

돌출된 표면 위의 층류유동에 대한 전산 해석적 연구 (II)

- 위상학적, 기구학적 연구 -

황 중 연* · 양 경 수**
(1999년 4월 13일 접수)

Numerical Study of Laminar Flow over a Protruding Surface (II)

- Topological and Kinematical Studies -

Jong-Yeon Hwang and Kyung-Soo Yang

Key Words: Horseshoe Vortex(말굽와류), Juncture(접합), Singular Point(특이점), Saddle Point, Nodal Point, Focus

Abstract

Topological and kinematical studies of the singular points found in flows around a surface-mounted cube in a channel are presented. Numerical simulation was carried out using high-resolution grid systems. Singular points(saddles and nodes) were found around the cube, which satisfy the topological rules suggested by Hunt *et al.* As the Reynolds number increases, the structure of vortices around the cube becomes complex and the number of singular points increases. Nevertheless, the rule governing the numbers of singular points is still valid. This confirms that our simulation is correct from topological and kinematical point of view, and enables one to infer complex flow patterns in our simulation.

1. 서 론

유체유동의 연구는 주로 실험이나 전산해석으로, 또는 극히 제한된 경우로서 수학적 엄밀해를 구하는 방법에 의존한다. 그러나 복잡한 형상의 유동에 대해서 실험의 경우는 측정장비의 한계

때문에 관심 되는 물리량에 대한 정보를 충분히 제공해 주지 못하는 경우가 대부분이고 전산해석의 경우는 사용되는 방법상의 오차와 컴퓨터 성능의 한계에 따른 불충분한 해상도 등에 의해서 같은 형상, 같은 조건의 유동이라 할 지라도 사용된 방법에 따라 다른 결과를 유발할 수 있다. 실험이나 전산 해석적 연구에 의한 결과가 과연 타당성이 있으며 정확한 결과인지를 판별하기 위해서는 유동장에서 기구학적 또는 위상학적 연구로 검증될 필요가 있다. 가령 결과로부터 얻어진 유선 또는 표면 마찰력선이 과연 기구학적 성립 조건을 만족하는지를 검토해 볼 필요가 있으며

* 인하대학교 대학원

** 회원, 인하대학교 기계·항공·자동차공학부

이를 통하여 결과의 타당성을 재확인 할 수 있다. 또한 도출된 결과로부터 더 복잡하고 다른 조건의 유동장에서는 어떤 결과가 나올 것인가를 예상하기 위해서도 이러한 연구가 수행되어야 할 필요가 있다.

이러한 위상학적, 기구학적 유동연구는 오래 전부터 많은 연구자에 의해서 이루어졌다. 항공역학 문제에서 유동장내 고체표면에서의 전단응력 형태에 대한 기구학적 연구가 Lighthill⁽¹⁾에 의해서 이루어졌고, 복잡한 3차원 박리가 생성되는 항공기 동체와 날개표면에서의 유선 또는 전단응력선에 대한 위상학적 연구가 실험에 의해서 이루어졌다.(Tobak and Peake⁽²⁾) Hunt⁽³⁾는 3차원 박리에 의해서 생성되는 여러 가지 특이점들에 대한 기구학적 연구를 여러 유동 형상에 대해서 수행하였다.

본 연구에서는 두 평판사이 유동의 아래 평면에 정육면체 장애물이 부착되어 있는 경우의 층류 유동장에 대한 전산 해석적 결과로부터 유동장의 위상학적 연구를 수행하였다.(Fig. 1) 본 연구의 유동장에서는 장애물의 저해효과에 의한 역압력 구배에 의해 상류에서 3차원 박리가 생성되며 장애물 바로 앞에서 부착이 이루어지며 또 한편으로는 장애물을 감싸고돌면서 하류로 trail off 된다. 이때 바닥 면에서는 박리와 부착 그리고 하류에서 발생하는 나선와류 등에 의해서 여러 가지 다양한 특이점들이 형성되며 이러한 특이점들과 박리선, 부착선 등에 의해서 말굽와류가 관찰된다. 그 동안 말굽와류의 형태에 대한 많은 연구가 이루어졌다. Baker⁽⁴⁾는 원형단면 실린더가 부착된 바닥에서 생성되는 층류 말굽와류에 대한 메커니즘과 압력분포, 전단응력 분포를 실험적으로 밝혀냈다. Visbal⁽⁵⁾은 원형단면 실린더에 대해서 전산 해석적 연구를 통하여 말굽와류의 불안정성을 보고하였다. 본 연구와 동일한 형상에 대해서 Hussein⁽⁶⁾은 실험을 통하여 난류 유동장에서 여러 정보를 얻어내었다. 그러나 대부분이 실험적으로 이루어졌고 전산 해석적 결과는 원형단면 실린더에 대한 경우가 대부분이다. 본 연구의 유동형상은 실제로 컴퓨터칩(chip)이 부착된 인쇄 회로기판(Printed Circuit Board, PCB)과 같은 많은 상업적 유동에서 발견된다. 본 논문에서는 이와 같은 유동에 대한 수치모사 결과의 타당성을 입증하기 위하여 Hunt *et al.*⁽³⁾의 위상학적 규칙

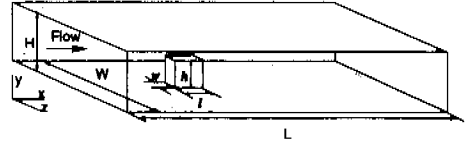


Fig. 1 Geometric configuration.

을 이용한 연구결과를 제시한다. 또한 장애물 주위의 saddle과 node와 같은 특이점에 대한 물리적 고찰이 이루어졌으며 이는 3차원 박리유동에서 생성되는 말굽와류의 메커니즘에 대한 이해를 도와준다. 이에 대한 자세한 유동정보와 특이점들에 대한 기구학적 연구는 다른 응용적인 형상에서의 유동예측을 가능하게 해 줄 것으로 사료된다.

2. 연구방법 및 이론

수식전개 및 수치해석법, 경계조건 및 유동 파라미터는 앞서 발표된 논문(I)에서와 같다.

3. 결과 및 토론

특이점들에 대한 기본개념 및 사용부호, Hunt⁽³⁾의 위상학적 규칙 등은 부록을 참조하기 바란다.

Fig. 2는 $Re=900$ 인 경우 횡방향 대칭면과 바닥 면에서의 대응되는 특이점들의 관계를 보여준다. 이 경우 4-vortex 구조이고 $n=1$ 이며 Fig.2 (a)의 특이점들은 식(A.3)을 정확히 만족함을 알 수 있다.

$$(4 + \frac{1}{2} \times 1) - (2 + \frac{1}{2} \times 5) = 0$$

(a)의 바닥 상류에서 N'과 (b)의 같은 x 지점의 S'가, (a)의 바닥 중간지점의 두 개의 S'와 (b)의 같은 x 지점의 N, S'가, 그리고 (a)의 바닥 하류지점의 S'와 (b)의 같은 x 지점의 N이 대응되는 특이점들이다. 특히 (b)에서처럼 saddle - node - saddle - node - half saddle로 연결되는 복잡한 와류구조와 각 특이점에서 분기되는 박리선이 뚜렷이 보인다.

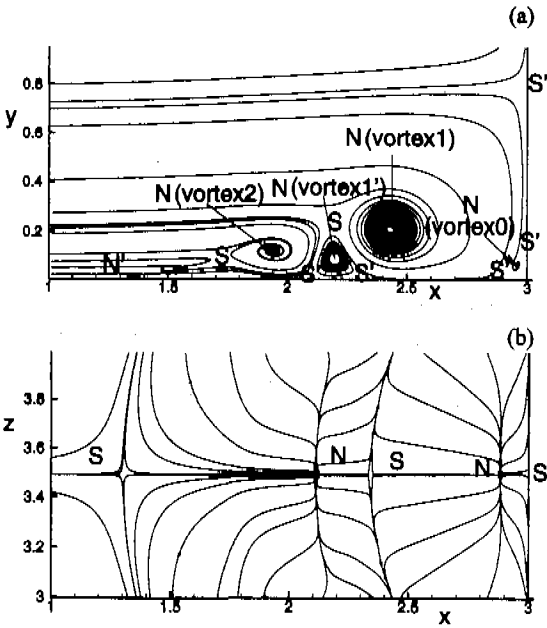


Fig. 2 Streamlines and corresponding singular points; $Re=900$ (a) at the center plane, (b) at the $x-z$ plane of $y/h=0.0063$.

Fig. 3은 $Re=350$ 인 경우 바닥 면에서의 특이점들의 분포이며 이때는 장애물에 의해 $n=2$ 가 되며 식 (A.3)을 만족한다. 즉,

$$(5 + \frac{3}{2}) - (5 + \frac{5}{2}) = 1 - 2 = -1$$

장애물 앞의 최 상류에 존재하는 saddle(S)에서 유선이 분기하며 envelope를 형성하는데 이 선이 박리선이 되며 연속조건에 의해서 이 박리선은 3차원적 박리면을 형성한다. 여기서 연속조건이란 유입하는 유선이 박리선 근방에서는 위로 상승함을 의미한다. 장애물 바로 앞의 node(N)에서도 마찬가지로 개념으로 부착선과 부착면이 생성되며 하류로 흘러간다. 박리선에서는 주위의 유선들이 수렴(converge)하며 부착선에서는 주위의 유선들이 발산(diverge)한다. 장애물의 뒤에 대칭으로 존재하는 nodes(N)는 focus of separation이며 주위의 부착선과 박리선에 의해 유동이 나선형으로 유입되므로 나선형을 유지하며 이 점이 나선와류

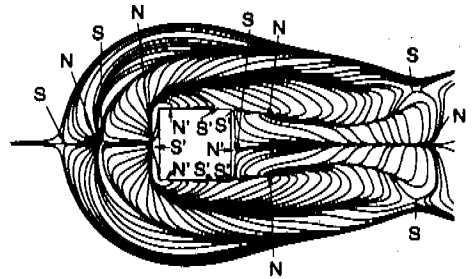


Fig. 3 Shear-stress lines and corresponding singular points on the bottom surface ; $Re=350$.

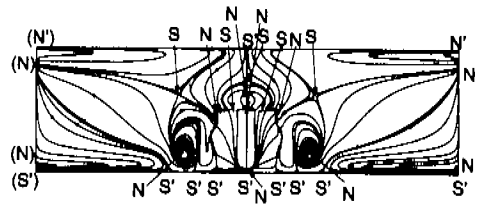


Fig. 4 Streamlines and corresponding singular points on the $y-z$ plane immediately behind the obstacle; Nodes and saddles in the parenthesis are duplicated due to the spanwise periodic boundary condition, and they are not counted in the formula, $Re=250$.

(spiral vortex)의 핵(core)이 되고 유선은 상승하게 된다. 또한 focus 주위에는 saddles가 함께 존재함을 알 수 있다.

Fig. 4는 $Re=250$ 인 경우 장애물 바로 뒤 평면에서의 유선을 보여주는데 매우 복잡한 양상의 특이점들이 분포하지만 식 (A.3)을 정확히 만족한다.

$$(9 + \frac{1}{2}) - (5 + \frac{9}{2}) = 0$$

여기서 중앙 바닥 근처에서 대칭인 nodes(N)은 장애물 앞에서 박리된 와류가 나선형태로 하류로 trail off 됨을 의미한다. 유동장 양끝에서의 특이점들은 주기조건에 의해서 생성된 것이며 만일 주기조건을 사용하지 않고 대류조건을 사용해도 위상학적 규칙은 여전히 만족될 것이다.

Table 1은 여러 레이놀즈수에 대해서 이러한 특이점들의 개수를 정량적으로 나타낸 것이다. 레

Table 1 Dependency of number of singular points on Re ; (a) on the symmetric $x-y$ plane, $(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'}) - (\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'}) = 1 - n = 0$ where $n=1$

(b) on the bottom surface,

$$(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'}) - (\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'}) = 1 - n = -1 \quad \text{where } n=2$$

(c) on the $y-z$ plane immediately behind the obstacle, $(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'}) - (\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'}) = 1 - n = 0$, where $n=1$.

Re		50	100	150	250	350	900
No. singular pts							
S(saddles)		0	1	1	1	1	2
N(nodes)		0	1	1	1	2	4
S'(half saddles)		2	2	2	2	4	5
N'(half nodes)		2	2	2	2	2	1
Total		4	6	6	6	9	12

(a)

Re		25	50	100	150	250	350
No. singular pts							
S(saddles)		2	4	4	4	4	5
N(nodes)		1	4	4	4	4	5
S'(half saddles)		2	3	3	5	5	5
N'(half nodes)		2	1	1	3	3	3
Total		7	12	12	16	16	18

(b)

Re		50	100	150	250	350
No. singular pts						
S(saddles)		3	6	6	5	13
N(nodes)		5	8	8	9	17
S'(half saddles)		5	5	5	9	10
N'(half nodes)		1	1	1	1	2
Total		14	20	20	24	42

(c)

이눌즈수가 높아질수록 특이점들의 개수도 식 (A.3)을 만족하면서 증가함을 알 수 있으며

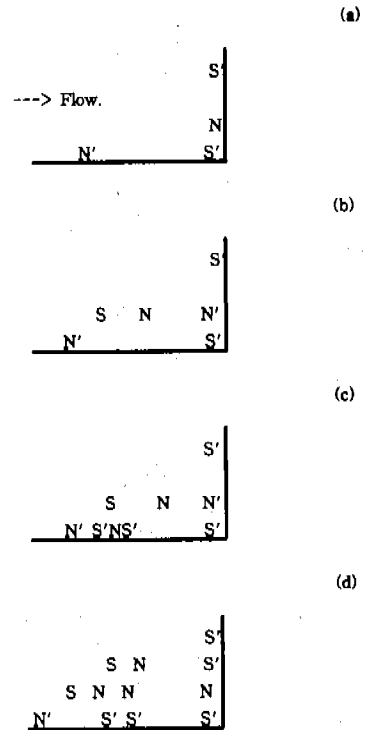


Fig. 5 Locations of singular points at the symmetric $x-y$ plane ; (a) $Re=50$, (b) $Re=100, 150, 250$, (c) $Re=350$, (d) $Re=900$.

vortex 구조도 명확히 알 수 있다. 여기서 와류 구조면에서 볼 때 임계 레이놀즈수는 각 단면마다 일치하지 않음을 볼 수 있다. 즉 횡방향 대칭면(Table 1.(a))에서는 50과 100사이, 250과 350사이, 350과 900사이에서 구조가 변하는 임계 레이놀즈수가 존재하는 반면에 바닥 면(Table 1.(b))에서는 25와 50, 100과 150사이, 250과 350사이에서 임계 레이놀즈수가 존재함을 알 수 있다.

Fig. 5는 횡방향 대칭면에서의 레이놀즈수에 따른 특이점들의 분포를 보여준다. 2-vortex 구조에서 4-vortex 구조로 변화됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 바닥 면에서 임계 레이놀즈수를 정계로 특이점들의 위치를 보여준다. 돌출물 앞의

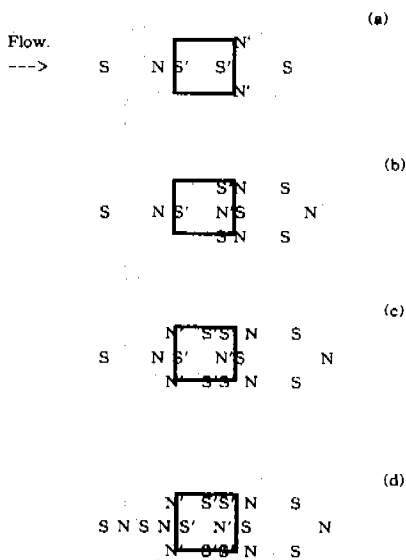


Fig. 6 Locations of singular points on the bottom surface ; (a) $Re=25$, (b) $Re=50, 100$, (c) $Re=150, 250$, (d) $Re=350$.

saddle(S)과 node(N)의 개수가 레이놀즈수 250까지는 일정함을 알 수 있고 이는 Table 1(a)의 임계 레이놀즈수와 Table 1(b)의 임계레이놀즈수의 차이에 대한 원인을 설명해 준다. 레이놀즈수 100과 150사이에서 장애물 앞 대칭면에서의 특이점의 개수는 일정하지만 장애물 옆의 특이점의 개수가 증가함을 볼 수 있다. 즉 Fig. 6 (b)에서는 장애물 뒷부분에서 특이점들이 증가했고 (c)에서는 장애물 주위에서 half node(또는 saddle)들이 증가하였으며, (d)에서는 장애물 앞에서 nodes와 saddles가 생성되었다.

Fig. 7은 장애물 바로 뒤에서 레이놀즈수에 따른 특이점들의 위치를 보여준다. 레이놀즈수가 증가함에 따라 특이점들의 개수의 증가와 그 양상을 알 수 있으며 이러한 juncture flow에서 유동구조의 복잡성이 레이놀즈수에 강하게 의존함을 알 수 있다.

4. 결론

말굽와류가 존재하는 층류 juncture 유동에서 생

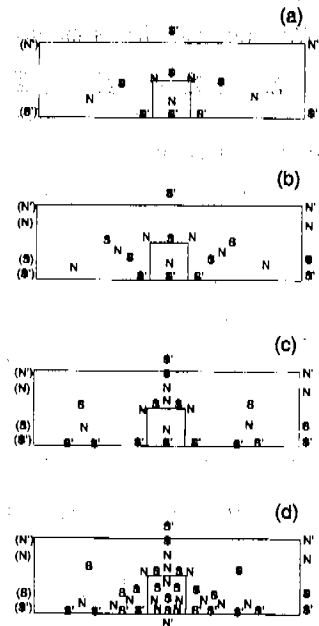


Fig. 7 Locations of singular points on the $y-z$ plane immediately behind the obstacle ; (a) $Re=50$, (b) $Re=100, 150$, (c) $Re=250$, (d) $Re=350$.

성되는 특이점에 대한 개수와 위치 등과 그 구조를 기구학적 위상학적 연구를 토대로 확인하였다. 아무리 복잡한 유동장이라도 이러한 특이점들의 개수는 Hunt의 관계식을 정확히 만족하였으며 레이놀즈수가 증가함에 따라 특이점의 개수도 증가하였다. 특히 장애물 주위의 다방면에서의 특이점을 관찰한 결과 각기 다른 양상으로 개수가 증가하는 것을 확인하였고, 그 위치분포의 관찰과 레이놀즈수에 따른 파라메타적 연구 결과로부터 말굽와류의 생성과 구조에 대한 레이놀즈수에 따른 강한 의존성을 알 수 있었다. 또한 위상학적 연구를 토대로 본 수치모사 결과에 대한 타당성을 검증할 수 있었다. 이러한 juncture flow뿐만 아니라 모든 유동장에서도 기구학적으로 이러한 관계식은 만족하므로 실험이나 계산결과를 검증하는 도구로서 이를 사용한다면 결과에 대한 신뢰를 가질 수 있다. 또한 본 연구에서의 결과를 토대로 이와 비슷한 형상이나 조건의 유동장에도 이 결과를 응용할 수 있음을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구과제(98-0200-12-01-3)의 재정적 지원으로 수행되었으며 관계자 분들께 감사드린다.

참고문헌

(1) Lighthill, M. J., 1963, "Attachment and Separation in Three-Dimensional Flow," Section II 2-6 of "Laminar Boundary Layers," Ed. by L. Rosenhead, Oxford Univ. Press. pp. 72~82.
 (2) Tobak, M. and Peake, D. J., July 1979, "Topology of Two-Dimensional and Three-Dimensional Separated Flows," *AIAA paper*, 79~1480.
 (3) Hunt, J. C. R., Abell, C. J., Peterka, J. A., and Woo, H., 1978, "Kinematical Studies of the Flows Around Free or Surface-Mounted Obstacles; Applying Topology to Flow Visualization," *J. Fluid Mech.*, vol. 86. part 1. pp. 179~200.
 (4) Baker, C. J., 1991, "The Oscillation of Horseshoe Vortex Systems," *J. Fluids Eng.*, Vol. 113. pp. 489~495.
 (5) Visbal, M. R., 1991, "Structure of Laminar Juncture Flows," *AIAA J.*, Vol. 29. No. 8. pp. 1273~1282.
 (6) Hussein, H. J. and Martinuzzi, R. J., 1996, "Energy Balance for Turbulent Flow Around a Surface Mounted Cube Placed in a Channel," *Phys. Fluids* 8 (3), pp. 764~780.
 (7) Kim, J., and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Computational Physics* 59, pp. 308~323.
 (8) Pauley, L. L., Moin, P., and Reynolds, W. C., 1988, "A Numerical Study of Unsteady Laminar Boundary Layer Separation," Report No. TF-34, Thermo-sciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
 (9) Yang, K. S., and Ferziger, J. H., 1993, "Large-Eddy Simulation of Turbulent Obstacle Flow Using a Dynamic Subgrid-Scale Model," *AIAA J.*

Vol. 31. No. 8. pp. 1406~1413.

(10) Shah, K., "Large Eddy Simulation of Flow Past a Cubic Obstacle," 1998 Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.

부 록 : 특이점의 고찰

말굽와류가 생성되는 juncture flow의 유동장에는 여러 가지 종류의 특이점들(singular points)이 발견된다. 특이점들은 크게 node(N)와 saddle(S)로 구분될 수 있다. Node는 다시 regular nodal point와 focus 두 가지로 나뉘어진다. 또한 모든 특이점들은 부착(attachment)이나 박리(separation)의 특성을 갖는다. 예를 들어 saddle은 부착 saddle(saddle of attachment)과 박리 saddle(saddle of separation)로 구분된다. 이러한 특이점들은 표면 마찰력선상에서 쉽게 발견될 수 있다. 고체면 바로 위에서는 고체면 방향(또는 반대방향)으로의 속도성분이 없고 고체 면과 평행한 성분의 속도 벡터만 존재하므로 유선과 표면 마찰력선은 동일하게 취급되어질 수 있다. 여기서 전단응력 벡터 (shear-stress vector) $\vec{\tau}$ 을 다음과 같이 정의한다.⁽⁹⁾

$$\vec{V} = (\vec{\tau}/\eta)z, \tag{A.1}$$

여기서 \vec{V} 는 속도벡터로서 $\vec{V} = (u, v)$, $\vec{\tau} = (\tau_u, \tau_v)$, η 는 비례상수이고 z 는 고체 면으로부터 수직 상방으로의 좌표이다. 특이점들은 전단응력이 0 이 되는 지점에서 발생한다 ($\tau_u = \tau_v = 0$). 먼저 saddle point는 두 전단응력선이 이 점을 통과하며 한 전단응력선에서는 유동 방향이 이 점으로 향하고 다른 전단응력선에서는 이 점 밖으로 향한다. 즉 $\vec{\tau}$ 의 방향이 변화하며 자코비안 $J = \partial(\tau_u, \tau_v)/\partial(x, y)$ 일 때, $J < 0$ 인 경우에 해당한다(Fig. A.1(a)). Fig. A.1 (b)는 고체면이 특이점을 통과하면서 반쪽이 소멸된 경우로서 이를 half saddle이라고 정의한다.

Nodal point는 Fig. A.2(a)에서처럼 이 지점에서 두 직선이 만나며 모든 전단응력선이 이 특이점으로 들어오거나 특이점에서 나가는 경우이며, focus는 이 특이점으로부터 나선을 그리면서 들어

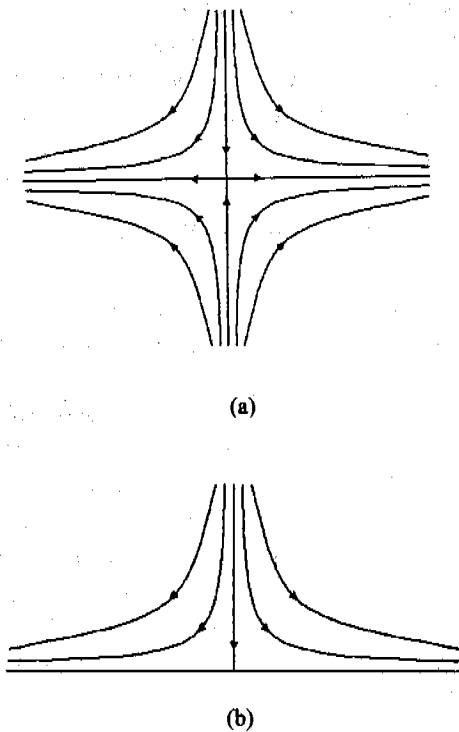


Fig. A.1 Saddle points ; (a) saddle point, (b) half-saddle point.

오거나 나가는 경우이다. focus를 포함한 모든 nodes는 $J > 0$ 이 성립하며 이는 물리적으로 타당함을 알 수 있다. Fig. A.2의 (b)와 (c)는 focus를 보여준다. Regular nodal points와 foci는 다음과 같은 위상학적 규칙을 만족한다.⁽³⁾

$$\begin{aligned} \text{regular nodal point} : \frac{1}{4} \Delta^2 > J > 0 \\ \text{focus} : J > \frac{1}{4} \Delta^2 \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\text{여기서 } \Delta = \nabla \cdot \vec{\varepsilon} = \partial \varepsilon_x / \partial x + \partial \varepsilon_y / \partial y$$

부착의 특성을 갖는 특이점들은 $\Delta > 0$ 인 경우로 이는 z방향으로 유동의 유입을 의미하며 박리의 특성을 갖는 특이점들은 $\Delta < 0$ 인 경우로 유동의 유출을 의미한다. Fig. A.1과 A.2에 표시된 유동의 방향은 박리의 경우이며 부착의 경우는 반대 방향이 된다. Fig. A.2(b)는 Δ 이 0인 focus의 특수한 경우로서 유선이 특이점 주위에서 돌기만 하고 특이점으로 들어오지(또는 나가지) 않는다.

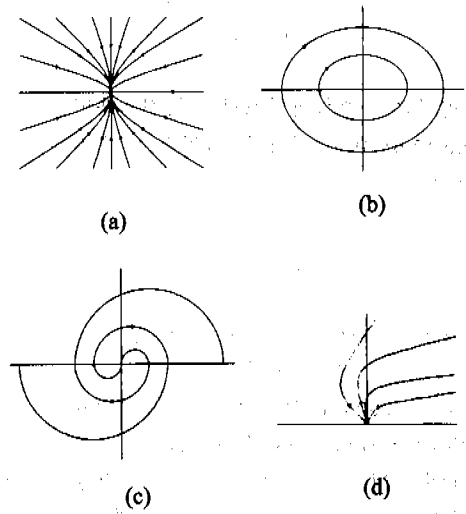


Fig. A.2 Nodal points ; (a) regular nodal point ($\frac{1}{4} \Delta^2 > J > 0$), (b) focus ($J > \frac{1}{4} \Delta^2$), $\Delta = 0$, (c) focus ($J > \frac{1}{4} \Delta^2$), $\Delta \neq 0$, (d) half-nodal point.

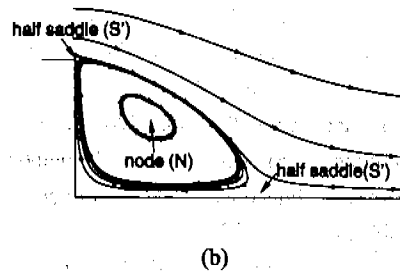
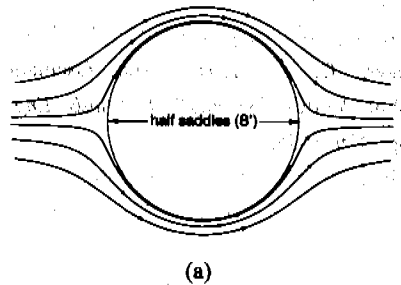


Fig. A.3 Two different types of flow ; (a) doubly connected ($n=2$),

$$\left(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'} \right) - \left(\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'} \right) = -1,$$

(b) simply connected ($n=1$),

$$\left(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'} \right) - \left(\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'} \right) = 0.$$

(c)는 Δ 이 0이 아닐 때이며 Δ 의 절대값이 작을수록 더 많이 회전을 하면서 유동이 특이점으로 돌아온다(또는 나간다). Fig. A.2(d)는 벽이 있는 경우의 half node를 의미한다.

한편 임의의 평면에서의 특이점들의 개수는 다음의 관계식을 만족한다고 보고되었다.⁽³⁾

$$\left(\sum_N + \frac{1}{2} \sum_{N'}\right) - \left(\sum_S + \frac{1}{2} \sum_{S'}\right) = 1 - n \quad (A.3)$$

여기서 n 은 n -tuply connected를 의미하고, N 과 S 는 half node와 half saddle을 각각 나타낸다.

Fig. A.3 (a)는 유동장에 닫힌 장애물이 있는 경우로 이때 $n=2$ 즉, doubly connected가 되며

$$(0+0) - \left(0 + \frac{1}{2} \times 2\right) = -1$$

(b)는 후향 계단 유동으로서 $n=1$ 즉, simply connected가 된다.

$$(1+0) - \left(0 + \frac{1}{2} \times 2\right) = 0$$

두 경우 모두 위 식을 만족하는 간단한 예라고 할 수 있다. 위에서 언급된 특이점들의 정의와 특이점들 사이에서 성립되는 식 (A.3)은 좌표축에 수직인 평면에서 두 속도 성분으로만 그려진 유선에서도 성립한다.⁽³⁾