

이류 유동장의 초확산과 무작위성

김 인 찬*
(1999년 2월 25일 접수)

Superdiffusion and Randomness in Advection Flow Fields

In Chan Kim

Key Words: Superdiffusion(초확산), Subdiffusion(저확산), Random Velocity Field(무작위 속도장), Passive Scalar(피동적 스칼라), Tracer(추적자), Mean Square Displacement(평균자승변위), Velocity Autocorrelation Function(속도 자동상관함수), Randomness(무작위성)

Abstract

Superdiffusive transport motions of passive scalars are numerically considered for various advection velocity fields. Calculated exponents α in the superdiffusion-defining relation $\sigma^2(t) \sim t^\alpha$ for model flow fields agree to the theoretically predicted values. Simulation results show that the superdiffusion takes place as the tracers' motion become less random, compared to their motion at the pure molecular diffusion. Whether the flow field is random or not, degrees of superdiffusion are directly related to the velocity autocorrelation functions along the tracers' Lagrangian trajectories that characterize degrees of randomness of the tracers' motion.

기호설명

1. 서론

- D : 확산 계수
- N_x, N_y : x, y 방향의 격자 개수
- P : 확률
- $R(t)$: 속도 자동상관 함수
- t : 시간
- T : 추적자의 총 이동시간
- u : 추적자의 x 방향 속도
- V_x : 수평 유동층의 x 방향 속도
- x : 변위
- α, μ : 초확산 지수
- $\sigma^2(t)$: 추적자 변위의 통계적 분산값
- Δt : 시간 간격
- Δx : 격자 간격

해류나 하류 중의 부유 물질 또는 오염 물질의 전파 등의 예에서 찾아 볼 수 있듯이 대류 유동장 내에서 물질의 질량과 같은 피동적 스칼라(passive scalar)가 이류(advection)에 의해 전파되는 현상은 흔히 피동적 스칼라의 변위(displacement) 또는 평균자승변위(mean square displacement)로 기술된다. 피동적 스칼라를 관찰자의 Lagrange적 관점에서 추적자(tracer)라고 하기도 한다. 유체 내 추적자의 이류 현상은 일반적으로 유동에 의한 대류(convection)와 추적자 자신의 분자적 확산(molecular diffusion)에 의한 복합적인 운동의 결과이다. 특히 확산, 즉, 분자적 확산에 의한 추적자의 거동은 브라운 운동을 모델링한 멋대로 걷기(random walk)라 일컫는 추계적(stochastic) 모델로 기술할 수 있다. 간단한 1차원 멋대로 걷기 모델에서는 멋대로 걷는 자(random walker), 즉, 추적자가 $-x$ 또는 $+x$ 방향으로 단위시간 Δt

* 회원, 군산대학교 기계공학과

마다 한 걸음씩 일정 보폭 Δx 만큼 이동한다. 이 때 $-x$ 또는 $+x$ 방향으로 이동할 확률은 각각 1/2로 동일하다. 여기서 보폭을 작게 하여 극한 값을 취하면 ($\Delta x \rightarrow 0$) 추적자가 t 의 경과 시간 후에 위치 x 에 있을 확률 $P(x, t)$ 이

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \nabla^2 P \quad (1)$$

으로 되어 비정상 확산방정식과 동일한 형식을 취한다.⁽¹⁾ 여기서 D 는 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 / 2\Delta t$ 로서 추적자의 이동속도와 관계있으며, 몇대로 걸기를 거시적 확산현상의 미시적 모델로 취하면 거시적인 확산계수(diffusion coefficient)와 동일하게 된다. Einstein⁽²⁾은 1906년에 이미, 몇대로 걷기, 즉, 브라운 운동이 정지유체 내 부유물질의 확산 거동과 관계있고, 유동이 0일 때 부유물질의 변위의 통계적 분산값(statistical variance) σ^2 이

$$\sigma^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = 2Dt \quad (2)$$

으로 되어 경과시간 t 에 선형적으로 비례함을 밝힌 바 있다. 여기서 $x(t)$ 는 추적자의 1차원 변위를 나타내며 기호 $\langle \rangle$ 는 앙상블 평균을 의미한다.

유체 내에 0이 아닌 대류 유동장이 존재하면 추적자의 거동은 확산과 함께 유동의 영향을 받게 되고 분산값 σ^2 의 표현식은 식 (2)와 달라지게 된다. 일반적으로, 식 (2)에서와 같이 $\sigma^2 \sim t$ 로 추적자 변위의 분산값 σ^2 이 t 에 선형적으로 비례하는 현상을 정상확산(normal diffusion)이라 하는 것에 비해,

$$\sigma^2 \sim t^\alpha \quad (3)$$

의 관계에서 지수 α 의 값이 1과 다름 때 비정상 확산(anomalous diffusion)이라 일컫는다. 특히, α 의 값이 1보다 클 때는 초확산(superdiffusion)이라 하고 α 의 값이 1보다 작을 때는 저확산(subdiffusion)이라 일컫는다. 초확산이나 저확산은 정상확산에 비해 상대적으로 추적자의 전파 속도가 매우 크거나 또는 매우 적으므로 오염 물질의 전파에서와 같이 이류를 제어할 필요가 있을 때 중요한 역할을 하게 된다. 초확산을 쉽게 확인할 수 있는 것은 유명한 Levy의 비행⁽³⁾ 모델이다. 이 모델에서는 추적자의 보폭 Δx 가 일정한 대신 어

떤 확률 분포에 따른 값을 취한다. 보폭이 Δx 일 확률을 $P(\Delta x)$ 라 하고 비교적 큰 보폭에 대해 $P(\Delta x) \sim \Delta x^{-\mu}$ 으로 근사시킬 때 이 근사식의 지수 μ 의 값이 $\mu < 3$ 일 때 Levy 비행이라 하며, Levy 비행에서는 추적자의 거동이 초확산적인 것이 알려져 있다. 또 와류를 포함하는 유동에서는 많은 경우 정상확산 현상이 나타나지만⁽⁴⁾ 어떤 종류의 유동에서는 와류의 분포에 따라 특별한 경우 초확산 현상이⁽⁵⁾ 관찰되기도 하고 저확산 현상이⁽⁶⁻⁸⁾ 관찰되기도 한다. 특히, 유동장 내 부유 물질의 전파를 고려할 때, 초확산 현상은 저확산 현상에 비해 상대적으로 더욱 중요하다고 할 수 있다.

초확산 현상이 관찰되기는 하지만 초확산 현상을 유발시키는 유동장의 유동특성은 비교적 잘 알려져 있지 않다. 대류 유동장에서 와류와 혼합에 따른 추적자의 전파 현상과 초확산 현상을 유발하는 유동특성을 수치적으로 해석하기 위한 기본적인 접근 방법의 하나는 이를 모델 격자 구조 공간 상에 실현시켜 단위격자 간격과 같은 미시적인 크기 척도에서의 유동 특성의 변화가 거시적으로 어떻게 나타나는가를 규명하는 것이다. Matheron과 Marsily,⁽⁹⁾ 그리고 Redner⁽¹⁰⁾는 각각 2차원 격자 공간 내에서 초확산 현상을 관찰할 수 있는 무작위 속도장 모델들을 고안한 바 있다. 본 연구에서는 먼저 초확산 지수 α 에 대한 이론적 예측치가 존재하는 2차원 무작위 속도장을 Monte Carlo 시뮬레이션 방법으로 구현하여 초확산이 발생하는 것을 확인하고 초확산의 정도를 나타내는 초확산 지수 α 를 계산하여 이론값과 비교한다. 또 2차원 Couette 유동과 Poiseuille 유동, 그리고 몇 가지 3차원 무작위 속도장에서의 추적자의 초확산 거동을 수치적으로 조사한다. 초확산 현상을 유발하는 유동특성을 규명하기 위해, 각 유동장의 무작위성을 나타내는 추적자의 속도 자동상관함수(velocity autocorrelation function)를 계산하여 이를 초확산 지수와 관련하여 비교 검토한다.

2. 수치해석 모델

정상상태 대류 유동장에서 분자 확산 작용이

없이 대류에 의한 영향만을 받게 되어 추적자가 유선(streamline)을 따라 이동하게 되면

$$x(t) = \int u dt \sim t \quad (4)$$

이므로 추적자 변위의 분산값은

$$\sigma^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \sim t^2 \quad (5)$$

으로 되고 이렇게 유선으로 이루어진 궤도를 따라 이동할 때 $\sigma^2 \sim t^2$ 으로 되는 것을 궤도운동(ballistic motion)이라 한다. 일반적으로 무작위적이 아닌 정상 상태의 유동장에서 대류 작용이 확산 작용에 비해 지배적이면 추적자의 거동은 궤도운동에 가까워 진다. 그러나 유동장이 무작위적이고 유동장의 평균값이 0일 때 추적자의 거동은 대부분 $\sigma^2 \sim t$ 으로 되어 정상확산 현상을 나타낸다. 다만, 유동에 의한 대류 작용은 순수 분자 확산에 비해 확산계수를 크게 하는 역할을 할 뿐이다.⁽⁴⁾

어떤 종류의 무작위 유동에서는 추적자의 거동이 저확산이나 초확산 현상을 나타내게 된다. 특히 유동장에 와류가 강하게 형성되어 있는 경우에는 추적자가 와류에 의해 갇혀 있는 시간이 많아서므로

$$\sigma^2 \sim t^\alpha, \alpha < 1 \quad (6)$$

으로 되어 정상확산에 비해 상대적으로 저확산 현상을 나타내는 경우가 많다.⁽⁶⁻⁸⁾ 정상 유동장에

서 추적자가 초확산 현상을 나타내는 예는, 그 대부분이 소위 Levy 비행에 의한 것이다. Levy 비행에서는 추적자의 보폭의 크기가 일정하지 않고 특정한 확률분포에 따라 매 걸음마다 보폭이 달라지며, 물리적인 예로는, 제트와 와류가 혼재하는 유동에서 추적자의 거동이

$$\sigma^2(t) \sim t^\alpha, 1 < \alpha < 2 \quad (7)$$

으로 되어 초확산 현상을 나타내는 것 등을 들 수 있다.⁽⁹⁾ 그러나 Levy 비행 모델과 달리 추적자가 일정한 보폭을 취하면서도 초확산 현상을 관찰할 수 있는 유동장도 존재하며, 대표적인 예로는 간단한 2차원 유동장 모델로서 Matheron과 Marsily가 고안한 모델⁽⁹⁾과 Redner에 의한 모델⁽¹⁰⁾ 등을 들 수 있다. 특히 2차원 초확산 유동장 모델을 이용하면 초확산 현상을 유동장의 통계적 유동특성과 연관시켜 취급할 수 있으므로 이 두 가지 유동장 모델은 초확산 연구에서 중요한 benchmark 역할을 하고 있다. 본 연구에서는 먼저 두 가지 2차원 유동 모델에서 추적자의 초확산 현상을 수치적으로 조사한다.

Matheron과 Marsily⁽⁹⁾는 유체 침수율(fluid permeability)의 변동이 크고 따라서 소재 내 공극 위치에 따른 유속의 변동이 큰 다공성 소재(porous media) 내 유동에서의 이류 현상을 모델링하기 위해 2차원 격자 공간 상의 간단한 유동

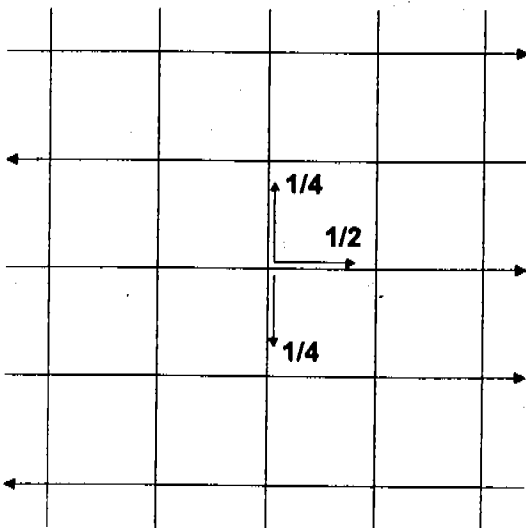


Fig. 1(a) A random velocity field. (Model 2A)

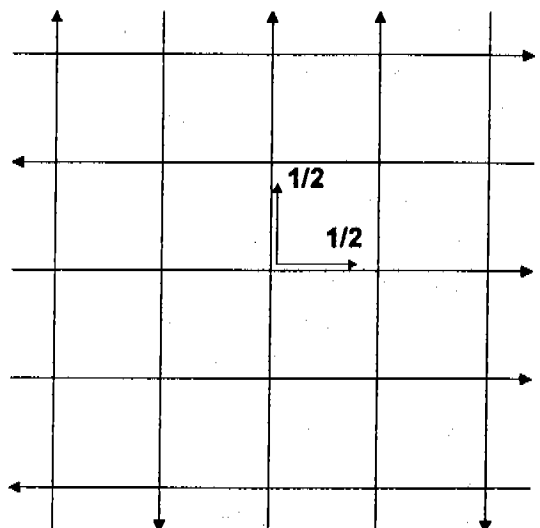


Fig. 1(b) A random velocity field. (Model 2B)

장 모델을 제안한 바 있으며 Fig. 1(a)는 그 개략도이다. 층상 다공성 소재(stratified porous media)라 할 수 있는 이 모델에서는 x 방향으로 압력 구배가 가해진다. 이 때 다공성 소재 구조의 비정형성은 각 유체층에서의 유동장을 무작위적으로 만들게 되고 추적자는 무작위 대류 유동장과 함께 확산의 영향을 받는다. 따라서 추적자의 x 방향 이동은 대류와 확산의 영향을 동시에 받는 이류에 의하며 y 방향 이동은 확산의 영향만 받게 된다. x 방향의 이류 이동에서는 대류가 확산에 비해 상대적으로 지배적이고 확산은 무시될 수 있다. 이같은 2차원 무작위 유동장 모델을 이하에서는 모델 2A라 칭하기로 한다. 유동장 모델 2A에서 추적자의 x 방향 변위는 y 방향 확산의 영향을 받아

$$\sigma^2 \sim t^{3/2} \quad (8)$$

으로 되어 초확산 현상을 나타낼 것으로 예측되어 왔다.^(9,11) 이같은 유동장 모델의 초확산 현상을 수치적으로 관찰하기 위해 본 연구에서는 Monte Carlo 방법을 이용하여 먼저 x 방향으로 N_x 개, y 방향으로 N_y 개의 격자를 가지는 2차원 격자 공간을 구성하였다. y 방향으로 배열된 N_y 개의 수평 유동층은 x 방향으로 $+V_x$ 또는 $-V_x$ 의 속도를 갖는다. y 방향으로는 대류 유동이 없다. 유동장 내 임의의 격자위치에서 이동을 시작한 추적자는 매 걸음마다 x 방향이나 y 방향으로 이동할 확률이 각각 1/2로 같다. x 방향으로 이동하게 되면 추적자가 위치한 유동층의 x 방향 속도에 따라 $+V_x$ 또는 $-V_x$ 만큼 이동한다. y 방향으로 이동하게 되면 +1 또는 -1 만큼 이동하게 된다. 이 때 y 방향으로 +1 또는 -1 만큼 이동할 확률은 각각 동일하다. 이렇게 이동을 계속하다가 격자 공간의 경계에 이르게 되면 같은 구조의 격자공간이 연이어 연결되어 있는 것으로 간주하는 주기적 경계조건이 적용된다. 충분히 많은 개수의 추적자에 대해, 충분히 긴 시간 T 동안 이런 이동을 반복하고, 이를 다시 충분히 많은 회수 구현시킨 서로 다른 무작위 대류 유동장에 대해 반복하여 계산한 후, 추적자

변위의 양상을 평균 분산치 σ^2 의 시간 변화를 구한다.

Fig. 1(b)에 개략도를 도시한 유동장 모델은 Redner⁽¹⁰⁾에 의한 것으로 모델 2A에서와는 달리 x 방향과 y 방향 모두 영이 아닌 대류 유동장이 존재한다. N_y 개의 수평 방향 유동층들은 각각 동일한 확률로 $+V_x$ 또는 $-V_x$ 의 속도를 가지며 그 분포는 무작위적이다. N_x 개의 수직방향 유동층 역시 동일한 확률로 $+V_y$ 또는 $-V_y$ 의 속도를 가지며 그 분포는 무작위적이다. 매 걸음마다 추적자는 동일한 확률로 x 방향 또는 y 방향으로 이동한다. x 방향으로 이동하게 되면 추적자가 위치한 수평 유동층의 x 방향 속도에 따라 $+V_x$ 또는 $-V_x$ 만큼 이동하고, y 방향으로 이동하게 되면 추적자가 위치한 수직 방향 유동층의 y 방향 속도에 따라 $+V_y$ 또는 $-V_y$ 만큼 이동하게 된다. 이 같은 유동장 모델을 이하에서는 모델 2B라 칭하기로 한다. 유동장 모델 2B에서 추적자의 거동은

$$\sigma^2 \sim t^{4/3} \quad (9)$$

으로 되는 것으로 예측되어 왔다.^(10,11)

무작위적이 아닌 정상적인 2차원 유동장에서 이류현상을 살펴보기 위해서 본 연구에서는 2차원 Couette 유동과 Poiseuille 유동을 고려한다. Couette 유동에서 대류 유동장은 수직 방향으로 무한히 펼쳐져 있는 것으로 가정한다. x 방향 유동장의 속도는 $V_x \sim y$ 으로 주어진다. 추적자는 유동장 내 임의의 위치에서 출발하며 매 걸음마다 x 방향 또는 y 방향으로 이동할 확률이 각각 1/2로 동일하다. y 방향으로 이동할 경우에는 $+y$ 방향 또는 $-y$ 방향으로 이동하며 그 확률은 각각 동일하다. x 방향으로 이동할 경우에는 매 걸음마다 V_x 만큼 이동하고 y 방향으로 이동할 때는 +1 또는 -1 만큼 이동한다. Poiseuille 유동에서는 대류 유동장이 N_y 개의 수평 유동층으로 이루어지며 x 방향 유동장의 속도는 $V_x \sim y^2$ 의 관계를 가진다. 추적자가 수직방향 경계에 이르게 되면 같은 구조의 유동장이 연이어 반복되는 것으로 가정한다. 이것은 2차원 덕트

내의 Poiseuille 유동에서 추적자가 유체-고체 경계면에 이를 때 경계면에서 반사되어 유동장으로 다시 유입되는 것을 모델링한 것으로 생각할 수 있다.

3차원 유동에서의 추적자의 거동을 살펴 보기 위해 유동장 모델 2A와 2B를 3차원으로 확장시킨 유동장 모델들을 고려하였다. 3차원 유동에서는 유동장이 작용하는 방향에 따라 세 가지 다른 유동장 모델을 고려하였다. 첫 번째 유동장 모델에서는 추적자가 이동할 때 대류 유동장이 x 방향으로만 작용하고 y, z 방향 이동에서는 확산에 의한 영향만 받는다. 이 같은 유동장 모델을 모델 3A로 칭하기로 한다. 두 번째 모델에서는 대류 유동장이 x 방향과 y 방향으로 작용하며 추적자가 z 방향으로 이동할 때는 확산에 의한 영향만 받는다. 이 같은 유동장 모델은 모델 3B로 칭하기로 한다. 마지막으로 세 번째 모델은 모델 3C로 칭하며 여기서는 대류 유동장이 x, y, z 방향으로 모두 작용하며 확산에 의한 영향은 무시된다. Fig. 1의 2차원 유동 모델과 비교할 때, 유동장 모델 3A와 3B는 모델 2A와 유사하며, 유동장 모델 3C는 모델 2B를 3차원으로 확장시킨 것과 같음을 알 수 있다. 특히 유동장 모델 3C에서 추적자의 거동은 $\sigma^2 \sim t^{1.49}$ 의 일반적인 지

수함수 대신

$$\sigma^2 \sim t \ln t \tag{10}$$

의 함수 형태를 취할 것으로 예측되어 왔다.⁽¹²⁾

3. 계산 결과

Fig. 1(a)의 2차원 유동장 모델 2A에서 대류 유동장과 확산의 복합효과를 수치적으로 살펴보기 위해, Monte Carlo 방법으로 무작위 유동장을 실현시켜 추적자의 거동을 계산하였다. 격자공간의 크기는 $N_x = N_y$ 로 하여 10에서 10^6 까지 변화시켰으며 유동 속도 V_x 의 값은 1에서 10^4 까지 다양하게 변화시켜 σ^2 의 변화를 살펴보았다. 추적자의 총 이동시간 T 는 10^2 에서 10^6 까지 변화시켰다. 또 각각의 경우에 대하여 10^2 회 서로 다른 유동장을 구현하고 각 유동장에서 10^3 개의 추적자의 거동에 대한 앙상블 평균을 계산하였다. 이렇게 얻어진 추적자의 평균 변위에 대해 $\sigma^2(t) \sim t^\alpha$ 의 지수식으로 회귀 근사한 결과, 격자공간의 크기가 $N_x = N_y = 10^4$ 이상일 때는 $\sigma^2 \sim t^\alpha$ 의 시간 지수 α 가 N_x 의 크기와 V_x 의 크기에 거의 영향을 받지 않으나, 추적자의 총 이동시간 T , 즉, 회귀 근사의 범위에 따라서 그 값이 달라지는 것으로 나타났다. 전형적인 $\sigma^2(t)$ 의 계산 결과를 Fig. 2에 도시하였다. Fig. 2는 $N_x = N_y = 10^6, V_x = 1$ 인 유동장을 10^2 회 구현하고 구현된 각 유동장에서 10^3 개의 추적자를 $T = 10^6$ 까지 진행시킨 결과에 대한 앙상블 평균치이다. 여기서 회귀 범위를 $t=0$ 에서 $t=T=10^6$ 까지 취하여 지수근사식 $\sigma^2 \sim t^\alpha$ 으로 회귀곡선을 구하면 $\alpha \approx 1.49$ 의 값이 얻어진다. 그러나 초확산 지수 α 의 계산값은 회귀 범위에 따라 달라지며 그 변화는 Fig. 3에 도시한다. Fig. 3에서 T 의 값이 커질수록 지수 α 의 값이 이론값 1.5에 가까워지고 따라서 $\sigma^2(t)$ 의 장시간 거동은

$$\sigma^2(t) \sim t^{1.5} \tag{11}$$

으로 되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 3은 각 계산값에서의 지수 α 와 함께 α 의 통계적 오차 범

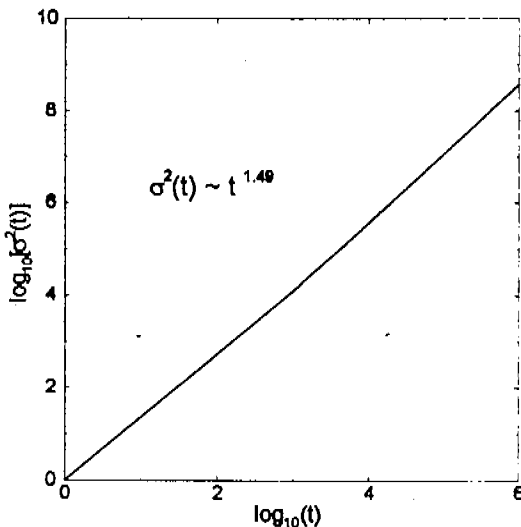


Fig. 2 Mean square displacement σ^2 of tracers for Model 2A as a function of time t .

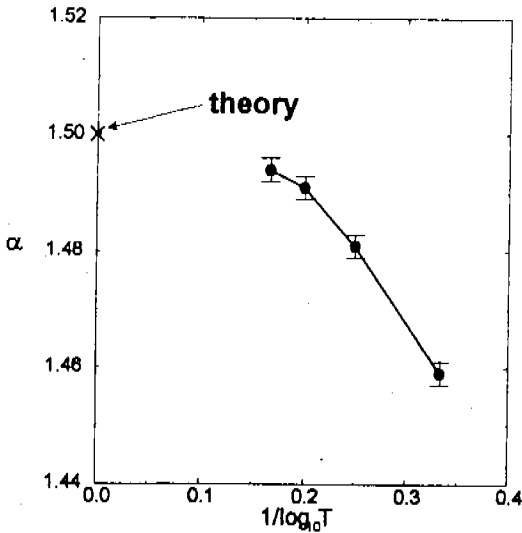


Fig. 3 Superdiffusion exponents α for the model 2A as functions of the regression range of time T .

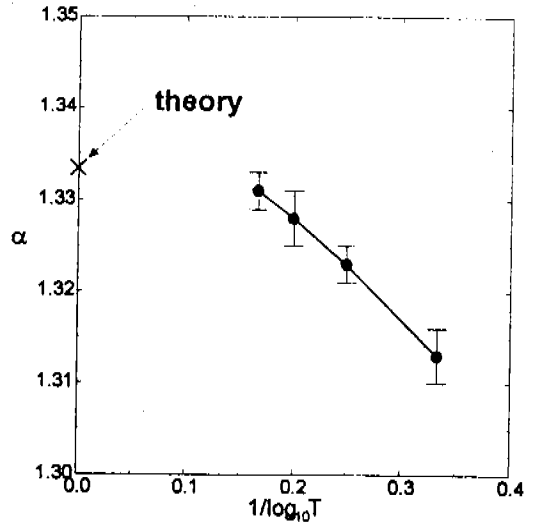


Fig. 4 Superdiffusion exponents α for the model 2B as functions of the regression range of time T .

위도 함께 나타내고 있다.

Fig. 1(b)의 유동장 모델 2B에 대해서도 여러 가지 경우의 $V_x = V_y$, $N_x = N_y$ 그리고 T 의 값에 대하여 Monte Carlo 계산을 수행하였다. 계산 결과, 모델 2A에서와 마찬가지로 V_x 와 N_x 의 크기는 회귀근사식 $\sigma^2 \sim t^\alpha$ 의 지수 α 에 대하여 거의 영향을 미치지 않고, 추적자의 총 이동시간 T , 즉 회귀근사 범위만이 α 의 값에 영향을 미치는 것으로 나타났다. $V_x = V_y = 1$, $N_x = N_y = 10^6$ 일 때 T 에 따른 지수 α 의 변화를 Fig. 4에 요약한다. Fig. 4에서 T 의 값이 커질수록 지수 α 의 값은 오차 범위 내에서 이론값 4/3 즉 1.333에 가까워지고, 따라서 $\sigma^2(t)$ 의 장시간 거동은

$$\sigma^2(t) \sim t^{4/3} \quad (12)$$

으로 되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 4는 각 계산값에서의 지수 α 와 함께 오차범위도 나타내고 있다.

유동장 모델 2A나 2B에서와 같은 2차원 무작위 유동을 무한 공간에 걸쳐 평균한 유동장의 평균값은 영이다. 그러나 추적자가 거쳐가는 유동

총들만 고려할 때 그 평균값은 변동하는 통계량이며, 이 평균값은 추적자의 이동시간이 커짐에 따라 그 변동폭이 작아진다. 초확산 현상은 이 평균값의 변동과 밀접한 관계가 있으며 이것은 추적자의 Lagrange적 궤적에 따라 구한 속도 자동상관함수를 고찰함으로써 이해할 수 있다. 시간 t 일 때 추적자의 x 방향 속도를 $u(t)$ 라 할 때 속도 자동상관함수 $R(t)$ 는

$$R(t) = \frac{\langle u(0)u(t) \rangle}{\langle u(0)u(0) \rangle} \quad (13)$$

으로 정의된다. 일반적으로, 평균 유동이 0인 비압축성 유동장에서는 $\sigma^2(t)$ 와 $R(t)$ 사이에

$$\frac{d^2 \sigma^2(t)}{dt^2} = 2 \langle u(0)^2 \rangle R(t) \quad (14)$$

의 관계가 성립한다.⁽⁴⁾ 대류 유동이 없는 순수 분자 확산의 경우에는

$$R(t) = \delta(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

으로 된다. 무작위 와류 유동장에서처럼, 순수 분자 확산에 비해 유효 확산계수와 값은 커지지만 여전히 $\sigma^2 \sim t$ 의 정상 확산의 경향을 나타내는 경우에는, t 가 커짐에 따라 $R(t)$ 의 절대값이 감

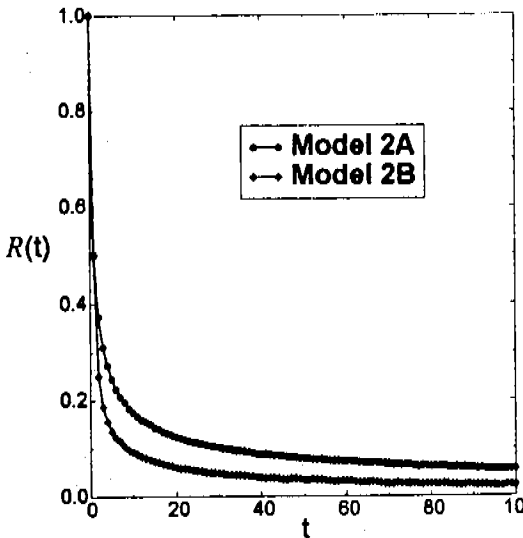


Fig. 5 Velocity autocorrelation functions $R(t)$ for two-dimensional random velocity field models as functions of time t .

소하며 그 부호는 0을 중심으로 진동하는 경향을 나타낸다는 것이 알려져 있다.⁽⁴⁾ 또 Couette 유동이나 Poiseuille 유동에서처럼 궤도운동을 하는 추적자의 경우에는 $R(t)$ 의 값이 $R(t) = 1$ 이 된다.

두 가지 유동장 모델 2A와 2B에서 추적자의 속도 자동상관함수 $R(t)$ 를 계산하여 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 5에서 보듯이 $R(t)$ 의 값은 모델 2A가 모델 2B에 비해 상대적으로 더 큰 것을 알 수 있고, 이는 모델 2A에서 초확산 지수가 $\alpha = 1.5$ 로 모델 2B의 $\alpha = 4/3$ 에 비해 상대적으로 더 큰 것과 일치한다. 이같이 초확산 지수가 모델 2A에서 모델 2B에 비해 더 큰 것은, 추적자의 거동이 모델 2B에서 상대적으로 더 무작위적이기 때문으로 생각할 수 있다. 이것은 추적자의 x 방향 속도성분이 모델 2A에서는 y 만의 함수 $u = u(y)$ 인 것에 비해 모델 2B에서는 x 와 y 의 함수 $u = u(x, y)$ 인 것으로도 쉽게 확인할 수 있다. 속도 성분을 결정하기 위한 무작위 변수가 x, y 의 두 개인 것은 그 만큼 속도가 더 무작위적이고 따라서 시간 증가에 따른 속도의 상관관계가 작아지는 것을 의미한다. y 방향으로의 확산이 전혀 없다면, 추적자의 x 방향 속도는 시간

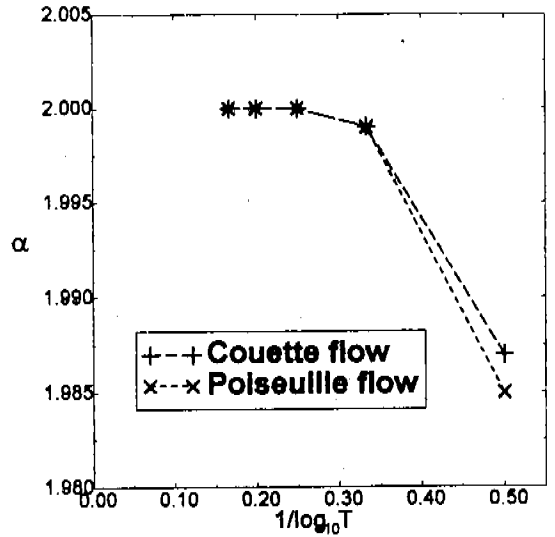


Fig. 6 Superdiffusion exponents α for the Couette flow and the Poiseuille flow as functions of the regression range of time T .

에 따라 변화하지 않고 일정하여 무작위성이 전혀 없어지며, 이 때 추적자의 거동은 궤도운동을 따르며 $\sigma^2 \sim t^2$ 으로 된다. 이와는 정반대로 추적자가 x 방향으로 대류 작용이 전혀 없이 순수 확산에 의해서만 이동할 때, 즉, 무작위성이 가장 커져서 시간 증가에 따른 속도의 상관 관계가 0이 될 때는 식 (2)에서 보듯이 $\sigma^2 \sim t$ 의 관계가 성립한다. 따라서, 유동장의 무작위성과 그에 따라 속도 자동상관함수로 나타나는 시간 상관관계가 추적자의 초확산 성질을 결정한다고 생각할 수 있다.

2차원 Couette 유동과 Poiseuille 유동의 해석에서는, $N_y = 10^6$, $T = 10^6$ 으로 하여 계산하였다. Poiseuille 유동에서는 최대속도를 10^2 으로 설정하고 계산하였다. 계산 결과를 지수식 $\sigma^2 \sim t^\alpha$ 으로 회귀 근사시켰을 때 얻어진 시간지수 α 의 값을 Fig. 6에 요약한다. 속도 자동상관함수는 t 의 전 구간 $[0, T]$ 에 걸쳐 정확하게 $R(t) = 1$ 인 것이 확인되었다. Fig. 6에서 보듯이 $\alpha = 2.0$ 이 되어 추적자의 이류 거동은 궤도운동을 따르는 것

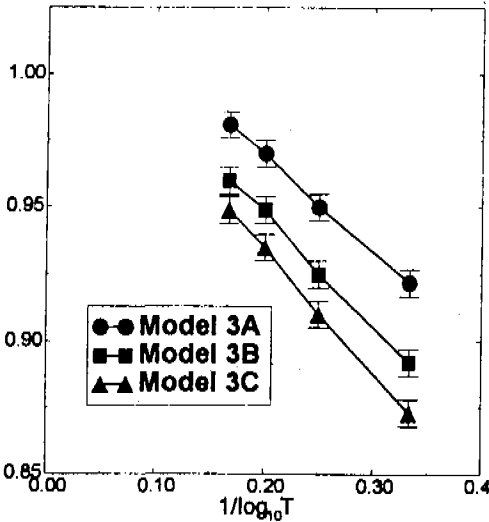


Fig. 7 Superdiffusion exponents α for three-dimensional flow field models as functions of the regression range of time T .

을 알 수 있고 이것은 $R(t)=1$ 인 것으로도 확인된다. 즉, Couette 유동이나 Poiseuille 유동에서 추적자의 x 방향 유동에는 무작위성이 없고, 따라서 y 방향으로의 분자확산이 x 방향으로의 이동 거동에 영향을 미치지 않는 것이다.

세 가지 3차원 모델 유동장에서 추적자의 이동 거동에 대한 계산결과는, 모델 3C에서 $\sigma^2 \sim t \ln t$ 로 되는 것을 감안하여, $\sigma^2 \sim t^\alpha \ln t$ 의 형태로 회귀 근사시켰다. 이렇게 하여 얻은 지수 α 의 회귀 범위에 따른 변화를 Fig. 7에 요약하고 속도 자동상관함수 $R(t)$ 의 변화를 Fig. 8에 도시한다. 유동장 모델 3C의 경우 Fig. 7에서 보듯이 추적자의 이동시간 T 가 커질수록 α 의 값이 1에 가까워져서 이론적인 예측치와 일치하는 것을 알 수 있다. 모델 3A와 모델 3B에서도 모델 3C와 비슷한 경향을 나타내지만 지수 α 의 값은 약간 차이가 나서 모델 3A의 경우 $\alpha=1.01 \pm 0.01$, 모델 3B의 경우 $\alpha=1.03 \pm 0.01$ 의 범위에 있게 된다. 이처럼 차이가 작기는 하지만 $\alpha(3A) > \alpha(3B) > \alpha(3C) = 1.00$ 의 관계를 갖는 것은 x 방향 속도 성분 u 가 모델 3C에서는 $u = u(x, y, z)$ 로서 모델 3A

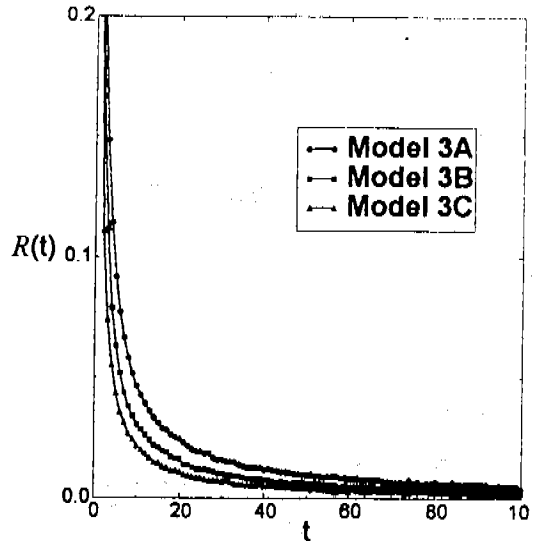


Fig. 8 Velocity autocorrelation functions $R(t)$ for three-dimensional random velocity field models as functions of time t .

의 $u = u(y, z)$ 에 비해 상대적으로 무작위성이 더 크기 때문이다. 모델 3B에서의 무작위성은 모델 3A보다는 크고 모델 3C보다는 작으므로 그 결과가 시간지수 α 에 반영된 것이다.

4. 결론

대류 유동장에서 대류와 함께 확산의 영향을 받는 추적자의 초확산 현상을 이해하기 위해 2차원 격자 공간에 구성된 무작위 유동장 모델을 고려하였다. 추적자의 장시간 거동에 대한 이론적 예측치가 존재하는 두 가지 유동 모델에서 Monte Carlo 방법에 의한 수치해석으로 추적자의 변위를 기록한 결과는 이론적 예측치와 일치하였다. 속도 자동상관함수를 비교한 결과 무작위성이 상대적으로 더 작고 그에 따라 시간에 따른 속도의 상관 관계가 더 큰 유동장에서 추적자 변위의 초확산 정도가 더 커지는 것을 확인할 수 있었다. 이것은 대류 유동장이 부재할 때 추적자가 순수 확산에 의해 이동하는 경우와 비교하여 무작위성이 작아질수록 시간 경과에 따른 속도 자동상관함수 $R(t)$ 의 값이 커지고 따라서 $R(t)$ 의 2중 적분인 $\sigma^2(t)$ 가 커지기 때문이다. 무작위성이 더

욱 작아져서 추적자가 대류 유동장의 유선을 따라 이동하는 경우에는 $\sigma^2(t) \sim t^2$ 의 궤도운동을 따르게 된다. 무작위성이 작아질수록 초확산 정도가 커지는 것은 3차원 유동장의 추적자 거동에서도 확인되며 2차원 유동에 비해 3차원 유동장에서 초확산 정도가 작은 이유를 설명해 준다. 결론적으로, 대류 유동장 내에서 추적자의 초확산 현상을 지배하는 중요한 요인은 추적자의 거동에서 취할 수 있는 무작위성이라 할 수 있으며 이 무작위성은 추적자의 Lagrange 궤적에 따라 구한 속도 자동상관함수로 특성지을 수 있다.

후 기

이 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 대학부설연구소 연구비 지원에 의하여 연구되었읍니다.

참고문헌

- (1) Chandrasekhar, S., 1943, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy," *Review of Modern Physics*, Vol. 15, pp. 1~89.
- (2) Einstein, A., 1906, "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen," *Annalen der Physik*, Vol. 19, pp. 289~306.
- (3) Shlesinger, M. F. & Klafter, J., 1985, "Comment on "Accelerated Diffusion in Josephson Junctions and Related Chaotic Systems,"" *Physical Review Letters*, Vol. 54, pp. 2551~2551.
- (4) Avellaneda, M., Kim, I. C. & Torquato, S., 1991, "Diffusion and Geometric Effects for Passive Advection by Random Arrays of Vortices," *Physics of Fluids A*, Vol. 43, pp. 3198~3201.
- (5) Solomon, T. H., Weeks, E. R. & Sweeney, H. L., 1993, "Observation of Anomalous Diffusion and Levy Flights in a Two-Dimensional Rotating Flow," *Physical Review Letters*, Vol. 71, pp. 3975~3978.
- (6) Young, W., Pumir, A. & Pomeau, Y., 1989, "Anomalous Diffusion in Convection Rolls," *Physics of Fluids A*, Vol. 1, pp. 462~469.
- (7) Cardoso, O., & Tabeling, P., 1988, "Anomalous Diffusion in a Linear Array of Vortices," *Europhysics Letters*, Vol. 7, pp. 225~230.
- (8) Cardoso, O., Gluckmann, B., Parcollet, O. & Tabeling, P., 1996, "Dispersion in a Quasi Two Dimensional Turbulent Flow : An Experimental Study," *Physics of Fluids*, Vol. 8, pp. 209~214.
- (9) Matheron, G. & de Marsily, G., 1980, "Is Transport in Porous Media Always Diffusive ? A Counterexample," *Water Resources Researches*, Vol. 16, pp. 901~917.
- (10) Redner, S., 1989, "Superdiffusive Transport Due to Random Velocity Fields," *Physica D*, Vol. 38, pp. 287~290.
- (11) Bouchaud, J. P., Georges, A., Koplik, J., Provata, A. & Redner, S., 1990, "Superdiffusion in Random Velocity Fields," *Physical Review Letters*, Vol. 64, pp. 2503~2506.
- (12) Bouchaud, J. P., & Georges, A., 1990, "Anomalous Diffusion in Disordered Media : Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications," *Physics Letters*, Vol. 195, pp. 127~293.