

최소자승법을 이용한 준설토 문제의 System Identification

System Identification on Dredged Soil Problems using Least Square Method

유 남 재* 박 병 수** 김 영 길** 이 명 옥**
Yoo, Nam-Jae Park, Byung-Soo Kim, Young-Gil Lee, Myung-Woog

Abstract

This paper is a research about system identification which optimizes uncertain geotechnical properties from the data measured during geotechnical design and construction.

Various numerical optimization algorithms of Simplex method, Powell method, Rosenbrock method and Levenberg-Marquardt method were applied to the excavation problem to determine which method showed the best results with respect to robustness of success in finding an optimal solution to within a certain accuracy and number of function evaluations.

From the results of numerical analysis, all of four algorithms are converged to exact solution after satisfying the allowed criteria, and Levenberg-Marquardt's algorithm was identified to be the most efficient method in number of function evaluations.

System identification was applied to geotechnical engineering problems, possibly being occurred in field, to verify its applicability : estimation of settlement due to self-weight consolidation in dredged and filled soil.

For self-weight consolidational settlement of a dredged soil, a program of evaluating the constitutive relationship of effective stress-void ratio-permeability was developed by using the technique of system identification. Thus, consolidational characteristics of a dredged soil, having a very high initial void ratio, can be evaluated.

키워드 : 준설매립토, 압밀, 최적화, System Identification

Keywords : Dredged and Reclaimed Soil, Consolidation, Optimization, System Identification

1. 서론

일반적으로 토목구조물은 오차를 포함하는 재료 물성값과 이상화된 해석 모델에 의해 설계되고 있으나 지반공학적 설계에서 흙의 성질은 본질적으로 비균질, 비등방성이며 응력-변형 거동 또한 비선형적이기 때문에 물성값을 정확히 결정하기란 매우 어려

운 일이다.

따라서 가장 합리적이고 안전한 설계와 시공을 위하여 정확한 물성값을 결정하기 위한 노력이 많은 기술자들에 의해 오래전 부터 경주되어 왔는데 이로 부터 얻어진 방법들 중의 하나가 Terzaghi와 Peck(1948)에 의해 제안된 관측설계방법이다.

지반공학 분야에서 Terzaghi와 Peck(1948)에 의해 관측설계방법이 제안된 이후 이 방법은 System Identification 또는 역해석 기법(Back Analyzing Method) 이라는 이름으로 사용되어 왔다. System Identification이란 해석대상 시스템의 특성치를 결정

* 강원대학교 토목공학과 부교수, 공학박사

** 강원대학교 토목공학과, 공학박사

하는 방법으로 시스템에 관련된 일련의 입,출력 관측량으로 부터 시스템의 반응(Response)을 제어하는 변수를 확인하는 과정이다.

따라서 이 연구는 가상의 지반굴착문제를 중심으로 다양한 최적화 알고리즘을 비교분석하여 적정의 알고리즘을 결정하고 준설토의 압밀문제에 System Identification을 적용하여 준설매립지반의 압밀침하 거동을 예측할 수 있는 시스템을 개발하였다.

2. 최적화 알고리즘의 선택

지반공학적 문제에 System Identification 을 적용할 때, 먼저 주어진 문제의 형태에 가장 적합한 최적화 알고리즘의 하나를 선택한 후, 최적화 알고리즘에 따라 구성된 목적함수를 풀게된다. 지반공학적 System Identification 과정 대부분은 목적함수를 평가하기 위해 필요한 수치해석에 소요되므로 이상적인 최적화 알고리즘을 알아보기 위하여 다음 4개의 최적화 알고리즘을 선택하여 비교하였다.

- 1) NELDER : Nelder와 Mead의 수정된 Simplex 방법(Numerical Recipes in FORTRAN)
- 2) ROSENB : Rosenbrock 알고리즘을 사용한 최소자승법(Optimization Techniques with FORTRAN)
- 3) SSQMIN : Lawrence Radiation Lab.에서 개발한 서브루틴으로 Powell방법
- 4) ZSXXQ : IMSL에 포함되어 있는 서브루틴으로 유한차분의 Levenberg-Marquardt알고리즘을 사용한 최소자승법.

각 최적화 방법에 따른 변수평가 프로그램을 비교하기 위하여 다음 그림 1과 같이 지반을 굴착하는 가상의 문제를 선정하여 해석대상으로 선택하였다.

해석대상 지반은 가로 20m, 세로 10m 의 대칭지반으로 3m 깊이로 굴착한 후 흙막이 벽을 설치하는 것으로 하였다. 본 해석에서는 단지 흙막이 벽의 수평변위만을 고려하였고, 먼저 해석대상 지반의 물성을 가정하여 수치해석을 실시한 후 수치해석 결과로부터 얻은 수평변위를 정해로 가정하여 현장계측값으로 사용하였다. 그림 1에 나타난 원은 침하량을 계측한 위치를 나타낸 것이고 시공중에 계측하는 것으로 가정하였다.

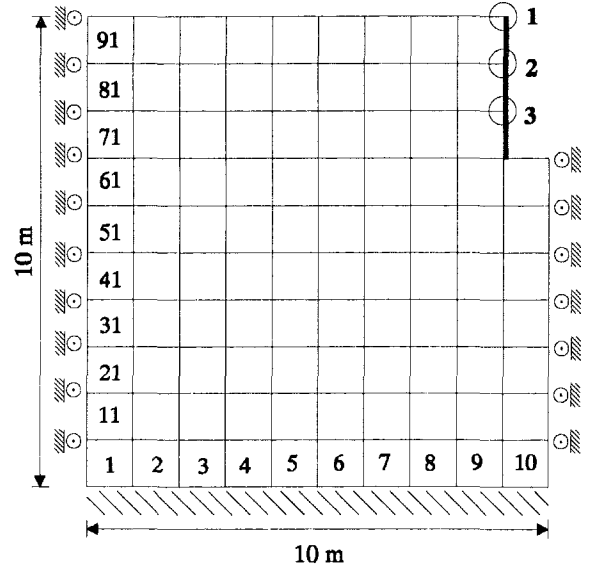


그림 3. 가상의 지반굴착문제

한편, 수치해석은 유한차분 상용프로그램인 FLAC 을 이용하였으며, 현장지반을 100개의 요소와 121개의 절점을 갖는 것으로 재현하였고, 해석에 사용된 구성모델은 Mohr-Coulomb모델을 사용하였고 해석에 필요한 구성모델의 매개변수 및 대상지반의 물성은 표 1에 나타내었다.

표 1. 구성모델의 매개변수 및 지반물성

대상	입력변수	물성값	대상	입력변수	물성값
지반 물성	단위중량 (kN/m ³)	14.58	흙막이 벽	탄성계수 (kPa)	5E+05
	탄성계수 (kPa)	300			
	포아송비	0.3			
	내부마찰각 (Degree)	35		단면 2차모멘트 (m ⁴)	6.667E-04
	점착력 (kPa)	1.5			
	체적탄성계수 (kPa)	2.5E+02			
	전단탄성계수 (kPa)	1.2E+02			
			단면적 (m ²)	0.2	

목적함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$F(\theta, c) = \sum_{i=0}^n (u_i - U_i)^2$$

여기서, u_i = 현장 계측변위(사전해석에 의하여 획득한 값), U_i = 수치해석값, n = 계측자료의 개수

이 가상굴착문제를 통한 최적화 알고리즘의 비교 연구에서는 설계변수(c , ϕ)의 초기값을 2개의 다른

초기값[($c=0.001 \text{ kg/cm}^2$, $\phi = 22^\circ$)와 ($c=0.02 \text{ kg/cm}^2$,

$\phi = 40^\circ$)]으로 가정하여 수행하였다. 4개의 모든 루

틴을 시험한 결과 4개 모두 수렴규준을 만족한후 정확한 해에 도달하여 종료하였다.

표 2와 그림 2, 3은 초기값의 변화에 따른 목적함수 평가의 수를 나타낸 것이다.

표 2. 최적화 알고리즘에 따른 함수평가의 수

최적화 서브루틴	함수평가의 수(반복횟수)	
	초기값(c , ϕ)	초기값(c , ϕ)
	0.001 kg/cm^2 , 22°	0.02 kg/cm^2 , 40°
ZXSSQ	15	16
ROSENB	15	16
SSQMIN	19	20
NELDER	31	24

그림에 나타낸 바와같이 목적함수를 최소자승법으로 개발한 최적화 알고리즘은 다른 2가지 방법 보다 더 빠른 속도로 해에 수렴하는 것으로 나타났다. 한편, 비선형 최소자승방법 알고리즘인 ZXSSQ와 ROSENB 서브루틴은 2개의 초기점으로 부터 해에 도달하는데 함수평가의 수가 같게 요구되는 것으로 나타나, 동일한 비선형 최소자승법에서 알고리즘이 다른경우에도 한가지 방법은 다른 방법보다 우월하게 나타나지 않고 동일한 것으로 나타났다. 이러한 결과는 Levenberg-Marquardt 방법과 비선형 최소자승법중의 하나인 Augmented Gauss-Newton 방법을 비교한 Hiebert(1981)의 결과와 잘 일치하는 것이다.

제한된 가상문제에 대하여 다양한 최적화 알고리즘을 적용하여 비교분석한 결과, 최소자승법인 Levenberg-Marquardt 방법과 Rosenbrock 방법이 다른 방법에 비하여 상대적으로 나은 최적화 방법으로 나타났다.

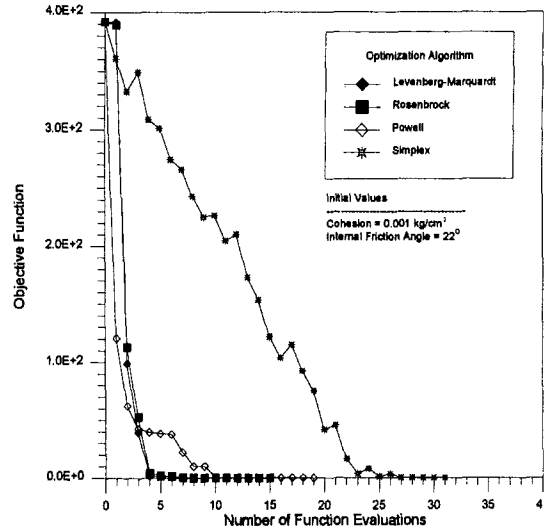


그림 4. 허용규준을 만족하기 위해 평가된 함수평가수의 비교 (초기값 $c=0.001 \text{ kg/cm}^2$, $\phi=22^\circ$)

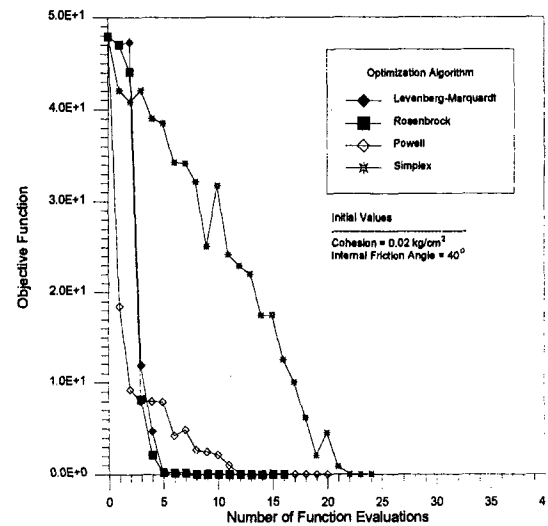


그림 3. 허용규준을 만족하기 위해 평가된 함수평가수의 비교 (초기값 $c=0.02 \text{ kg/cm}^2$, $\phi=40^\circ$)

3. 준설토의 압밀문제

이 경우는 지반공학문제의 대표적 분야중의 하나인 압밀로서, 현장에서 준설매립 지반과 같이 큰 초기 함수비 상태에서의 구성관계식을 정확하게 추정한다는 것은 준설토량의 산정과 시공성에 미치는 영향에 절대적이므로 매우 중요한 부분이지만 현실적으로 실험장비의 제약등의 문제로 고함수비일때의 정확한 값을 획득하기란 어려운 실정이다.

따라서, 현장 준설매립 현황을 실내실험실에서 모

사하기 위하여 일반적으로 Column실험을 수행하는 바 그의 자료를 근거로 하여 준설매립토의 구성관계식 매개변수를 산정하기 위하여 최적화 방법을 도입하여 체계적으로 역해석 하기 위한 System Identification 기법을 시도하였다.

따라서, 본 연구에서는 기존의 유한변형을 압밀이론을 기초로 강원대학교 지반공학연구실에서 개발된 수치해석 프로그램 KWCON에 역해석 기법을 적용하여 간극비-유효응력, 간극비-투수계수 관계에 대한 최적의 구성관계식의 변수를 최적화기법으로 추정하고 현장의 준설매립지반의 압밀침하 거동을 예측하였다.

점토의 간극비-유효응력, 간극비-투수계수 관계에 있어서 보간 다항식을 사용하는 데는 식의 특성을 알아서 적절하게 사용해야 하는데, 압밀식은 2차 편미분 방정식으로 압밀량의 경우 초기시간에 대하여 급격히 비선형적으로 변하고 시간이 지남에 따라서 기울기가 완만해지는 특성이 있다. 특히 간극비가 큰 경우에는 시간변화에 따라 압밀량이 크게 변화하므로 보간식을 사용할 때 반드시 검토가 필요하다. 이러한 특성에 따라서 간극비-유효응력, 간극비-투수계수의 구성관계식을 표준압밀실험, 변수위 투수실험 등을 통하여 비교적 작은 간극비($e < 2.0$)이 경우에 대하여 획득한 자료를 기지점으로 다음의 지수함수 형태의 구성관계식을 지닌 것으로 하였다.

$$\text{간극비-유효응력 } e = A(\sigma')^{-B} \quad (1)$$

$$\text{간극비-투수계수 } k = C(e)^D \quad (2)$$

한편, 상기 식1, 2에서 사용한 구성식 관계를 기본식으로 하여 구성식을 조성한 다음, 식 3, 4와 같은 정교한 지수함수를 사용하여 구성식을 완료하였다. 간극비가 큰 경우에는 시간변화에 따라 압밀량이 크게 변하는데, 이러한 특성에 적절한 구성식을 다음과 같이 지수함수형태로 표현함으로써, 간극비의 폭이 클 경우에도 식의 상수 값만으로 임의의 미분점을 구할 수 있도록 단순화하였으며, 변곡점에서의 수치해석상 오차를 방지할 수 있어 해의 안정성을 도모하였으며, 수행시간의 단축 등의 장점이 있다.

$$\text{간극비-유효응력 } e = \frac{DD + AA \times \ln(\sigma')}{1 + BB \times \ln(\sigma') + CC \times (\ln \sigma')^2} \quad (3)$$

$$\text{간극비-투수계수 } e = \frac{HH + EE \times \ln(k)}{1 + FF \times \ln(k) + GG \times (\ln k)^2} \quad (4)$$

여기서, AA, BB, CC, DD = 간극비-유효응력에 관계된 상수, EE, FF, GG, HH = 간극비-투수계수에 관계된 상수.

초기에 평가된 변수 식 1, 2의 A, B, C, D로부터 Gauss소거법을 이용하여 식 3, 4의 AA~HH변수를 구한후, 이들 변수값을 초기치로 하여 프로그램을 수행하게 된다. 먼저 식 3, 4의 변수 AA, BB, CC, DD를 평가하기 위하여 실험 및 현장계측으로부터 구한 시간-침하 곡선상의 최종침하량을 수치해석결과와 비교하여 허용오차 범위 여부를 판단한후, 허용오차를 만족하지 못할 경우 변수 A, B를 재평가하는 과정을 반복수행하고, 허용오차를 만족하게 되면 다음과정을 수행하게 된다. 변수 A, B가 평가된 후 초기기울기로 부터 변곡점 까지 계측된 3점과 수치결과와의 비교를 통하여 전술한 바와같이 변수 C, D를 구하는 과정을 반복하게 된다. 이와 같이 구한 구성관계를 바탕으로 향후 현장조건에서 예상되는 투기조건하에서 준설매립토의 자중압밀에 의한 침하량을 예측할 수 있다.

해석의 흐름도는 그림 4에 나타내었다.

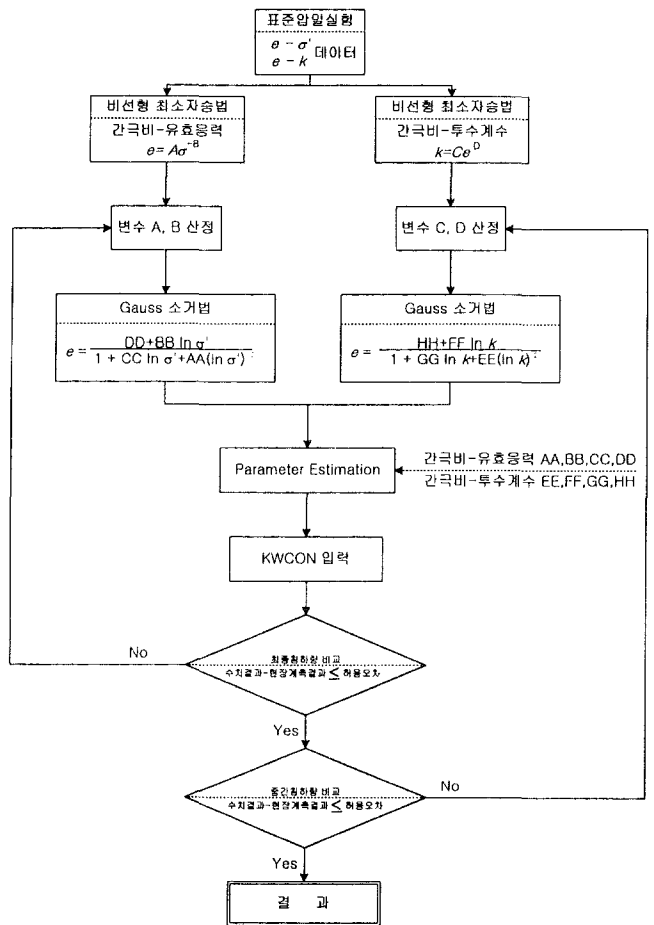


그림 4. 수정KWCON프로그램의 흐름도

연약점토의 압밀거동을 예측하기 위하여 역해석 기법이 포함된 수정KWCON프로그램의 신뢰성을 검토하기 위하여 유남재와 유건선(1999)등이 수행한 준설점토의 침강 및 체적변화 특성연구에 관한 실험결과와 비교 검증하였다.

본 사례는 준설매립토의 시간경과에 따른 압밀 특성을 실내실험실에서 재현하기 위하여 직경 21cm, 높이 200cm의 Column 시험을 실시한 것으로서 실험결과를 현장 준설토의 압밀거동과 일치하는 것으로 가정하여 현장 계측값으로 사용하였다.

한편, 지수함수의 구성관계식을 구하기 위하여 표준 압밀시험 및 변수두실험결과를 이용하였다.

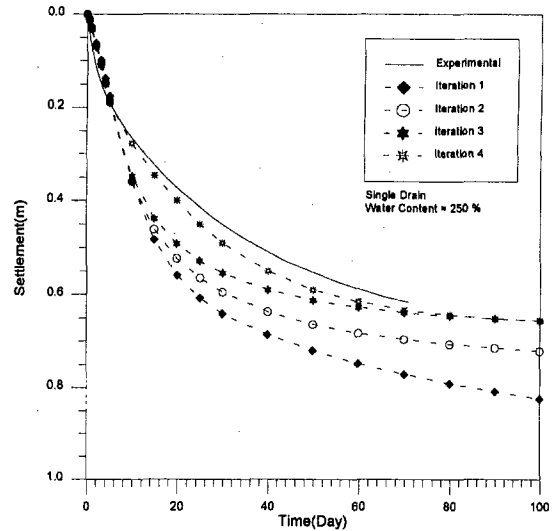


그림 7. 시간-침하량 곡선의 예측

3.1 결과분석

표준압밀실험과 변수위 투수실험 등의 실측값을 기초로 비선형 최소자승의 변수평가 방법으로부터 획득한 변수 A, B, C, D로부터 식 3, 4의 각각의 구성식 상수(AA~HH)값들을 유도하여 실제 현장의 계측자료에서 획득한 시간경과에 따른 침하량에 관한 자료와, 유도된 상수 값을 이용하여 수치해석을 실시하여 얻은 결과를 비교하여 허용오차를 만족하는 간극비-유효응력, 간극비-투수계수의 구성관계를 확정하는 방법을 사용하였다.

역해석 기법에 적용한 실험은 Column실험 중 초기함수비가 가장 작은 경우의 250%의 실험을 대상으로 하였고, 해석결과는 그림 5에 나타내었다.

이와 같이 최적화방법을 사용하여 획득한 구성관계식과 실험결과를 비교해 볼 때 그림 5에 보이는 바와 같이 전반적으로 실험치와 역해석에 의한 예측치가 근접하고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 역해석 결과로 보아 주어진 현장조건에서의 예측에 대한 신뢰성을 확보할 수 있을 것으로 사료된다.

이와같은 수치해석 결과로 보아 현장에서 초기 시공단계까지의 계측자료가 주어진다면 대상지반을 대표하는 지반물성값을 제안된 최적화 기법을 사용하여 비교적 정확히 역해석 할 수 있다. 또한 최적화된 물성값을 사용하여 장래의 거동을 예측할 경우에도 침하량을 비교적 정확히 예측할 수 있다.

3.2 계측오차의 대한 영향

역해석 기법을 적용하여 현장에서 계측된 거동으로부터 현장시스템을 대표할 수 있는 지반 물성값을 최적화할 때 수렴된 지반물성값은 현장지반에서 계측시 포함되는 계측오차에 크게 의존하게 된다. 본 절에서는 현장에서 관측된 계측자료에 포함된 오차의 영향을 고려하기 위하여 MATLAB(1989)을 사용하여 계측치에 대한 표준편차값이 5%, 10%, 20%, 30%, 50%를 가지는 20개의 임의자료(Random Data)를 만들었다. 이와같은 오차가 포함된 임의자료를 바탕으로 비선형최소자승법과 같은 최적화 기법을 사용하여 변수 A, B, C, D 값을 역해석 하였다.

그림 6 ~ 9와 표 3에서 각각의 표준편차에 대하여 비선형 최소자승법의 역해석 기법을 적용함으로써 최적화된 변수값 뿐만 아니라 이때의 평균값과 최소값, 최대값, 표준편차등을 비교하여 나타내었다. 계측된 자료의 평균값에 대한 표준편차가 커질수록 최적화 되는 변수값의 범위는 점점 커진다. 즉 최적화된 지반물성값의 최대값과 최소값의 차이는 점점 커지며 이들의 표준편차값 또한 커진다. 그러나 표와 그림에서 보듯이 변수들의 평균값은 거의 일정한 값을 줄을 알 수 있다.

표 3. 표준편차 변화에 대한 변수값

구 분		계측자료 평균값에 대한 표준편차				
		5%	10%	20%	30%	50%
변수 A	평균값	1.715	1.700	1.735	1.624	1.764
	최소값	1.612	1.534	1.342	1.011	0.653
	최대값	1.816	1.903	2.072	2.405	2.533
	표준편차	0.049	0.103	0.205	0.299	0.539
	분 산	0.002	0.011	0.042	0.089	0.290
변수 B	평균값	0.299	0.331	0.307	0.174	0.389
	최소값	0.213	0.132	-0.071	-0.092	-0.677
	최대값	0.409	0.664	0.567	0.703	1.698
	표준편차	0.057	0.125	0.179	0.256	0.546
	분 산	0.003	0.016	0.032	0.066	0.297
변수 C	평균값	0.066	0.104	0.084	0.178	0.098
	최소값	-0.015	-0.215	-0.223	-0.561	-1.204
	최대값	0.182	0.341	0.426	1.063	1.472
	표준편차	0.049	0.136	0.194	0.397	0.681
	분 산	0.002	0.019	0.038	0.158	0.464
변수 D	평균값	2.502	2.519	2.465	2.577	2.465
	최소값	2.413	2.382	2.156	2.255	1.551
	최대값	2.623	2.642	2.726	2.903	3.399
	표준편차	0.059	0.075	0.181	0.198	0.473
	분 산	0.003	0.006	0.033	0.039	0.224

그러므로 계측된 자료에 약간의 오차가 포함되어 있더라도 계측된 자료가 비교적 많이 있으면 이들을 이용하여 여러번 역해석을 수행함으로써 최적화된 물성값에 대한 평균값을 얻으면 보다 좋은 현장 물성값을 예측할수 있다.

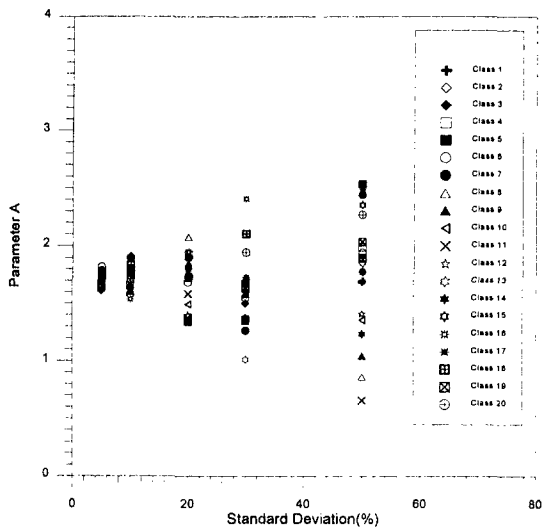


그림 6. 표준편차변화에 대한 역해석된 변수A값

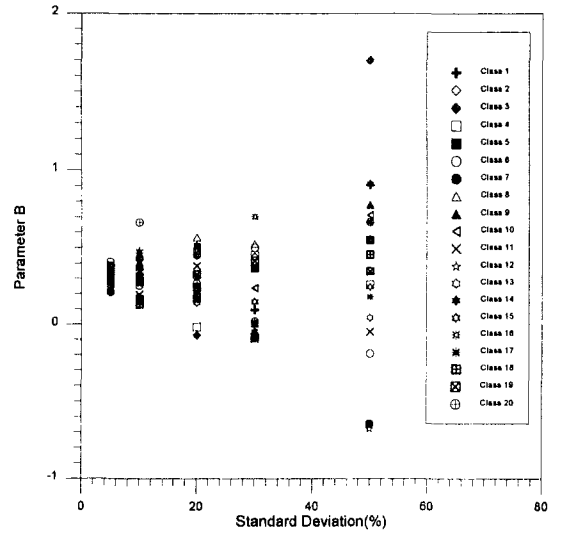


그림 7. 표준편차변화에 대한 역해석된 변수B값

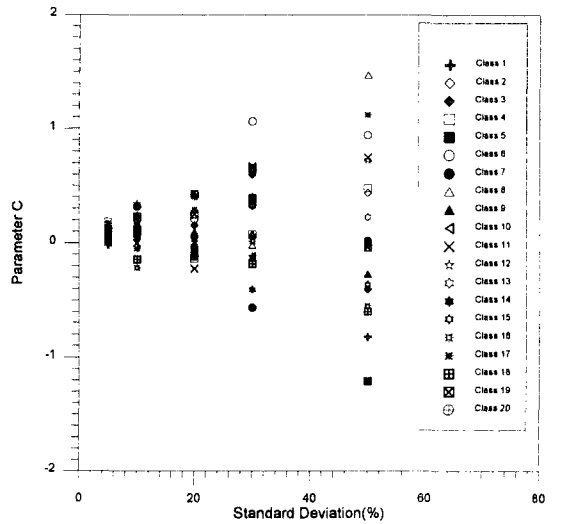


그림 8. 표준편차변화에 대한 역해석된 변수C값

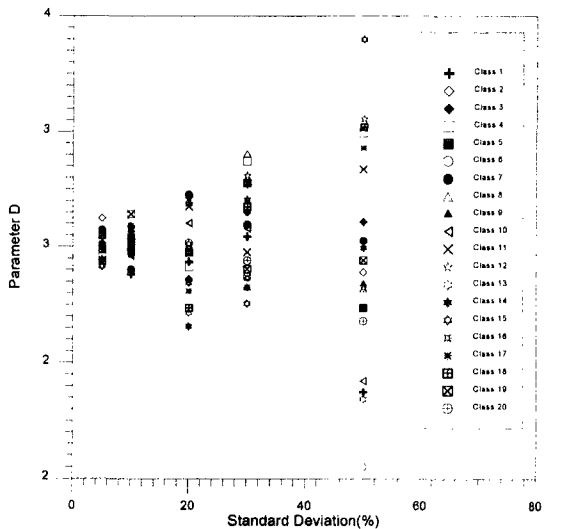


그림 9. 표준편차변화에 대한 역해석된 변수D값

또한 계측자료에 대한 오차가 커질수록 계산시간도 약간씩 증가되는 경향이 있으나 현저한 차이를 나타내는 것은 아니다.

4. 결론

- 1) 지반공학적 설계 및 시공관리에 있어서 System Identification은 매우 유용한 방법으로 다양하고 폭넓게 적용할 수 있다.
- 2) 가상문제에 해석결과로부터 각 변수평가 알고리즘이 정해에 도달하는 시간을 비교한 결과, 최소자승법이 정해 도달시간이 짧게 나타나 지반공학문제에 효율적인 역해석 기법으로 추천된다.
- 3) 최소자승법인 Levenberg-Marquardt, Rosen-brock 방법은 해석과정과 해석결과에 있어서 해의 수렴도나 정확도가 동일한 것으로 나타났다.
- 4) 준설점토의 자중압밀 침하량 산정을 위하여 실내대표준 압밀실험과 Column실험결과를 바탕으로 초기 간극비가 매우 큰 상태의 유효응력-간극비-투수계수의 구성관계식을 구하기 위한 역해석 기법을 개발하였다.
- 5) 계측수량의 증가와 그에 따른 역해석 시행횟수의 증가에 의하여 얻어진 최적화된 지반정수의 평균값을 사용함으로써 계측자료의 오차를 줄일 수 있다.

참고문헌

- [1] Asaoka, A.(1978). "Observational Procedure of Settlement Prediction", Soils and Foundations, *JSSMFE*, 18(4), pp.87~101.
- [2] Ekyhoff, P.(1974). "System Identification", *John Wiley & Sons, New York*.
- [3] FLAC.(1995). "Fast Lagrangian Analysis of Continua", Vol.1, *User's Manual*.
- [4] Hiebert, K. L.(1981). "An Evaluation of Mathematical Software that Solves Nonlinear Least Squares Problems", *ACM Transactions on Mathematical Software*, No.7(1). pp.116.
- [5] IMSL, Inc. User's Manual: *IMSL MATH/LIBRARY*, "FORTRAN Subroutines for Mathematical Applications", Houston, Texas, USA.
- [6] Peck, R. B.(1969). "Advantages and Limitations of the Observational Method in Applied Soil Mechanics", *Geotechnique*, 19(2), pp.171~187.
- [7] Powell, M. J. D.(1964). "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives", *Computer J.*, No.7, pp.155~162.
- [8] Powell, M. J. D.(1976). "Some Convergence Properties of the Conjugate Gradient Method", *Math. Prog.*, No. 11, pp.42~49.
- [9] Powell, M. J. D.(1977). "Restart Procedures for the Conjugate Gradient Method", *Math. Prog.*, No. 12, pp.241~254.
- [10] Rosenbrock, H. H.(1960). "An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function", *Computer J.*, No.3, pp.175~184.
- [11] Rosenbrock, H. H. and Storey, C.(1966). "Computational Techniques for Chemical Engineers", *Pergamon Press, New York*.
- [12] 유남재, 유건선(1998). "부산신항만 준설점토의 침강 및 체적변화특성연구", 강원대학교 산업기술연구소.