

# 형상비 변화에 따른 불변량과 수정계수를 사용한 적층복합판의 진동해석

## Vibration Analysis of Composite Laminated Plates with Increasing Aspect Ratio by Invariant and Correction Factor

박 제 선\* 이 정 호\*\* 홍 창 우\*\* 이 주 형\*\*

Park, Je-Sun Lee, Jung-Ho Hong, Chang-Woo Lee, joo-Hyung

### Abstract

Simple equations which can predict "exact" values of the natural frequency of vibration for the special orthotropic laminates are presented. Many laminates with certain orientations have decreasing values of  $B_{16}$  and  $B_{26}$  as the number of plies increases. Such laminates, with  $D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ , including the laminates with anti-symmetric configurations can be solved by the same equation for the special orthotropic laminates. If the quasi-isotropic constants are used, the equations for the isotropic plates can be used. Use of some coefficients can produce "exact" value for laminates with such configurations.

Natural frequencies of the plate with varying aspect ratios is presented.

키워드 : 수정계수, 적층판, 고유진동수

Keywords : Correction factor, Laminate plate, Natural frequency

### 1. 서 론

고급복합재료(advanced composite material)는 여러 가지 훌륭한 장점에도 불구하고 건설기술자에게는 그 이론이 너무 복잡하여 건설구조에 대한 응용이 지연되고 있다.

임의의 섬유배향각을  $\alpha, \beta, \gamma$ 라 할 때 적층판의 적층형태가  $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_r$ ,  $\alpha = -\beta, \gamma = 0^\circ$  또는  $90^\circ$ 의 형태를 갖는 적층판은, 적층수( $r$ )가 증가함에 따라,  $B_{ij}$ 강성이 0으로 접근한다.[1], [2] 건설구조물은 그 치수가 커서  $r$ 이 증가해도 시간대 두께비가 충분히 커서, 횡방향 변형률( $\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ )의 영향이 무시될 수 있다. 이 경우 판의 지배방정식은 간단한 특별직교이방성의 식으로 변화된다. 토목구조물에 흔히 적용될 수 있는 이러한 배향각을 가진

적층판의 지배방정식을 취급이 간단한 특별직교이방성 판의 경우로 변경시킨 다음 해석을 더 간단히 진행할 수 있도록 기술자들이 유사 등방성 상수(quasi-isotropic constant)를 사용하여 낮은 등방성판의 방정식을 사용하여 답을 구한 다음 "수정계수(correction factor)"를 사용하여 "정확한"해를 구할 수 있다.[5] 구조물의 예비 설계시 응력 상태가 미지수이어서 섬유 배향각을 결정할 수 없으면, 섬유와 모재등을 결정한 후 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타내는 유사 등방성 상수를 사용하여 여러 가지 응력 및 변형을 구한 다음, 본 논문에서 제시된 "수정계수"를 사용하여 "정확한"값을 구하고 정확한 섬유 배향각을 설계하여 간단한 과정을 다시 거치면 정확한 결과가 손쉽게 얻어지게 된다. 본 논문에서는 토목건설용 구조물에 사용되기 쉬운 적층복합재료판의 한 경우인  $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_r$ 의 적층판을 대상으로 수정계수를 이용한 간편한 진

\* 강원대학교 토목공학과 교수, 공학박사

\*\* 강원대학교 산업기술연구소, 연구원

동해석 방법을 제시하고 기술자들의 편의를 위해 몇 가지 경우의 고유진동수를 계산하여 제공한다[2], [5].

## 2 이론적 배경

### 2.1 적층복합판 이론

횡방향 전단변형률이 무시될 수 있을 때, 적층판의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\
 & + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
 & - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \\
 & - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = q(x, y)
 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (4)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (6)$$

이고,  $\bar{Q}_{i,j}$ 는 변환 축소 강성 매트릭스(transformed reduced stiffness matrix)로서

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\
 \bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
 \bar{Q}_{23} &= Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \\
 \bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\
 \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\
 \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23})mn \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2
 \end{aligned} \quad (7)$$

이며,  $Q_{i,j}$ 는 평면응력 및 평면변형률 경우의 축소 강성(reduced stiffness)로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \quad (8)$$

$r$ 의 증가에 따라  $B_{16} \rightarrow 0$ ,  $B_{26} \rightarrow 0$ 가 되면, 식(1)(2) 및(3)은 다음과 같이 간단히 변화되고, 이것은 곧 특별직교 이방성판의 방정식이 된다. [1], [2]

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

여기서  $D_1 = D_{11}$ ,  $D_2 = D_{22}$  그리고  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 이다.

판의 경계조건이 단순지지일 경우

$x=0, a$ 에서  $w=0$  ;

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

$y=0, b$ 에서  $w=0$  ;

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

이다. 탄성체의 자유진동은 조화운동이며 다음 식(12)와 같이 나타낼 수 있다. [3]

$$w(x, y, t) = F(t) G(x, y) \quad (12)$$

윗 식(12)는 식(10)과 식(11)에서 주어진 경계조건을 만족하도록 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin \omega_n t \quad (13)$$

위 식(13)을 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 고유주파수를 구할 수 있다.

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} [D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4] = (\omega_n^{\text{orth}})^2 \quad (14)$$

역대칭 angle-ply 적층 복합판의 단순지지 type S3 즉 :

$x=0$  과  $x=a$  에서

$$w=0, \quad M_x = B_{16} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$u=0, \quad N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$y=0$  과  $y=b$  에서

$$w=0, \quad M_y = B_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$v=0, \quad N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

인 경우에 대하여 Whitney가 구한 고유진동수는 다음과 같다. [1], [2]

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left( T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}^2 - T_{11}T_{23}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \right) \quad (15)$$

여기서

$$T_{11} = A_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + A_{66} \left(\frac{n}{b}\right)^2$$

$$T_{12} = (A_{12} + A_{66}) \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right)$$

$$T_{13} = -[3B_{16} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + B_{26} \left(\frac{n}{b}\right)^2] \left(\frac{n}{b}\right)$$

$$T_{22} = A_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^2 + A_{66} \left(\frac{m}{a}\right)^2$$

$$T_{23} = -[B_{16} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 3B_{26} \left(\frac{n}{b}\right)^2] \left(\frac{m}{a}\right)$$

$$T_{33} = D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4$$

이다.

본 논문에서 제시된  $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_r$  배향각을 가진 적층판은  $r$ 이 증가하면  $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0$ 가 되어, 식(15)는

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} T_{33} \quad (16)$$

가 되며, 이것은 정확히 식(14)와 일치한다. 즉 식(15)가 식(14)로 간편하게 변화되는 것이다.

## 2.2 Quasi-isotropic 상수의 개념

복합재료 구조물의 예비 설계시, 비록 단면이나 배향각이 결정되지 않은 상태에서 Tsai가 제안한 유사등방성 상수를 사용하면 문제해결이 더 간단해진다.[1], [5], [6] 역대칭 형태의 적층판을 포함한  $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0, D_{16}=D_{26} \rightarrow 0$ 로 되는 적층판들은 특별적이고 이방성 적층판과 같은 방정식으로 취급 될 수 있다. [1] 모든 비등방성 재료는 변환된 좌표축의 불변량인 이러한 상수들을 갖고있는데 이것은 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타낸다. 적층판에 작용된 하중에 대하여, 선택된 층의 각도 배향에 관계없는 최소값은 어떠한 강성요소보다 더 좋은 설계요소가 된다. Quasi-isotropic 상수는 다음과 같다.

$$[Q]^{iso} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}),$$

$$U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) = U_1 - 2U_5,$$

$$U_5 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

이다.

Quasi-isotropic 상수를 사용할 경우

$$D_{11} = D_{22} = D_3 = \left(\frac{h^3}{12}\right) Q_{11}^{iso} = \frac{h^3}{12} U_1 \quad (18)$$

이며, 식(14)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12}\right) Q_{11}^{iso} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \\ &= \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12}\right) U_1 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

DEN<sup>iso</sup>를 다음과 같이 정의하면

$$DEN^{iso} = \left(\frac{h^3}{12}\right) U_1 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \quad (20)$$

식 (19)는 다음 식으로 표현된다. [1]

$$(\omega_n^{iso})^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} (DEN^{iso}) \quad (21)$$

### 2.3 정확해를 얻기위한 수정계수의 사용

진동에 관한 정확한 값을 쉽게 얻기 위하여 김덕현은 다음과 같은 공식을 제안하여 예비 설계시 수정계수를 사용하여 “정확한 해”를 구할 수 있는 방법을 마련하였다. [1], [2]

Quasi-isotropic 상수가 사용될 때 진동에 관한 공식은 식(21)과 같다. 여기에 수정계수를 적용시키면 “정확한 해”는 다음과 같이 표시 될 수 있다.

$$(\omega_n)^2 = (\omega_n^{iso})^2 \cdot (FRC^2) \quad (22)$$

여기서

$$FRC^2(1) = [4(U_1 - U_3) + 2(U_1 - 3U_3)(e^2 - 1) + (U_1 - U_2 + U_3)(e^4 - 1)] / U_1 [4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)] \quad (23)$$

$$FRC^2(2) = \frac{[D_1 + 2D_3 + D_2 + 2D_3(e^2 - 1) + D_2(e^4 - 1)]}{(\frac{h^3}{12})U_1 [4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)]} \quad (24)$$

이고  $e = \frac{na}{mb}$  이다.

만일  $e=1$ 이면

$$FRC^2(1) = \frac{U_1 - U_3}{U_1} \quad (25)$$

$$FRC^2(2) = \frac{D_1 + 2D_3 + D_2}{(\frac{h^3}{3})U_1} \quad (26)$$

이다.

어떤 배향각을 갖는 적층복합판은 층수가 증가함에 따라,  $B_{16}=B_{26} \rightarrow 0$ 이 되고, 이때 이 적층복합판은 특별직교 이방성 적층판의 공식으로 정확한 해가 구해질 수 있다.

예비 설계시에는 재료의 종류, 층수, 배향각 등이 결정되지 않았으므로 기술자들은 처음부터 난관에 봉착하게 된다. 이때 재료(보강재와 모재)만 결정하면 사용될 재료의 최소한의 강도를 나타내는 quasi-isotropic 상수,  $U_1$ ,  $U_4$ , 및  $U_5$ 가 식(8) 및 (17)로부터 구해질 수 있다.[1] 이 값으로 구조물 전체를 해석하면 각 단면에서의 부재 두께와 힘의 흐름을 얻을 수 있으므로, lamina 수와 섬유 배향각을 설계

할 수 있게된다. 이때 새로운  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  및  $D_{ij}$  stiffness등으로 전체 구조물 해석을 다시할 필요없이,  $Q_i^{iso}$ 로 구한 값에 FRC를 곱하면 정확한 값을 얻을 수 있게 된다. 최초의 예비설계에서는 보강재의 배향각을 결정하지 않았으므로 FRC(1)을 사용하는 것이 편하고, 구조물의 일차 정확한 해석이 끝난 다음 각단면의 최종 배향각을 설계하고 FRC(2)를 사용하여 설계의 정확성을 증가시킬수 있다.

### 3 수치해석

#### 3.1 대상구조물의 물성 및 형상

수치해석을 위해 고려한 적층복합판의 형상은 그림 1과 같으며, 소재는 유리섬유와 에폭시가 사용되었다. 혼합법칙에 의한 unidirectional lamina의 물성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 38.6\text{GPa}, & E_2 &= 8.27\text{GPa}, \\ \nu_{12} &= 0.26, & \nu_{21} &= 0.0557, \\ G_{12} &= 4.14\text{GPa}, & t_0 &= 0.000125\text{m} \end{aligned}$$

식(8)에 의한 reduced stiffness는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 39.167218 \text{ GPa}, \\ Q_{12} &= 2.181797 \text{ GPa}, \\ Q_{22} &= 8.391527 \text{ GPa}, \\ Q_{66} &= 4.14 \text{ GPa} \end{aligned}$$

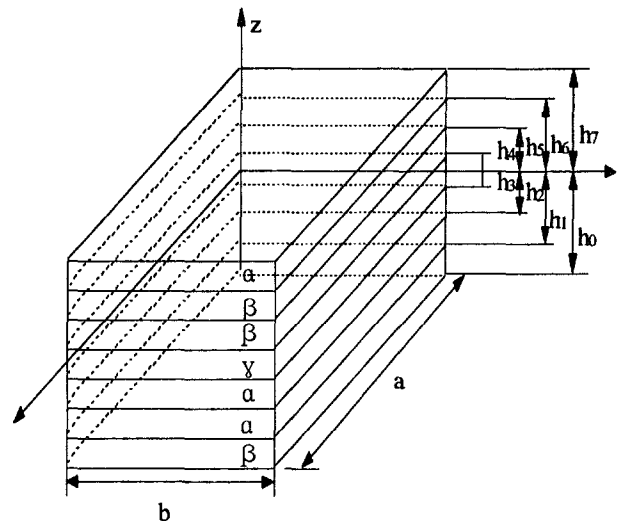


그림 1.  $[\alpha \beta \gamma \alpha \alpha \beta]$  형태의 적층복합판

대표적으로  $\alpha=75^\circ$ ,  $\beta=-75^\circ$ ,  $\gamma=90^\circ$  일 경우에는  $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$  형태의 적층의 강성은 식 (4), (5) 및 (6)에 의하여 구할 수 있으며, 층수증가에 따른 normalized stiffness를 구하여  $D_{11}^*$  대한 비율을 계산하면 표 1과 같다. 여기서 r은 1에 불과한 데도  $A_{11}^*/D_{11}^*=0.9968 \approx 1$  이어서 이미 normalized A 및 D stiffness,  $A^*=D^*$  이므로 이 적층은 quasi-homogeneous laminate가 되어, 고전적 이론과 공식들이 사용될 수 있고 이를 위해 "quasi-isotropic" 상수를 쓸 수 있다.[1]

$[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$  적층판의 배향각 변화에 따른  $D_{ij}$  값은 표(2)에 주어졌다.

3.2 형상비 증가에 따른 적층복합판의 고유진동수  
 표(1)에서 제시된 보강재 배향각을 갖고 형상비 (b/a)가 1~6까지 증가할 때  $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_1$  [형태의 적층복합판의 고유진동수와 수정계수값이 표 (3) ~ 표(5)에 주어져 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에 제시된 수정계수를 이용한 진동해석 방법에 의해 구한 고유진동수가 정확하다는 것을 수치해석을 통해 확인 할 수 있었다.

이 방법은 복합재료 이론에 약한 실무자들이 복합재료 구조물의 초기 설계를 위해 유용하게 사용할 수 있는 방법으로서 몇가지 섬유 배향각에 따른 고유진동 해석 결과 값이 주어졌다.

#### 참 고 문 헌

[1]. D. H., Kim, *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, London, England, 1995.  
 [2]. D. H., Kim, "A Simple Method of Analysis for the Preliminary Design of Particular Composite Laminated Primary Structures for Civil Construction", *Journal of Material Processing Technology* 55, London, England, pp 242-248, 1995.  
 [3]. D. H., Kim, "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members," *Proceedings, International Symposium on*

*Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, October, Seoul, Korea, pp1-2-1 ~ 1-2-38, 1974.

[4]. D. H., Kim et all, "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements", *1st Japan Int'l SAMPE Symposium*, Nov. 28~Dec. 1, pp 863~868, 1989.  
 [5]. D. H. Kim, "Design of Composite Material Structures", *Proc. of China-Japan-USA Tri-lateral Symposium/Workshop on Earthquake Engineering*, Nov.5~9, Harbin, China, pp 1-5-1~1-5-10, 1991.  
 [6]. S. W., Tsai, *Composite Design*, 4th Ed., Think Composite, Dayton, Ohio, U.S.A., 1988.

표 1. [75/-75/-75/90/75/75/-75]1 형태 적층판의 강성특성

r(N) stiffness	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
$B_{ij}$	0	0	0	0
$A_{11}^*/D_{11}^*$	0.99368	0.99987	0.99997	0.99999
$B_{16}^*/D_{11}^*$	0	0	0	0
$B_{26}^*/D_{11}^*$	0	0	0	0
$D_{16}^*/D_{11}^*$	0	0	0	0
$D_{26}^*/D_{11}^*$	0	0	0	0

표 2. [ $\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta$ ]1 형태 적층판의 각도변화에 따른 휨강성  $D_{ij}$

Angle Case	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$D_{11}$	$D_{22}$	$D_{12}$	$D_{66}$
I	+45°	-45°	90°	0.95437	0.95938	0.49246	0.60178
II	+60°	-60°	90°	0.61876	1.48032	0.39979	0.50911
III	+75°	+75°	90°	0.49056	1.97916	0.21447	0.32379

표 3. Case I 에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, r(N)=1(7)

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
$\omega_n^{Kim}$	22.73391	13.46879	11.43812	10.67614	10.31165	10.11011
$\omega_n^{orth}$	22.73389	13.46879	11.43811	10.67614	10.31165	10.11011
$\omega_n^{iso}$	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28367	1.32462	1.34507	1.35659
FRC(2)	1.07790	1.02177	0.97618	0.95284	0.94022	0.93280
$\omega_n^{iso}FRC(1)$	22.73382	13.46876	11.43808	10.67611	10.31162	10.11006
$\omega_n^{orth}FRC(2)$	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	1.07790	1.02177	0.97618	0.95284	0.94022	0.93280

표 4. Case II 에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, r(N)=1(7)

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
$\omega_n^{Kim}$	21.92545	11.76218	9.63057	8.83752	8.45893	8.24970
$\omega_n^{orth}$	21.92544	11.76218	9.63056	8.83752	8.45892	8.24969
$\omega_n^{iso}$	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28357	1.32462	1.34507	1.35659
FRC(2)	1.03956	0.89229	0.82191	0.78874	0.77128	0.76115
$\omega_n^{iso}FRC(1)$	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
$\omega_n^{orth}FRC(2)$	21.92542	11.76213	9.63054	8.83751	8.45892	8.24968
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	1.03956	0.89230	0.82192	0.78874	0.7712	0.76115

표 5. Case III에 대한 적층판의 고유진동수와 수정계수, r(N)=1(7)

Method	Aspect Ratio					
	1	2	3	4	5	6
$\omega_n^{Kim}$	20.21175	10.09059	8.29612	7.68341	7.40348	7.25253
$\omega_n^{orth}$	20.21174	10.09058	8.29612	7.68341	7.40348	7.25253
$\omega_n^{iso}$	21.09101	13.18188	11.71723	11.20460	10.96733	10.83844
FRC(1)	0.91498	1.18570	1.28357	1.32462	1.34507	1.35656
FRC(2)	0.95831	0.76549	0.70803	0.68574	0.67505	0.66915
$\omega_n^{iso}FRC(1)$	19.29787	15.62979	15.03988	14.84189	14.75185	14.70333
$\omega_n^{orth}FRC(2)$	20.21164	10.09056	8.29610	7.68337	7.40347	7.25253
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{orth}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\omega_n^{Kim}/\omega_n^{iso}$	0.95831	0.76549	0.70803	0.68574	0.67505	0.66915