

# 와류입자법에 의한 비정상 박리흐름의 전산 (II) - 안전성과 와류입자 재배열 -

박 외 철\*  
(1998년 9월 1일 접수)

## Computation of Unsteady Separated Flows Using the Vortex Particle Method (II) - Stability and Particle Redistribution -

Woe-Chul Park

**Key Words :** Vortex Particle Method (와류입자법), Gaussian Vortex(가우스와류), Circulation(순환), Linear Momentum(선형운동량), Angular Momentum(각운동량)

### Abstract

As part of study on separated flow using the vortex particle method, stability of the method and particle redistribution were scrutinized. Stability was investigated by choosing different combination of numerical parameters. The Gaussian vortex was considered to make the problem simple by eliminating the complexity due to presence of walls. It was shown that the numerical method was stable when  $v\Delta t/h^2 \leq 0.5$ . In all the stable cases the circulation and the linear momentum were conserved. Without the particle redistribution, the angular momentum was severely attenuated.

$\xi$  : 무차원 거리(식 13)

### 기호설명

- A : 각운동량
- $A_0$  : 초기 각운동량
- $A^*$  : 무차원 각운동량( $A/A_0$ )
- h : 입자재배열 격자간격
- I : 선형운동량 벡터( $I_x, I_y$ )
- $N_v$  : 와류입자의 수
- r : 거리
- U : 속도벡터( $U, V$ )
- t : 시간
- $\Delta t$  : 계산시간 간격
- x : 위치벡터
- $\Gamma$  : 순환(circulation)
- $\Omega$  : 가우스와류의 순환(식 1)
- v : 동점성계수
- $\sigma$  : 와류입자의 지름
- $\omega$  : 와도(vorticity)

### 1. 서론

비정상 유동해석에 사용되는 와류법은 속도장을 이산와류 또는 와류입자로 표현하여 이들의 이동으로 흐름을 모사한다. 와류법은 여러가지로 분류할 수 있으나 유체점성의 반영여부에 따라 점성 와류법과 비점성 와류법으로 나눌 수 있다. 비점성 와류법으로는 평판에 적용한 Sarpkaya,<sup>(1)</sup> 원형실린더에 적용한 Lewis,<sup>(2)</sup> 일종의 와류입자법으로 정방형 실린더 후류의 제어에 적용한 Park 과 Higuchi<sup>(3)</sup> 등을 들 수 있고, 점성 와류법에는 확산속도법<sup>(4)</sup>과 점성 와류입자법<sup>(5)</sup> 등이 있다. 점성 와류입자법에서는 와도의 연속성을 보존하기 위해 와류입자를 재배열하고 유체의 점성을 반영하기 위해 입자강도 교환(particle strength exchange)과 비활(no slip) 경계 조건이 사용되며, 많은 와류입자를 사용하므로 각 입자의 속도를 계산하는데 고속 멀티폴법(fast multipole method)을 사용하기도 한다.

\* 회원, 부경대학교 공과대학 산업시스템안전공학부

본 연구는 점성과와류입자법에 의한 박리흐름 연구의 일부로서, 1부<sup>(6)</sup>에서는 물체의 표면에서의 와류입자의 생성에 관련된 경계요소법을 다루었고, 본 논문에서는 와류입자법의 안정성을 조사하고 와류입자 재배열의 필요성을 확인하는 것이 연구의 목적이다.

유동장에 물체가 존재하면 비활 경계조건을 처리해야 할 뿐만 아니라 물체 주위의 전단층을 와류입자로 표현함으로써 시간경과에 따라 입자수가 급격히 증가하여 계산시간의 증가와 고속 멀티플렉스의 도입이 불가피하게 된다. 본 연구에서는 벽면에서의 경계조건 처리와 고속 멀티플렉스의 도입에 따른 복잡성을 없애기 위해 유동장에 물체가 없고 하나의 가우스와류(Gaussian vortex)만 존재하는 경우를 고려하였다. 가우스와류를 와류입자의 집합으로 표현하여 시간에 따라 이동하는 각 입자의 새 위치를 계산하였다. 가우스와류의 순환과 선형운동량, 각운동량의 보존여부를 관찰함으로써 안정성을 조사하고 입자 재배열의 유무에 따른 계산결과를 비교하였다.

2. 수치법

순환의 크기가 Ω인 가우스와류의 와도(vorticity) ω는 가우스 분포를 이루고

$$\omega = (\Omega/4\pi v) \exp(-r^2/4\pi v t) \tag{1}$$

로 쓸 수 있다. 가우스와류의 중심을 기준으로 x, y 방향 모두 h 간격의 격자로 나눈 후 각 셀(cell)에 위치한 와류입자의 집합으로 표현하면 Fig. 1과 같다. 가우스와류의 지름은 무한대이지만 와도가 일정한 값 이하인 입자를 무시하면 이와 같이 일정한 지름의 가우스와류가 된다. 이 때 임의의 셀 p에 위치한 와류입자의 순환은

$$\Gamma_p = \int \omega_p dx dy = \omega_p h^2 \tag{2}$$

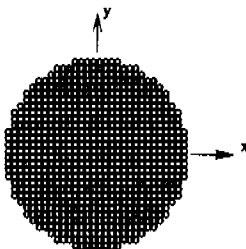


Fig. 1 Initial distribution of vortex particles for Gauss Vortex.

가 된다. 여기서 ω<sub>p</sub>는 셀 p의 와도로서, 가우스와류의 중심에서 셀 p의 중심까지의 거리를 식 (1)의 r에 대입한 값이다.

가우스와류는 일정한 각속도로 회전하므로 이들 와류입자도 이동하는데 임의의 한 와류입자와의 속도벡터는 나머지 와류입자들이 유발하는 속도벡터의 합,

$$U = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{Nv} \frac{1 - \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|^2 / 2\pi^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \times \mathbf{e}_z \omega_m \tag{3}$$

가 된다. 여기서 x는 그 입자의 위치벡터, x<sub>m</sub>은 나머지 와류입자의 위치벡터이다.

시간이 경과하면 이들 입자들은 식 (3)의 유속으로 각각 새 위치로 이동하는데, 이 때 입자들의 순환의 합은 항상 가우스와류의 순환 Ω와 같아야 하고, 입자들의 초기의 선형 및 각운동량의 합이 보존되어야 한다.

각 입자의 새 위치벡터는 U=dx/dt에 식 (3)의 U를 대입하고 시간에 대한 적분으로 x를 구하면 된다. 즉, 각 와류입자의 새 위치 x<sup>n+1</sup>는 Adams-Bashforth법을 사용하여 현재의 위치 x<sup>n</sup>과 이전의 위치 x<sup>n-1</sup>로부터

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + (1.5U^n - 0.5U^{n-1})\Delta t \tag{4}$$

로 구한다. 그러나 초기(n=1)에서는 U<sup>n-1</sup>이 존재하지 않고 또 뒤에 설명하는 입자 재배열 후의 첫 적분도 같은 이유로 식 (4)를 사용할 수 없다. 이 경우에는 2차 Runge-Kutta법

$$\mathbf{x}^{n+1/2} = \mathbf{x}^n + U^n \Delta t \tag{5a}$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{n+1/2} + (0.5U^{n+1/2} - 0.5U^n)\Delta t \tag{5b}$$

으로 구한다. 식 (4)와 (5)는 각각 정확도가 O(Δt<sup>2</sup>)이다.

비점성과류법과는 달리 유체의 점성을 반영하기 위해 입자강도교환법(particle strength exchange scheme)<sup>(7)</sup>이 사용되는데 위의 두 식에서 U대신 dΓ/dt, x대신 Γ를 대입하면 된다. 즉,

$$\Gamma^{n+1} = \Gamma^n + (1.5(d\Gamma/dt)^n - 0.5(d\Gamma/dt)^{n-1}) \Delta t \tag{6}$$

으로 구한다. n=1인 경우와 입자 재배열 후 첫 적분에는

$$\Gamma^{n+1/2} = \Gamma^n + (d\Gamma/dt)^n \Delta t \tag{7a}$$

$$\Gamma^{n+1} = \Gamma^{n+1/2} + (0.5(d\Gamma/dt)^{n+1/2} - 0.5(d\Gamma/dt)^n) \Delta t \tag{7b}$$

로 구한다.

와류입자들의 순환과 선형운동량 및 각운동량은 수치법의 안정성 조사와 입자 재배열의 필요성 확인에 하나의 척도로 사용할 수 있다. 순환의 합은 식 (1)의  $\Omega$ 와 같아야 하므로,

$$\Omega = \sum \Gamma_m \quad (m=1, N_v) \quad (8)$$

이 만족되어야 한다. 선형운동량과 각운동량은 각각  $I = \int \mathbf{x} \times \omega \, dx$  와  $A = 0.5 \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \omega) \, dx$  로 정의되는데, 2차원의 경우에는

$$I_x = \sum \Gamma_m x_m \quad (9)$$

$$I_y = -\sum \Gamma_m y_m \quad (10)$$

$$A = -0.5 \sum \Gamma_m (x_m^2 + y_m^2) \quad (11)$$

이고  $m=1, N_v$  이다.

가우스와류의 각운동량 A의 완전해는 식 (1)을 (11)에 대입하여 적분하면

$$A = -2\nu\Omega t + A_0 \quad (12)$$

가 된다.  $\nu$ 와  $\Omega$ 가 일정하므로 각운동량은 시간에 대하여 선형적으로 변화한다.

계산시간이 증가함에 따라 와류입자가 이동하면서 수치오차에 의해 입자간 간격이 균일하게 유지되지 못하고 간격이 넓은 곳과 좁은 곳이 생기고, 따라서 입자로 표현한 가우스와류의 와도는 가우스분포를 잃게 된다. 이것은 유동장의 연속성이 훼손됨을 의미한다. 이를 방지하기 위해 입자 재배열을 사용한다. 입자 재배열에는  $\Lambda_2$  법<sup>(9)</sup>을 사용한다. 그 원리는, Fig. 2에 나타나 있는 바와 같이, p점에 위치한 입자에 인접한 3개의 셀(cell) i, i-1, i+1에 새 입자가 위치한다고 가정하고, 입자 p의 순환  $\Gamma_p$ 를 소멸하는 대신에 세 입자의 순환을 결정하는 것이다. 이 때 새로운 입자들의 순환은 입자 p의 순환과 선형운동량 및 각운동량이 보존되도록 결정되어야 한다. 즉, 세 입자의 순환의 합은  $\Gamma_p$ 와 같아야 하며, 입자 p의 i점에 대한 선형운

동량과 각운동량은 각각 세 입자의 i점에 대한 선형운동량의 합 및 각운동량의 합과 같아야 한다. 이 조건에 따라 새 입자의 순환은 i에서 p까지의 무차원 거리  $\xi (=x_p/h)$ 를 사용하여

$$\begin{aligned} \Gamma_{i-1} &= -0.5(1-\xi)\Gamma_p \\ \Gamma_i &= (1-\xi)(1+\xi)\Gamma_p \\ \Gamma_{i+1} &= 0.5\xi(1+\xi)\Gamma_p \end{aligned} \quad (13)$$

가 된다. i점 근처에 p와의 다른 입자가 있는 경우에 이 입자의 순환도 식 (13)에 따라 세 입자의 순환에 합산한다. 2차원의 경우에는 같은 방법으로 p점의 인접 9개 입자의 순환이 결정된다.

가우스와류는 식 (1)과 같이 와도가 가우스분포로 되어 있어 그 지름이 무한대이지만, 계산에서는 와류입자의 개수가 한정되어 있으므로 와도가 일정한 값 이하인 입자는 제외해야 한다. 이를 위해, 안정성 조사에서는 식 (1)에  $2(\nu t)^{0.5} = 0.3m$ 를 대입하고 가우스와류의 초기반지름, 즉, 가우스와류의 중심에서 가장 멀리 떨어져 있는 입자의 중심까지의 거리를  $2(\nu t)^{0.5}$ 의 5배인 1.5m로 하였다. 이것은 입자의 와도가 최대와도( $r=0$ 에서의  $\omega$ )의 0.00037%이상인 입자만 포함한 것으로, 앞의 Fig. 1의 입자분포(입자수 716개)가 이에 해당한다. 입자 재배열이 없으면 입자수는 그대로 유지된다. 한편 와류입자 재배열의 필요성에 관한 조사에서는 더 정확하게 계산하기 위해  $2(\nu t)^{0.5}$ 를 0.5m, 가우스와류의 초기반지름을 2.5m로 하여  $t=0$ 에서의 입자수를 1976개로 하였다. 초기의 입자간 거리 h는 모두 0.1m로 하였다.

### 3. 결과 및 토의

가우스와류의 순환  $\Omega$ 는  $-5.0m^2/s$ (-부호는 시계 방향 회전을 표시)로 하고, 입자간 거리 h는 0.1m 이고, 입자 재배열 격자간격도 같은 값으로 하였다. 펜티엄 프로 200Mhz의 개인용 컴퓨터로 계산하였고, 계산시간은 계산간격 20회마다 입자를 재배열한 경우(Fig. 5와 6 참조)에 36분이 소요되었다. 시간이 경과하고 식 (8)에 따라 모든 입자의 순환의 합이  $-5.0m^2/s$ 을 유지해야 하고, 가우스와류의 중심을 좌표축의 원점으로 잡았으므로 식 (9)와 (10)의 선형운동량  $I_x$ 와  $I_y$ 의 값은 각각 0을 유지해야 한다. 이 세가지 조건은 수치법의 안정성이 유지되는 한 모든 계산에서 만족하였다.

이에 따라 계산결과 중에서 각운동량과 와류입자의 분포를 비교기준으로 하였다. 안전성

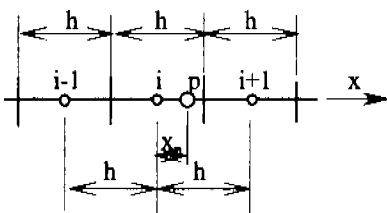


Fig. 2 Notation for vortex particle redistribution.

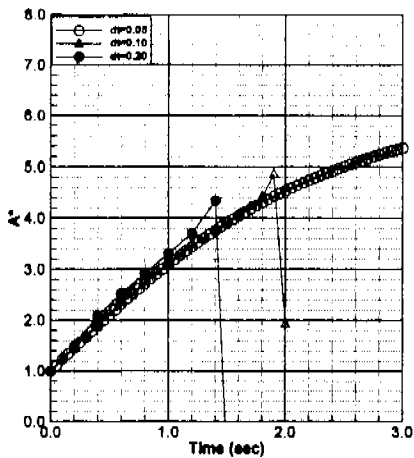


Fig. 3 Variation of angular momentum for different time step sizes.

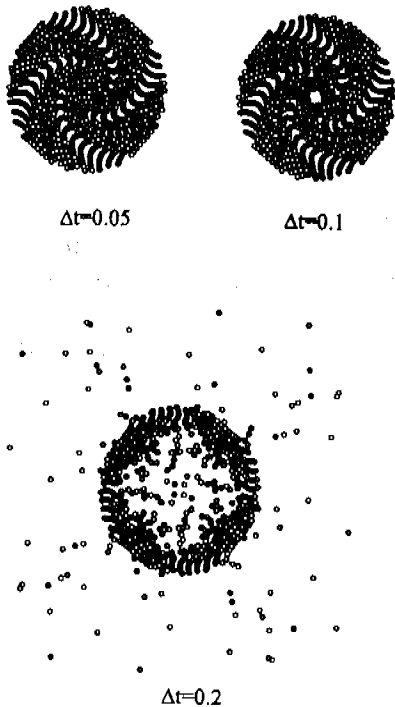


Fig. 4 Comparison of particle distribution at t=2.0sec for different time step sizes.

분석에서는 입자 재배열은 포함하지 않았고, 매개 변수인  $\Delta t$ ,  $v$  및  $h$ 의 여러가지 조합에 대한 각운동량과 와류입자의 분포를 비교하여 안정성의 조건을 결정하였다. 입자 재배열의 조사에서는 안정성

이 유지되는 범위내에서 입자 재배열의 빈도에 대한 각운동량을 비교하였다.

3.1 안정성 분석

본 수치법에서 매개변수는 시간간격  $\Delta t$ 와 유체의 동점성계수  $\nu$ , 격자간격  $h$ 이다.  $h$ 는 입자의 지름과 같은 0.1m로 하고,  $\Delta t$ 와  $\nu$ 의 값에 대한 계산결과를 비교하였다.

Fig. 3은 입자 재배열 없이  $\nu=0.10m^2/s$ 이고  $\Delta t$ 가 각각 0.05, 0.1, 0.2sec일 때, 무차원 각운동량  $A^*$ 의 변화율 그린 것이다.  $A^*$ 는 식(12)으로 계산한 각운동량  $A$ 를  $t=0$ 에서의 각운동량  $A_0$ 로 나눈 것이다.  $\Delta t=0.05$ 의 경우에는 안정하지만,  $\Delta t=0.1$ 의 경우에는  $t>1.8sec$ 에서, 그리고  $\Delta t=0.2$ 일 때는  $t>1.4sec$ 에서 불안정함을 알 수 있다. 여러가지 값의  $\Delta t$ 에 대해 조사한 결과,  $\Delta t \leq 0.05sec$ 의 경우에만 안정됨을 알 수 있었다. 또 이 범위내에서는  $\Delta t$ 의 크기가 달라도  $A^*$ 의 값에는 거의 차이가 없었다.

각운동량 변화율이 불안정할 때 와류입자의 분포를 확인하기 위해  $t=2.0sec$ 에서의 와류입자 분포를 Fig. 4에 비교하였다.  $\Delta t=0.05sec$ 의 경우 입자가 규칙적으로 분포되어 있으나, 이보다 큰  $\Delta t=0.1sec$ 일 때는 가우스와류의 중심에 입자가 분포하지 않아 불안정함을 확인할 수 있고,  $\Delta t=0.2$ 의 경우에는 불안정하므로 이미 입자들이 흩어져 있다.

그러므로 Fig. 3에서 확인한 각운동량의 안정조건은 수치법에서 해의 수렴의 조건을 의미함을 Fig. 4에서 알 수 있다.

Fig. 5는  $\Delta t=0.05sec$ ,  $h=0.1m$ 에서 점성  $\nu=0.1, 0.15, 0.2m^2/s$ 에 대한  $A^*$ 의 변화율 그린 것이다.  $\nu$ 가 0.1일 때는 안정하지만, 0.15일 때  $t>2sec$ , 0.2일 때  $t>1.1sec$ 에서 불안정함을 볼 수 있다. 한편 유체의 점성이 줄어들수록  $A$ 의 기울기가 증가하는 것은 식(12)로 확인할 수 있다.

매개변수에 대한 조사결과, 해의 수렴조건은  $\nu \Delta t / h^2 \leq 0.5$ 로 나타났다. 이것으로부터  $\Delta t$ 는

$$\Delta t \leq 0.5h^2/\nu \tag{14}$$

를 만족하도록 선정해야 하고, 따라서  $h$ 의 크기에 따라 결정해야 함을 알 수 있다.

3.2 입자 재배열

식 (12)에서  $A$ 의 변화율이 직선을 이루어야 하지만, 위의 Fig. 4와 Fig. 5에서는 초기의 짧은 시간을 제외하고는  $A$ 의 증가율이 감소함을 볼 수 있었다. 이것은 와류입자가 새 위치로 이동하면서

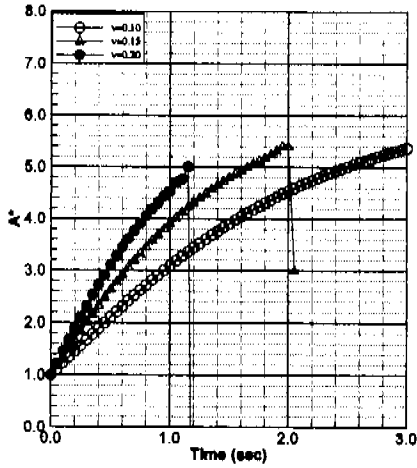
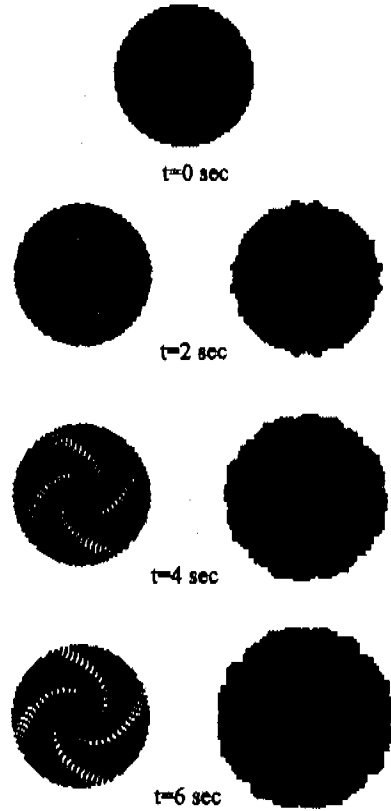


Fig. 5 Variation of angular momentum for different values of viscosity.

각운동량이 보존되지 못하며, 따라서 와류입자의 재배열이 필요함을 의미한다. 앞의 안정성 분석에서보다 더 정확하게 계산하기 위해 가우스와류의 초기 최대반지름을 2.5m로 하여  $t=0$ 에서의 입자수를 1976개로 하고, 수치 매개변수는  $\Delta t=0.05\text{sec}$ ,  $v=0.1\text{m}^2/\text{s}$ ,  $h=0.1\text{m}$ 로 고정하였다.

와류입자 재배열의 유무에 따른 시간별 입자분포를 Fig. 6에 비교하였다. 입자 재배열이 없는 경우에는  $t=0$ 일 때의 입자수 1976개가 그대로 유지되고, 시간이 2sec, 4sec, 6sec로 됨에 따라 입자가 이동하면서 입자분포의 소멸이 뚜렷하게 나타난다. 입자 간격이 균일하지 않으면 각운동량 보존이 손상되는 것을 의미한다. 한편, 1sec마다 입자수를 재배열했을 때에는 와류입자수가  $t=0$ 에서 1976개, 2sec에서 2241개, 4sec에서 2693개, 6sec에서 3191개로 증가하고, 입자 재배열에 의해 가장자리와 와도확산을 나타내는 가우스와류의 지름증가가 뚜렷이 나타나 있다.  $t=0$ 일 때 와도가 일정치 이상인 입자만으로 가우스와류를 표현하였으므로, 시간이 흐르면 입자 재배열에 의해 가장자리에서 와도의 확산이 일어나 가우스와류의 지름이 점차 증가하는 것은 물리적으로도 타당하다. 그러나 와류입자수의 증가는 계산시간의 증가를 초래하므로 입자재배열의 빈도는 계산시간과 각운동량의 보존을 고려하여 결정해야 한다.

Fig. 7은 와류 재배열의 유무와 그 빈도에 따른 각운동량의 변화율 비교한 것이다. nprd는 재배열의 빈도를 나타낸 것으로, 0일 때는 재배열이 없는 경우이고, 20일 때는 1sec마다, 40일 때는 2sec마다



without redistribution with redistribution  
Fig. 6 Comparison of vortex particle distribution.

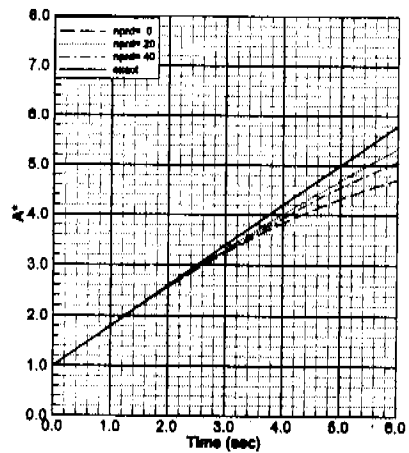


Fig. 7 Comparison of conservation of angular momentum with and without particle redistribution.

입자수를 재배열함을 표시한다. 직선인 완전해와 비교할 때, 재배열이 없으면 각운동량의 증가율이 2sec이후 크게 감소하며, 입자재배열의 빈도가 증

가합수목 완전해에 접근함을 볼 수 있다. 앞에서 언급했듯이 순환과 선형운동량이 보존됨에도 불구하고 각운동량이 보존되지 않는 것은 입자분포가 초기의 균일분포를 유지하지 못함으로써 와도의 가우스분포가 손상됨을 의미한다.

#### 4. 결 론

점성와류입자법에 의한 박리흐름 연구의 일부로서 와류입자법을 가우스와류에 적용하여 안정성과 와류입자 재배열을 조사한 결과, 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 해외 수렴조건은  $v\Delta t/h^2 \leq 0.5$ 로 나타났다.
- (2) 이 조건을 만족할 때 순환과 선형운동량이 보존되었다.
- (3) 와류입자 재배열이 없으면 각운동량의 보존이 계산시간의 경과에 따라 급격히 악화되었다.
- (4) 와류입자 재배열에 의해 가우스와류의 가장 자리에서 와도의 확산이 일어나고 각운동량 보존이 개선됨을 확인하였다.

#### 후 기

본 연구는 1996학년도 부경대학교 학술진흥재단 연구비 지원에 의해 수행되었음.

#### 참고문헌

- (1) Sarpkaya, T., 1975, "An Inviscid Model of Two Dimensional Vortex Shedding for Transient and Asymptotically Steady Separated Flow over an Inclined Plate," J. Fluid Mech. Vol. 68, pp.109-128.
- (2) Lewis, R.I, 1981, "Surface Vorticity Modelling of Separated Flows from Two-Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape," J. Mech. Eng. Sci. Vol. 23, pp.1-12.
- (3) Park, W.C. and Higuchi, H., 1998, "Numerical Investigation of Wake Flow Control by a Splitter Plate," KSME Int'l J., Vol.12, No.1, pp.123-131.
- (4) Ogami, Y. and Akamatsu, T., 1991, "Viscous Flow Simulation Using the Discrete Vortex Model-the Diffusion Velocity Method," Computers & Fluids, Vol.19, pp.433-441.
- (5) Pepin, F.M. and Leonard, A, 1995, "High-resolution Simulation of the Flow Past an Impulsively Started Cylinder Using a Discrete Vortex Method," J. Fluid Mechanics, Vol.296, pp.1-38.
- (6) 박의철, 1999, "와류입자법에 의한 비정상 박리흐름의 전산(1)-경계요소법과 정방형 실린더 주위의 와류강도," 한국산업안전학회지, 제13권, 제4호, pp.3-8.
- (7) Koumoutsakos, P.D., 1993, "Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Methods," Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.
- (8) Winckelmans, G., 1998, 사진.