여 다음 감쇄함수식 식(27)를 사용하였다.

$$f_{Re} = 1 - 0.5 \cdot \exp(-Re_{\tau}/10^4) \quad (27)$$

그러나 위 식에서 레이놀즈수  $Re_{\tau}$ 는 형상이 복잡하거나  $Re$ 가 정의되기 어려운 유동장에서는 사용하기가 용이하지 않다. 따라서 본 연구에서는 비교적 레이놀즈수의 변화에 따른 변화가 적은  $y^{*}$ 를 이용하여 변형하였다. Table 1에 제시된 바와 같이  $Re_{\tau}$ 를 이용한 감쇄함수는  $f_2$ ,  $f_{\beta}$ 와  $f_{\sigma}$ 가 있으며,  $f_2$ 는 벽면 근방에서 영향을 미치는 감쇄함수로서  $Re_{\tau}$ 의 변화에 따른 영향이 적으므로  $y^{*}$ 만 수정한 식(24)를 사용하였다.

$f_{\sigma}$ ,  $f_{\beta}$ 는  $y^{*}$ 를 이용한 다음의 식(28), (29)로 수정하였으며 각 함수의 모형상수는 대수영역에서 함수의 값이 0이라는 조건을 이용하여 결정하였다.

$$f_{\beta} = \exp[-(y^{*}/8)^3] \quad (28)$$

$$f_{\sigma} = 1 + 3.5 \exp[-(y^{*}/8)] \quad (29)$$

### 2.4. 모형의 2, 3차원 확장

식(5)에서 사각형으로 표시된 항은 완전발달유동장의 형태이다. 따라서, 2, 3차원 유동해석을 위해서는 확장되어야 한다.

$dU/dy$ 는 완전발달유동장의 평균변형률로서 2, 3차원 유동장에서는 다음의 식(30)으로 정의된 평균변형률변수  $S$ 로 나타낼 수 있다.

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (30)$$

위 식에서  $S_{ij}$ 는 평균변형률텐서이며, 완전발달유동장에서  $S$ 는  $dU/dy$ 가 된다. 또한, 식(5)의 우변의 제일 끝항인 평균속도구배 생성항도 확장

되어야 한다.

식(5)에서 두 번째 사각형으로 제시된 항( $P_{\beta}$ )은 Rodi et al.<sup>(14)</sup>에 의해 제안된 1차원 유동에 대한 모형식이며 그의 최대, 최소치를 과도하게 예측하는 단점이 있어서 0.8이라는 가중치를 곱했다.<sup>(5)</sup>이 항은 Rodi et al.<sup>(14)</sup>에 의해 다음의 난류항들의 상관식 식(33)으로부터 1차원 유동에 대해 모형화한 것이며, 본 연구에서는 이를 다음과 같이 2, 3차원 유동으로 확장하였다.

$$\overline{u_k u_{i,j}} \propto T \cdot \left( \frac{-\overline{u_k u_{i,l}} U_{l,j} - \overline{u_k u_l} U_{i,j}}{-\overline{u_k u_{i,j}} U_{i,l}} \right) \quad (31)$$

식(31)에서  $\overline{u_k u_{i,j}}$ 의 크기는 레이놀즈응력  $\overline{u_k u_l}$  중에서 전단응력성분( $k \neq l$ )보다 주응력성분에 의한 영향이 크다고 가정하여  $k=l$ 인 경우에 대하여 위 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\overline{u_k u_{i,j}} \propto T \cdot \left( \frac{-\overline{u_k u_{i,k}} U_{k,j} - \overline{u_k u_k} U_{i,k}}{-\overline{u_k u_{k,j}} U_{i,k}} \right) \quad (32)$$

식(32)의 우변 첫 번째항은 난류변동성분  $u_i$ 의 대류  $\left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ 를 나타내는 항으로 벽부근에서 무시할 만큼 작다고 가정하여 제외한다.

$$\overline{u_k u_{i,j}} \propto T \cdot \left( -\overline{u_k u_k} U_{i,k} - \frac{1}{2} (\overline{u_k u_k})_{,j} U_{i,k} \right) \quad (33)$$

식(33)에서 시간항  $T$ 로  $k/\epsilon$ 와  $\overline{u_k u_k} \approx k$ 를 식(31)에 대입하면  $P_{\beta}$ 는 다음의 식(34)으로 모형화된다.

$$P_{\beta} = C_{31} \nu \nu_t (U_{i,jk})^2 + C_{32} \nu \frac{k}{\epsilon} k_{,j} U_{i,k} U_{i,jk} \quad (34)$$

모형상수는 식(5)와 동일하게  $C_{31} = 0.8$ ,  $C_{32} = 0.0048$ 을 사용한다.

### 2.5. 최종 모형

벽리가 있는 유동장 해석을 위하여 벽면무차원 거리  $y^+$ 로 표시된 감쇄함수를  $y^*$ 로 변형시키고 2, 3차원으로 확장시킨 모형을 정리하면 다음과 같이 제시할 수 있으며, 여기서 사용된 모형상수

와 감쇄함수는 Table 2, 3과 같다.

$$\frac{Dk}{Dt} = \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right]_{,j} + P_k - \epsilon \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \epsilon_{,j} \right]_{,j} + C_{d1}' P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{d2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ & + 0.8 \nu \nu_t (U_{i,jk})^2 + 0.048 \nu \frac{k}{\epsilon} k_{,j} U_{i,k} U_{i,jk} \\ & - 0.3 \tilde{\epsilon} S f_\beta \end{aligned} \quad (36)$$

$$\nu_t = 0.09 f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$C_{d1}' = C_{d1} (1 + 0.65 \beta f_\beta), \quad \beta = \frac{S}{(\epsilon/\nu)^{1/2}}$$

$$C_{d1} = 1.45, \quad C_{d2} = 1.9$$

Table 2 List of Damping functions.

	Expressions
$f_\mu$	$\left[ \frac{3}{Re_t^{3/4}} \frac{1}{\tanh[(y^{*4}/Re_t)^{1/2}/10]} + 1 \right] \cdot \tanh[(y^*/25)^2]$
$f_2$	$[1 - 0.3 \exp[-(Re_t/6.5)^2]] \cdot [1 - \exp(-y^*/3.6)]^2$
$f_\beta$	$\exp[-(y^*/8)^3]$
$f_\sigma$	$1 + 3.5 \exp[-(y^*/8)]$

### 3. 수치해석기법

경계층방정식은 포물선형 방정식이며, 본 연구에서는 Fletcher가 제시한 암시도식(implicit scheme)<sup>(15)</sup>을 이용하여 경계층방정식을 해석하였다. 격자는 유동방향으로는 균일격자를 사용하고, 유동에 수직인 방향으로는 비균일격자를 사용하였다.

후향계단 2차원 유동장을 해석하기 위해서는 2차원 운동량방정식을 유한체적법(FVM)을 이용하여 차분하고 SIMPLE 알고리즘을 이용하여 해석하였다.

벽경계조건으로는 점착조건을 사용하였으며 벽면에서의 소산률  $\epsilon_w$ 는 Chapman and Kuhn<sup>(16)</sup>에 의해 제안된 다음의 소산률경계 조건식 식(37)를

사용하였다.

$$\epsilon_w = \frac{4\nu k_1}{y_1^2} - \epsilon_1 \quad (37)$$

여기서, 첨자 '1'은 벽면에서 떨어진 첫 번째 격자점을 표시한다.

경계층유동해석에서 자유유동영역의 경계조건은 다음과 같다.

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = - \frac{dP}{dx} \quad (38)$$

$$U_\infty \frac{dk}{dx} = - \epsilon \quad (39)$$

$$U_\infty \frac{d\epsilon}{dx} = - C_\epsilon \frac{\epsilon^2}{k} \quad (40)$$

위에서  $dP/dx$ 는 실험에서 주어지는 값이다.

### 4 결과 및 고찰

#### 4.1 수정모형의 검증

Fig.1에서는 수정된 모형의 검증을 위하여  $Re_\tau = 150, 395$ 의 평행평판유동장의 DNS의 소산률결과<sup>(6)</sup>와 수치해석 결과가 비교되어 있다.

DNS의 결과를 이용하여 모형화한 NS, SC모형과 후향계단유동장에서 좋은 성능을 보이는 SA 모형은 DNS결과와 차이를 보이지만 본 모형은 이전의 모형(SYC 모형)과 유사하게 DNS결과를 잘 예측하고 있음을 알 수 있으며, 이로부터  $y^*$ 와 레이놀즈수의 변화를 보정해주는  $f_{Re}$ 를 제외한 모형의 수정이 성공적으로 수행되었음을 확인할 수 있다.

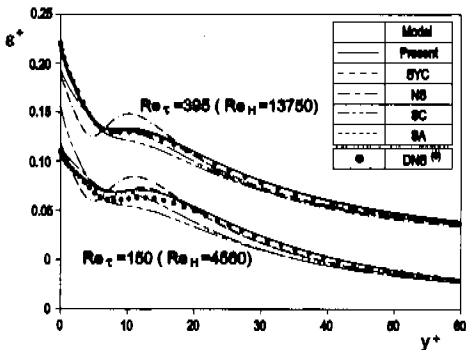
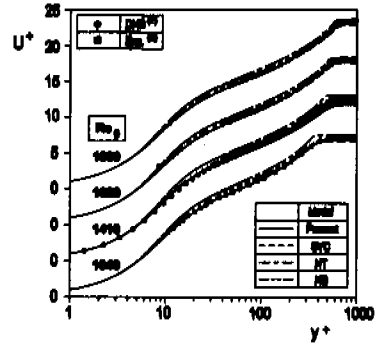


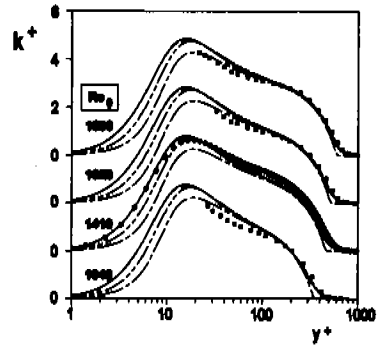
Fig.1 Comparison of dissipation rates in channel flow.

#### 4.2 평판경계층 유동해석

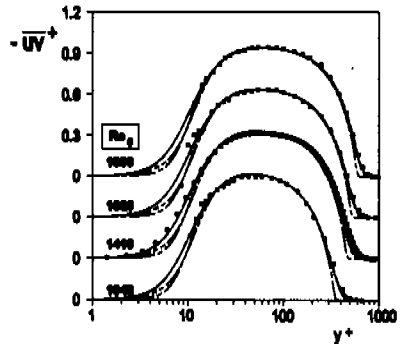
Spalart의 DNS결과<sup>(7)</sup>와 Nagano *et al.*<sup>(8)</sup>의 실험 결과가 있는 평판경계층유동장을 검증된 난류모형으로 해석하였다. Fig.2은 평균속도, 난류운동에너지  $k$ 와 난류전단응력  $uv$ 에 대하여 DNS결과,<sup>(7)</sup> 실험결과<sup>(8)</sup> 및 4가지 난류모형에 의한 결과들



(a) Mean velocity



(b) Turbulent kinetic energy



(c) Turbulent shear stress

Fig.2 Comparison of results in flat plate flow with zero pressure gradient.

비교, 도시한 것이다. 본 연구의 모형(Present)과 이전의 연구모형(SYC모형)이 벽근부근에서 속도,  $k$ ,  $\overline{uv}$ 를 제대로 예측하고 있다. 그러나,  $k$ 를 비교한 Fig.2(b)에서  $y^+ > 50$ 에서는 본 모형에 의한 예측결과는 실험결과와 잘 일치하지만  $Re_\theta = 1410$ 의 DNS결과와는 근소한 차이가 발생하며 이는 다른 모형의 예측결과도 동일한 양상을 보인다. 이런 차이에도 불구하고 본 모형이 다른 모형에 비하여 평판 경계층을 적절히 예측하고 있으며 특히  $Re_\theta = 1410$ 의 DNS결과와 벽면부근 유동장을 정확하게 계산한다.

Fig.3은 유동장에 따른 경계층 운동량두께( $\theta$ )를 이용한 레이놀즈수( $Re_\theta$ )의 증가를 나타낸 것으로  $\blacksquare$  으로 표시된 값은 평판유동장에서 Schlighing<sup>(17)</sup>의 운동량두께에 관한 다음의 근사식(41)로 계산된 것이다.

$$Re_\theta = 0.036 Re_x^{4/5} \quad (41)$$

NT, NS모형에 비하여 본 모형이 경계층 증가를 정확히 묘사하고 있으며, Present와 SYC모형간의 차이는 미소하였다.

### 4.3 Samuel and Joubert 유동

본 절에서는 역압력구배가 존재하는 평판유동장을 수치해석한 후 Samuel et al.<sup>(9)</sup>의 실험결과와

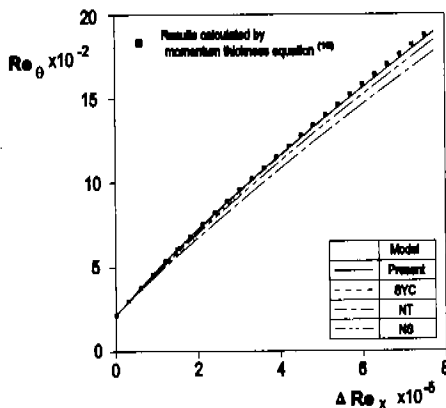


Fig.3 Prediction of boundary layer thickness in flat plate flow with zero pressure gradient.

비교하였다. Fig.4는 평균속도를 비교한 것으로 4개의 모형에 따른 예측결과는 많은 차이를 보이지 않지만 NS 모형에 의한 예측은 유동후방( $x > 2.56$ )에서 약간의 차이를 나타내고 있다.

반면에 난류전단응력  $\overline{uv}$ 를 비교한 Fig.5에서는 NS모형이 실험결과에 비교적 근접한 결과를 보이고 있으며 압력구배가 큰  $x > 2.38$ 에서 본 모형은 과도예측하고 있다.

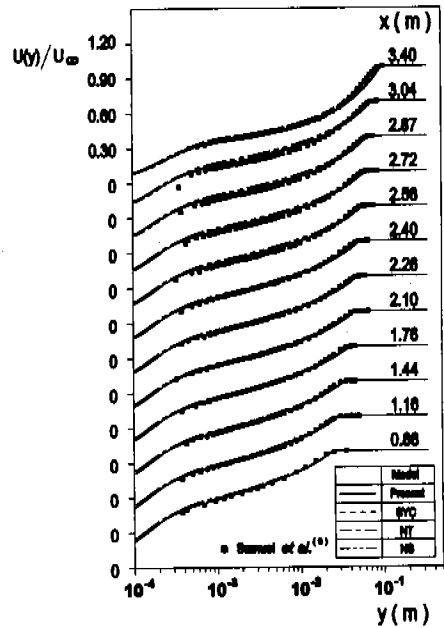


Fig.4 Comparison of mean velocities at each streamwise distance in flat plate flow with adverse pressure gradient.

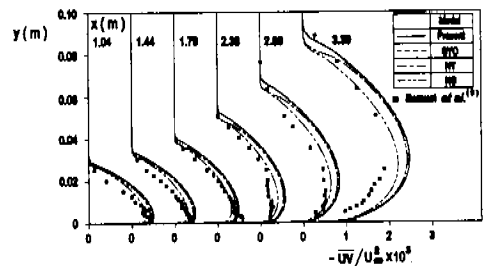


Fig.5 Comparison of turbulent shear stress at each streamwise distance in flat plate flow with adverse pressure gradient.



그러나  $\overline{uw}$  예측에서 좋은 결과물 보인 NS 모형은 벽면마찰계수  $C_f$ 를 비교한 Fig.6에서 위글(wiggle)을 나타내고 있다. 이는 모형이 복잡하여 수치적인 불안정성이 발생한 것으로 생각된다. 그외 다른 모형에 의한 결과는 비교적 실험결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

이상으로 본 모형이  $\overline{uw}$ 를 과도예측하는 경향이 있으나 속도, 마찰계수를 정량적으로 잘 예측할 수 있음을 알 수 있었다. 그러나, 역압력구배가 발생하는 유동장을 정확하게 예측하기에는 아직 부적절하며, 역압력구배의 영향을 고려할 수 있는 부가항이 필요할 것으로 생각된다.

4.4 후향계단이 있는 유동장해석

후향계단유동은 역압력구배와 박리가 발생하는 복잡한 유동형태로서 이에 대한 많은 실험들이 수행되었으며 이 유동에 대한 난류모형 검증용 위한 수치해석이 여러 연구자들에 의해 진행되어 왔다. 본 연구에서는 후향계단유동에 대한 실험 결과 중에서 정확성이 인정된 Driver et al.<sup>(10)</sup>의 후향계단유동에 대한 수치해석을 수행하였다. Fig.7은 계단후방유동장( $x/H > 0$ )에서 벽면마찰계수  $C_f$ 를 도시한 것이다. 본 모형에 의한 결과는 기존의  $k-\epsilon$ 모형의 예측경향과 유사하게 재부착거리( $C_f \approx 0$ )를 과소예측하고 있는 반면에 SA 모형은 실험결과와 유사한 결과물 나타내고 있다. 4.3절에서 설명한 대로 아직 본 모형은 역압

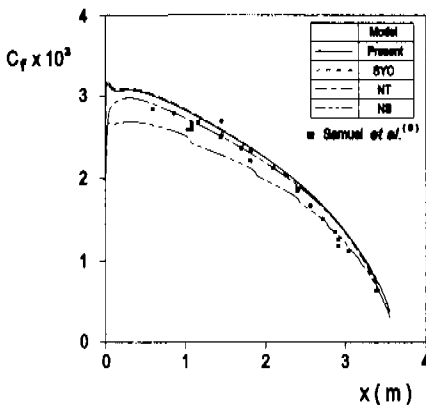


Fig.6 Distribution of wall friction factor in flat plate flow with adverse pressure gradient.

력구배가 발생하는 유동장에서 기존의  $k-\epsilon$ 모형의 문제점을 가지고 있으며 역압력구배를 고려할 수 있는 부가항의 도입이 필요하다고 생각된다.

Fig.8은 동일한 후향계단에서 평균속도(Fig.9 (a))와 난류전단응력(Fig.9 (b))를 도시한 것이다.

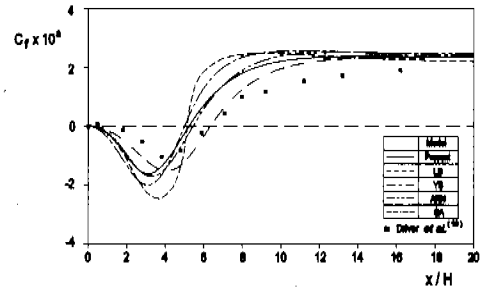
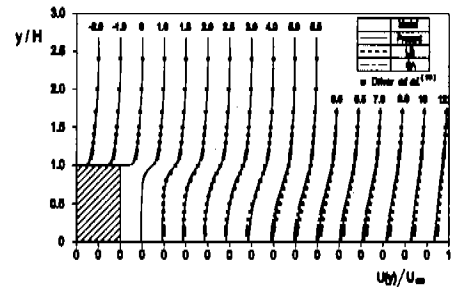
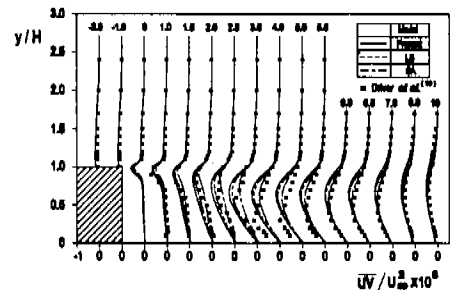


Fig.7 Distribution of wall friction factors in back-step flow.



(a) Mean velocity



(b) Turbulent shear stress

Fig.8 Comparison of mean velocity and turbulent shear stress in back-step flow.

세가지 모형들이 평균속도를 잘 예측하고 있으나 난류전단응력을 정확하게 묘사하지 못하고 있다. 이 중에서 SA모형이 실험치에 근사한 결과를 보이고 있지만  $C_f$ 를 비교한 Fig.7에 도시된 바와 같이 재부착점  $x/H \sim 6$  이의 영역에서 실험치와 차이를 보이는 문제점이 있다. 그리고 본 모형은 벽면에서 떨어진  $x/H > 2.5$ ,  $y/H \sim 1$  부근에서  $\overline{uv}$ 를 과대평가하고 있으며 재부착거리는 과소평가하고 있다. 완전발달유동장과 평판유동장에서 적합한 결과를 예측한 본 모형은 역압력구배나 박리가 발생하는 유동장을 정확하게 계산하지 못하며 이를 고려할 수 있는 추가항이 필요할 것으로 사료된다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 본 저자의 이전모형(SYC 모형)을 역압력구배와 박리가 있는 유동장 해석을 위하여 수정, 확장하였으며, 이를 이용하여 역압력구배, 역압력구배가 있는 평판유동장과 후향계단 유동장을 수치해석하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 박리가 있는 유동장해석을 위한 SYC모형의 수정된 모형은 완전발달유동장뿐만 아니라 압력구배가 없을 때나 있을 때의 평판유동장을 비교적 정확하게 예측하였다. 특히, 벽면부근의 유동장을 정확하게 예측하였다.

(2) NS모형은 역압력구배가 있는 평판유동장 해석에서 난류전단응력  $\overline{uv}$ 를 잘 예측하였지만 수치적인 불안정성을 보인 반면에 본 모형은 계산의 안정성을 보였다. 그러나 역압력구배가 심한 영역에서 예측성능이 저하되었다.

(3) SA모형은 후향계단유동장의 재부착거리를 실험결과와 유사하게 예측하였지만 가장 기본적인 완전발달유동장에서는 DNS결과와 차이를 보였다. 이에 비해 본 모형은 완전발달유동장과 평판유동장에서는 DNS결과와 좋은 일치율을 보이며, 후향계단유동장의 재부착거리는 기존의  $k-\epsilon$ 모형보다는 향상된 결과를 보였다. 그러나, 본 모형은 아직 실험결과보다는 작게 예측하였다. 따라서 역압력구배가 심하지 않을 경우 본 모형은 좋은 결과를 예측할 것이다.

### 감사의 글

본 논문의 내용에 관하여 귀중한 조언을 해주신 창원대학교 기계설계학과 유근종교수님께 진심으로 감사의 뜻을 표합니다.

### 참고문헌

- (1) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds Number Flows: A Review," *AIAA J.*, Vol.23, pp.1308~1319
- (2) Sarkar, A. and So, R. M. C., 1997, "A Critical Evaluation of Near-wall Two-equation Models against Direct Numerical Simulation Data," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol.18, pp.197~208
- (3) 송 경, 유근종, 조강래, 1998, "소산률방정식의 개선을 통한 저레이놀즈수  $k-\epsilon$ 모형의 개발," 대한기계학회논문집 (B), 제22권 제5호, pp.685~697
- (4) Nagano, Y. and Shimada, M., 1993, "Modeling the Dissipation-rate Equation for Wall Shear Flows(Comparison with Direct Simulation Data)," *日本機械學會集(B編)*, 59卷 559号, pp.78~85
- (5) 신종근, 최영돈, 1996, "저레이놀즈수  $k-\epsilon$  모형에서 DNS자료에 의한  $\epsilon$ 방정식의 다중생성률 모형개발," 대한기계학회논문집 (B), 제20권 제1호, pp.304~320
- (6) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1988, "Reynolds Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol.194, pp.15~44
- (7) Spalart, P. R., 1988, "Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to  $R_\theta = 1410$ ," *J. Fluid Mech.*, Vol. 187, pp.61~98
- (8) Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T., 1991, "Effects of Adverse Pressure Gradients on Mass Flows and Turbulence Statics in a Boundary Layers," *Turbulent Shear Flows 8*, pp. 7~21

- (9) Samuel, A. E. and Joubert, P. N., 1974, "A Boundary Layer Developing in an Increasingly Adverse Pressure Gradient," *J. Fluid Mech.*, Vol. 66, pp.481~505
- (10) Driver, D. M. and Seegmiller, H. L., 1985, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow," *ALAA J.*, Vol.23, pp.163~171
- (11) Nagano, Y. and Tagawa, M., 1990, "An Improved  $k-\epsilon$  Model for Boundary Layer Flows," *J. Fluids Eng.*, Vol.112, pp.33~39
- (12) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., 1994, "A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching Flows-I. Flow Field Calculations," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp.139~151
- (13) Tennekes, H. and Lumley, J. L., 1972, *A First Course in Turbulence*, MIT press
- (14) Rodi, W. and Mansour, N. N., 1993, "Low Reynolds Number  $k-\epsilon$  Modeling with the Aid of DNS," *J. Fluid Mech.*, Vol.250, pp.509~529
- (15) Fletcher, C. A. J., 1987, *Computational Techniques for Fluid Dynamics-2nd edition*, Springer
- (16) Chapmann, D. R. and Kuhn, G. D., 1986, "The Limiting Behaviour of Turbulence near a Wall," *J. Fluid Mech.*, Vol.170, pp.265~292
- (17) Schlichting, D. H., 1978, *Boundary-layer theory*, McGRAW-Hill