

가동 코일 및 DC Motor로 작동되는 유연한 빔의 운동 특성 해석

Dynamic Characteristic Analysis of a Flexible Beam Actuated by Moving Coil and DC Motor

유 화 준*	정 원 택**	남 윤 수***
Yoo, Hwajoon	Jung, Wontaick	Nam, Yoonsu

Abstract

Active damping system is generally used for the vibration suppression and precise motion control for the flexible structure. This application can be easily found on the space structure and driving mechanism of optical storage devices. Although a control system using the flexible structure has many advantages over using rigid mechanism in driving energy saving, system weights, and etc., more complex and precise control strategies are required.

A position control system using flexible structure and the concept of active damper is designed and manufactured, which is driven by slide DC motor and moving coil motor located at the tip of the flexible beam. Dynamic characteristics of this system are investigated by analytic and experimental ways. By the comparison of those two results, a nominal reference model for this system is proposed.

키워드: 유연한 빔, 유한요소 해석, 가동 코일 모터, 오일러 - 베르누이 빔 이론

Keywords: Flexible Beam, Finite Element Method, Moving Coil Motor, Euler - Bernoulli Beam Theory

1. 서 론

유연 구조를 (Flexible Structure) 갖는 위치 제어 시스템에 있어서, 구조물의 잔류 진동을 최소화하는 동시에 정밀한 위치 제어특성을 얻기 위하여는 일반적으로 가동코일 (Moving Coil) 구동장치를 이용한 Active Damper System이 주로 사용된다. 이러한 방법을 사용하는 예는 우주 구조물 (Space Structure)의 진동제어 장치나 [1], 광 정보 저장장치에 (Optical Storage Device: CD ROM) 사용되는 구동 메커니즘에서 쉽게 찾을 수 있다 [2, 3]. 특히, 유연 구조물을 이용하는 위치제어 시스템은 강체 구조물을 사용하는 제어

계에 비하여 소요되는 구동 에너지/ 무게등에서 많은 장점을 갖고 있지만, 유연 구조물의 진동을 억제하는 동시에 정밀 서보 성능을 갖기 위하여는 복잡한 제어 구조가 요구된다.

본 논문에서는 가동코일과 DC 모터로 작동되는 유연 구조물의 위치제어 시스템이 설계/ 제작 되었으며, 이 시스템의 동적 운동 특성이 해석적인 방법과 실험적인 방법에 의하여 분석되었다. 여기서 유도될 해석적 모델은 연속체 진동이 (Flexible Mode Vibration) 고려되지 않은 단순 모델과 이 효과가 고려된 모델로 구분하여 유도된다. 아울러, 이와 같은 해석적 모델 외에 FEM 해석 방법을 이용하는 수치 해석적인 모델이 추가로 제시되었다.

한편, 유연 구조물의 작동 상태를 추정하기 위하여 구성된 계측 시스템은 반도체형 가속도 계와 스트레인 게이지,

* 강원대학교 기계메카트로닉스 공학부 석사과정

** 춘천기능대학 전산응용 기계과 조교수

*** 강원대학교 기계메카트로닉스 공학부 조교수

그리고 DC 모터 축에 직결된 Optical Encoder로 구성된다. 이와 같은 구조로 제작된 실험장치는 학부 및 대학원 교육과정중에 유연 구조물의 위치제어 제어계 설계 문제를 실험적으로 다루는데 있어서 주요 장치로 사용될 수 있다 [4-6].

2. 실험장치의 구성

본 연구를 통하여 완성되는 실험장치는 전체적으로 Fig. 1의 형태를 갖고 있다. 이 그림에 도시된 바와 같이, 유연한 빔 (Flexible Beam)은 끝 점에 집중 질량(M)을 갖고 있고, 끝 점에 위치한 가동 코일 모터 (Moving Coil Motor)에 의하여 힘을 전달 받고 있다. 또한, 이 유연 빔의 다른 쪽은 DC 모터에 의하여 수평 이송되는 이송부에 고정되어 있다. 따라서, 이 유연 빔의 끝 점의 위치는 두 가지 입력요소에 의하여, 즉 가동 코일 그리고 DC 모터, 제어될 수 있다.

실험장치의 작동상태는 3개의 센서에 의하여 모니터링된다. 유연한 빔의 끝 점에 부착된 반도체형 가속도계와 유연 빔의 지지 부에 가깝게 설치된 스트레인 게이지는 유연 빔의 운동 상태에 관한 정보를 제공하며, 수평 이송부를 구동하는 DC 모터에 부착된 광 엔코더 (Optical Encoder)는 수평 이송부의 운동 상태를 알려준다. 아래에서 각 센서에 관한 특성을 간략히 정리한다.

2.1 가속도계 (Accelerometer)

여기서 사용된 가속도계는 Analog Device사에서 제작된 반도체형 가속도계 (ADXL05AH) 이며, 아래의 특성을 가졌다 [7].

- 5 mg 해상도, ±1g에서 ±5g까지 선택적인 스케일 가능
- +5 V의 전원으로 작동/1000 g의 내구성
- 1 kHz 대역폭 (Bandwidth)
- 자체 교정 (Self Calibration using Earth Gravity) 기능
- 자기진단 (BIT: Built In Test) 기능

Fig. 2와 같이 결선된 가속도계 회로에서 출력전압 V_{OUT} 은 아래 식과 같이 유도된다.

$$V_{OUT} = -\frac{R_3}{R_1} V_{PR} + 1.8R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (1)$$

가속도계 내부 회로에 의하여, V_{PR} 은 가속도 1g당 1.8V ± 0.2 V/g의 값으로 출력된다. 또한, V_{OUT} 은 0 - 5 V_{DC} 사이에서 출력되게 된다. 따라서, 식 (1)에서 R_1 과 R_3 를 이용하여 V_{OUT} 으로 출력되는 전압을 조절할 수 있으며, R_2 는 0g에서 V_{OUT} 이 2.5 V로 출력이 되도록 조정하는 데

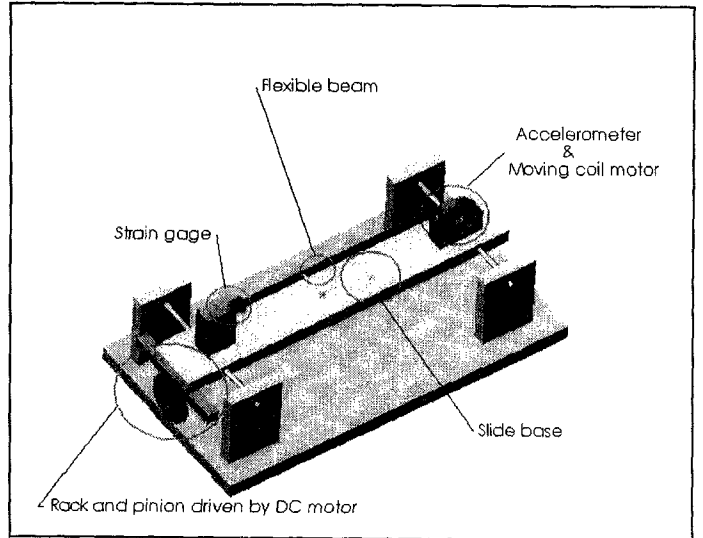


Fig. 1 Schematics of Experimental Setup

각각 사용될 수 있다. 만약, 가속도계를 통하여 검출되는 유연한 빔의 끝점 가속도가 ±1g의 범위 내로 제한되어 있다면, $R_3/R_1 = 5$, $R_1 = 40.2k\Omega$, $R_2 = 514k\Omega$, 그리고 $R_3 = 200k\Omega$ 의 값으로 선정 함으로서 V_{OUT} 은 ±1g에서 +2.5V ± 2V의 값을 갖을 수 있게 된다.

2.2 스트레인 게이지 및 휘트스톤 브리지

유연한 빔의 운동 특성은 Fig. 1에서와 같이 빔 지지부에 설치된 두 개의 스트레인 게이지에 의하여서도 측정될 수 있다. 아래의 Fig. 3는 Half Bridge를 사용하는 Wheatstone Bridge 회로이며, 유연 빔 지지부에서의 스트레인 변화에 의한 정밀 계측 앰프 AD524의 출력 전압은 아래의 식 (2)로 주어진다.

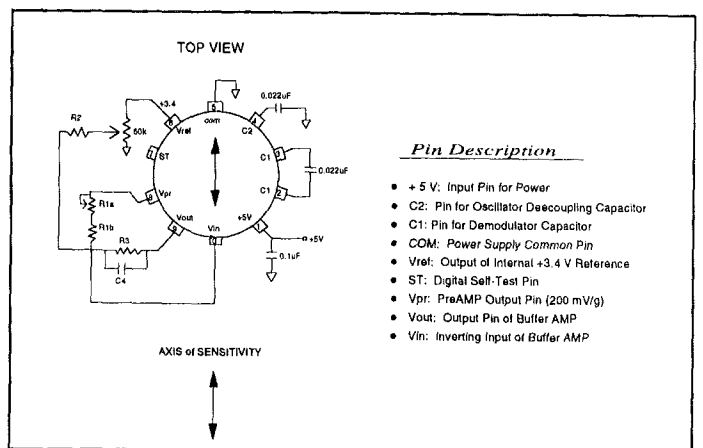


Fig. 2 Circuit Diagram of Accelerometer

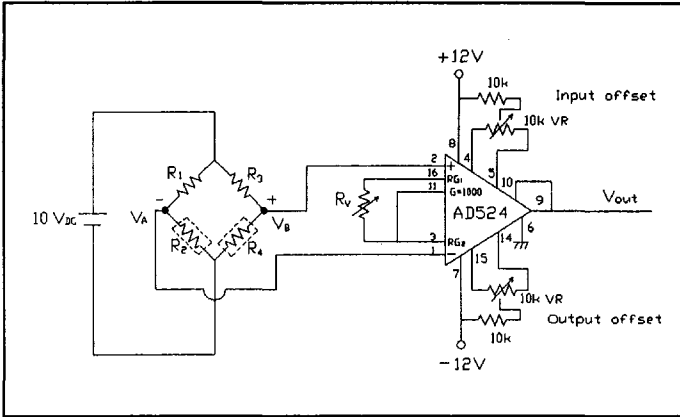


Fig. 3 Circuit Diagram of Strain Gage AMP

$$V_{OUT} = 2G_{524}(\Delta R / R_0)V_S = 2G_{524}G_{SG}V_S\varepsilon \quad (2)$$

위 식에서 $R_0 = R_1 = R_3$, $R_2 = R_0 - \Delta R$, $R_4 = R_0 + \Delta R$ 의 관계가 있으며, G_{524} 는 AD524 AMP의 증폭률, G_{SG} 는 스트레인 게이지의 게이지 인자 (Gage Factor), 그리고 ε 은 유연 빔 지지부에서의 스트레인 량을 각각 나타낸다.

2.3 광 엔코더 (Optical Encoder) 관련 회로

Fig. 4에 DC 모터구동과 관련된 개략적 개념도와 광 엔코더로부터 모터 회전량에 비례하는 아날로그 신호를 얻는 회로가 그려져 있다. Fig. 4의 상단부에 점선으로 그려진 내부의 회로는 DC Motor Drive의 기능을 개략적으로 의미하고 있다. 즉, 이 Motor Drive는 DC Motor의 회전 속도 기준 값 (Set Value)으로 인가되는 전압에 비례하여 추종되는 DC Motor 속도 제어계를 내부적으로 실현하고 있다. 광 엔코더에서 출력되어 지는 3 CH (Channel A/ B/ I) 신호들은 Drive의 내부회로에 의하여 모터 회전속도 (Motor Speed) 정보로 환산되고, DC 모터 회전속도 명령 신호인 기준 값 (Set Value) 신호와 비교되어, PWM 방식으로 DC Motor를 구동하게 된다. 따라서, DC 모터의 변위를 제어하기 위하여는 Fig. 4에서와 같이 위치 피드백 루프 (Position Feedback Loop)이 추가적으로 구성되어야 한다.

Fig. 4의 하단부에는 광 엔코더 출력 신호인 CH A & CH B 신호로부터 DC 모터가 회전된 량을 추정할 수 있는 회로가 그려져 있다. CH A & CH B 신호에 관한 위상 선후 관계로 2진 카운터의 Counting Up/ Down 신호를 생성시키고, 이 신호를 이용하여 12-bit 데이터를 생성한 후 D/A 변환을 거침으로서 DC 모터의 회전량을 (즉, 수평 이송부의 변위) 나타내는 Analog 신호 정보로 환산하는 회로이다.

Fig. 1과 같은 구조를 갖는 시스템에 대하여 광 엔코더의 한 펄스 (Pulse) 주기에 (One Count) 해당하는 수평 이송량 (X)을 계산하여 보자.

$$X = r\theta_s = r\theta_M / N = 2\pi r C_t / (N_\theta N) \quad (3)$$

여기서, X : 수평 이송부의 변위량 (cm)

θ_M & θ_s : DC모터 및 피니언 회전각 (rad)

r & N : 피니언 반지름 (cm) 및 감속기어 비

N_θ & C_t : Counts per turn and Total # of Counts

따라서, 한 개의 Optical Count는 $X = 2\pi r / (N_\theta N)$ cm의 수평 이송부 이동을 의미하게 된다.

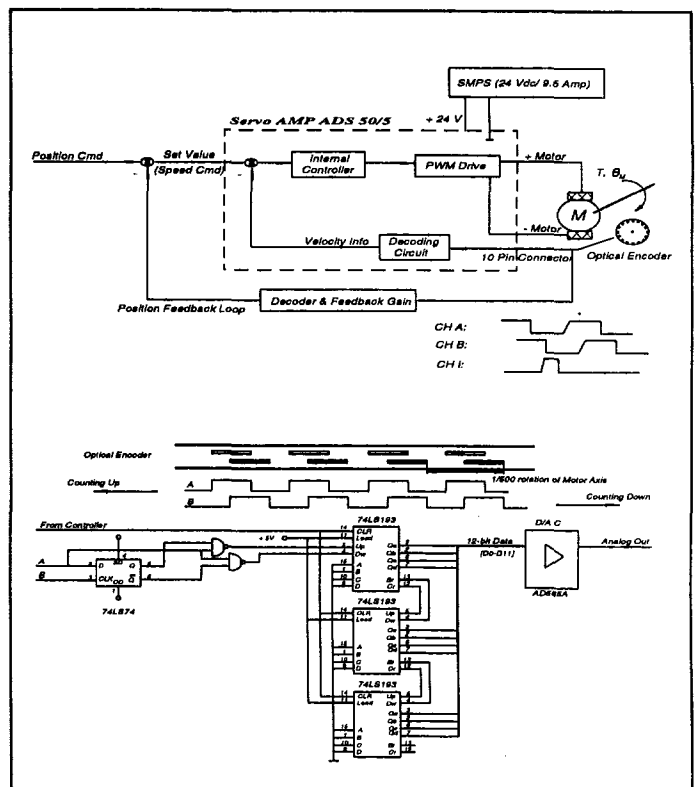


Fig. 4 DC Motor Drive and Decoding Circuit Diagram

3. 시스템 모델링 및 평가

아래의 Fig. 5에 도시된 바와 같이, 유연한 빔은 끝 점에 집중 질량 M을 갖고 있고, 끝 점에 설치된 가동 코일모터에 의하여 힘을 전달 받고 있다. 또한, 이 유연한 빔의 다른 쪽은 DC 모터에 의하여 수평 이송되는 이송부에 고정되어 있다. 따라서, 이 유연한 빔의 끝 점은 두 가지 입력 요소에 의하여, 즉 가동 코일 그리고 DC 모터, 제어될 수

있다. 이 절에서는 이와 같은 구조를 갖는 동적 시스템의 운동 특성을 기술하는 모델을 유도한다. 여기서 유도될 수학적 모델은 연속체 진동이 고려되지 않은 단순 모델과 이 효과가 고려된 모델로 구분하여 유도된다. 아울러, 이와 같은 해석적 모델외에 FEM 해석방법을 이용하는 수치해석적인 모델이 추가로 제시되었다. 또한, 여기서 유도된 수학적 모델들은 실험적인 결과와 비교 분석되어 진다.

위에서 언급된 3개 모델에 공통적으로 사용되는 가동 코일부 및 DC 모터 운동에 관한 식을 유도 하여 보자. Fig. 5에서 보듯이, 유연 빔의 끝 점에는 가동코일이 고정되어 있으며, 영구자석은 수평 이송부에 고정되어 있다. 즉, 가동 코일 변위에 수직 된 방향으로 일정한 자장, B 가 영구 자석에 의하여 제공되고 있다. 이 때, 가동 코일부에 공급되는 전압 (V)와 이에 의하여 생성되는 힘(f_m), 그리고 유연 빔 끝점의 변위($y(L, t)$) 사이에는 다음의 관계 식이 성립한다.

$$V = L_H \frac{di}{dt} + Ri + V_e = L_H \frac{di}{dt} + Ri + K_e \frac{dy(L, t)}{dt} \quad (4)$$

$$f_m = K_t i$$

여기서, R & L_H : Resistance and Inductance of Moving Coil
 K_t : Moving Coil Motor Force Constant
 K_e : Back EMF Constant of Moving Coil Motor

이제 수평 이송부를 구동하는 DC 모터 운동에 관련된 수식을 정리하여 보자. DC 모터의 회전각을 θ_M , 수평이송부 변위를 X 라 할 때, 모터의 운동방정식은 아래의 두 식에 의하여 결정된다.

$$V_{DC} = L_{DC} \frac{di_{DC}}{dt} + R_{DC} i_{DC} + K_{eDC} \dot{\theta}_M \quad (5)$$

$$J_{Total} \ddot{\theta}_M = K_{TDC} i_{DC} + \sum T_{Ext}$$

위 식에서 J_{Total} 은 DC Motor에 의하여 회전/ 이동되는 모든 물체의 효과를 모터 회전축으로 환산시킨 등가 관성 질량을 의미한다.

3.1 집중상수 해석법 (Lumped Parameter Method)

Fig. 5의 구조에서 유연한 빔은 끝 점에 인가되는 집중 하중과 처짐과의 관계를 이용하면 하나의 등가적인 스프링으로 대체될 수 있다. 즉,

$$K_B = 3EI / L^3 \quad (6)$$

여기서, E : Young's Modulus of Flexible Beam Material

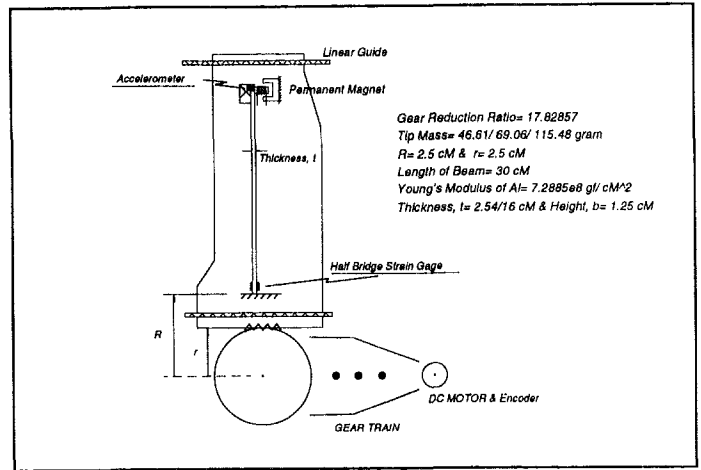


Fig. 5 Schematic System Diagram

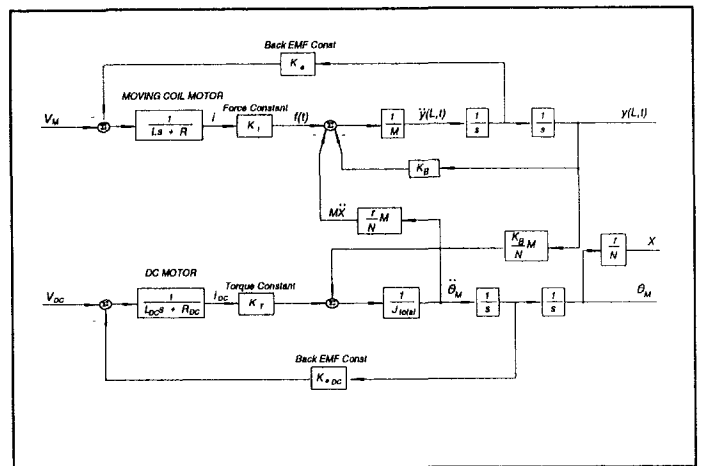


Fig. 6 Lumped Parameter Model Block Diagram

L : Length of Beam
 $I = hb^3 / 12$: Area MOI of Beam Section

따라서, 유연한 빔 끝 점의 운동특성은 다음의 식에 의하여 지배된다.

$$M\ddot{Y} = M(\ddot{X} + \ddot{y}(L, t)) = f_m - K_B y(L, t) \quad (7)$$

지금까지 유도된 모든 식, 즉 식 (3) - (7)들을 종합하면 Fig. 6과 같은 블록 선도를 얻을 수 있으며, 이는 집중상수 해석법에 의한 전체 시스템의 모델을 나타낸다.

3.2 Euler - Bernoulli Beam Model

이 절에서는 유연한 빔의 운동 특성이 Euler-Bernoulli Beam 이론에 의하여 지배된다는 가정 하에 전체 시스템에 관한 운동 특성을 모델링 한다. 가동 코일로 작동되는 유

연구구조부는 Fig. 5에서와 같이 수평 이송부에 Cantilever 지지방식으로 고정되어 있다. 이 때, 유연 빔의 변형이 단지 Bending Moment에 의하여 생성된다고 가정하면, 빔의 운동특성은 다음의 편 미분방정식으로 결정된다. [8]

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (8)$$

경계 조건: $y(0,t) = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0$$

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(L,t) = -\{-EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t)\}$$

여기서, $m =$ Mass per unit length of beam
 $M =$ Concentrated tip mass
 $EI =$ Flexural stiffness of beam

식 (8)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (9)$$

여기서, $q_i(t) =$ i-th generalized coordinate

$$\phi_i(x) = c_i \{ \sin \beta_i x - \sinh \beta_i x + \gamma_i (\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x) \}$$

$$\gamma_i = -(\cos \beta_i L - \cosh \beta_i L) / (\sin \beta_i L + \sinh \beta_i L)$$

식 (8)의 경계조건에 의하여, β_i 는 다음의 주파수 방정식 (Frequency Equation)을 만족시켜야 한다.

$$\frac{M}{m} \beta (\cos \beta L \cosh \beta L - 1) + \cos \beta L \sinh \beta L + \sin \beta L \cosh \beta L = 0 \quad (10)$$

아래 식으로 주어지는 직교성질(Ortho-normality Condition) 과 가동 코일에 의한 힘을 고려하면, $q_i(t)$ 는 다음의 식 (12)를 만족시켜야 한다.

$$m \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx + M \phi_i(L) \phi_j(L) = \delta_{ij} \quad (11)$$

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \phi_i(L) f(t) \quad (12)$$

여기서, $\omega_i^2 = EI \beta_i^4 / m$: i-th Mode Natural Frequency

$f(t) =$ Force generated by moving coil motor

지금까지 유연 빔의 운동특성을 지배하는 운동 방정식과 그 일반 해에 대하여 정리하였다. 이를 다시 요약하면, 유연 빔의 모드 형상함수 (Mode shape function), $\phi_i(x)$ 는 식 (9)와 (10)을 연립하여 풀면 구할 수 있고, $q_i(t)$ 의 운동

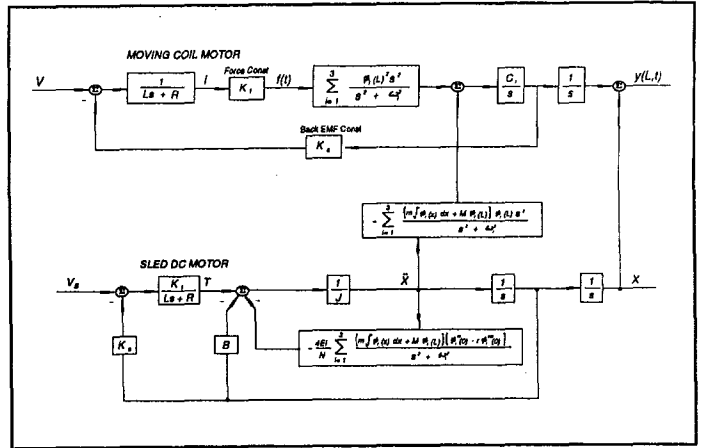


Fig. 7 Flexible Beam Dynamics with Slide Motion

특성은 식 (12)에 의하여 결정된다. 따라서, 유연 빔 끝 점의 변위 $y(L,t)$ 는 식 (9)를 사용하여 구하게 되지만, 공학적인 해에 있어서는 식 (9)에서 2차 또는 3차항 까지만의 모드를 고려하여도 충분히 만족스러운 해를 얻을 수 있다. 즉, 유연 빔 끝 점의 변위는 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$y(L,t) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(L) q_i(t) \quad (13)$$

수평 이송부 (Slide Base Dynamics)와 연성 빔의 운동은 직접적으로 연관된다. 즉, Slide Motion의 감/가속에 의하여 연성 빔 끝 점 운동이 영향을 받게 된다. 따라서, 빔 끝 점의 운동 특성을 나타내는 식 (11)은 아래와 같이 변경된다.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \phi_i(L) f(t) - \frac{d^2 X}{dt^2} \{ m \int \phi_i(x) dx + M \phi_i(L) \} \quad (14)$$

또한, 수평 이송부의 운동은 유연 빔 운동에 의하여 다음 식과 같이 영향 받는다.

$$J_{total} \ddot{\theta}_M(t) + B \dot{\theta}(t) = T(t) - \frac{1}{N} \{ M_b(t) + R F_b(t) \} \quad (15)$$

여기서, $M_b(t) = EI \sum_{i=1}^3 \phi_i''(0) q_i(t)$

$$F_b(t) = -EI \sum_{i=1}^3 \phi_i'''(0) q_i(t)$$

위의 식 (15)에서 $M_b(t)$ 와 $F_b(t)$ 는 유연 빔의 지지부에서의 Bending Moment와 Shear Force를 나타낸다. 따라서, 위의 식들을 모두 조합하면, 수평 이송부 운동이 포함된 유연 빔 운동에 관한 전체적인 운동 특성을 Fig. 7과 같은 블록 선도로 나타낼 수 있다.

3.3 유한요소 해석법에 의한 모델링

Fig. 5과 같은 구조를 갖는 유연 구조물 (Flexible Body)의 운동 모델을 얻기 위하여 유한요소 해석법이 사용되었다. 이 해석법에 관한 이론적 배경은 많은 참고문헌 [8, 9]에 잘 알려져 있으므로, 여기서는 Fig. 5으로 도시된 구조물의 운동 해석을 위한 응용을 중심으로 간략하게 정리한다. 유연 구조물은 Fig. 8와 같이 n개의 유한요소로 분리된다. 이때, 독립된 각 요소의 변위는 아래의 Hermitian Polynomials, $\phi(x)$ 를 사용하여 식 (16)과 같이 전개할 수 있다.

$$y_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^4 \phi_k(x_i) w_k(t) \quad (16)$$

$$\phi_1(x) = 1 - 3x^2/h_i^2 + 2x^3/h_i^3$$

$$\phi_2(x) = x - 2x^2/h_i + x^3/h_i^2$$

$$\phi_3(x) = 3x^2/h_i^2 - 2x^3/h_i^3$$

$$\phi_4(x) = -x^2/h_i + x^3/h_i^2$$

여기서,

임의의 i - 번째 요소에 대한 운동에너지와 위치에너지는 다음 식 (17) 및 (18)과 같이 표현된다.

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^{h_i} m \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \right) + x_i \quad X + y_i \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\sum_{k=1}^{i-1} h_k \right) + x_i \quad X + y_i \right]^T dx_i = \frac{m}{2} \mathbf{q}_i^T [M_i] \mathbf{q}_i = \frac{m}{2} \mathbf{q}_i^T \left\{ \int_0^{h_i} \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1 & \phi_1^2 & \phi_1\phi_2 & \phi_1\phi_3 & \phi_1\phi_4 \\ \phi_2 & \phi_2\phi_1 & \phi_2^2 & \phi_2\phi_3 & \phi_2\phi_4 \\ \phi_3 & \phi_3\phi_1 & \phi_3\phi_2 & \phi_3^2 & \phi_3\phi_4 \\ \phi_4 & \phi_4\phi_1 & \phi_4\phi_2 & \phi_4\phi_3 & \phi_4^2 \end{bmatrix} dx_i \right\} \mathbf{q}_i \quad (17)$$

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^{h_i} EI \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i = \frac{EI}{2} \mathbf{q}_i^T [K_i] \mathbf{q}_i = \frac{EI}{2} \mathbf{q}_i^T \left\{ \int_0^{h_i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''^2 & \phi_1''\phi_2'' & \phi_1''\phi_3'' & \phi_1''\phi_4'' \\ 0 & \phi_2''\phi_1'' & \phi_2''^2 & \phi_2''\phi_3'' & \phi_2''\phi_4'' \\ 0 & \phi_3''\phi_1'' & \phi_3''\phi_2'' & \phi_3''^2 & \phi_3''\phi_4'' \\ 0 & \phi_4''\phi_1'' & \phi_4''\phi_2'' & \phi_4''\phi_3'' & \phi_4''^2 \end{bmatrix} dx_i \right\} \mathbf{q}_i \quad (18)$$

여기서, $\mathbf{q}_i = [X \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]^T = [X \ u_i \ \theta_i \ u_{i+1} \ \theta_{i+1}]^T$

또한, 유연 구조물에 작용하는 외력은 가상 일의 원리 (Virtual Work Principle) 에 의하여 각 노드에 작용하는 일반 외력 (Generalized External Force)으로 표시된다. 즉, 가동코일 모터에 의한 힘은 마지막 유한요소에 작용되며 아래와 같이 결정된다.

$$\delta W_M = \int_0^{h_n} f_n(t) \delta(x-h_n) \delta y(x,t) dx = f_n(t) \delta y(h_n, t) = f_n(t) \delta u_n \quad (19)$$

Fig. 8과 같이 분할된 모든 유한요소에 대하여, 위에서 유도된 식 (17)과 (18)을 적용하면 전체 요소에 대한 총 운동 / 위치 에너지를 구할 수 있으며, 또한 각 노드 점에 작용되는 모든 일반 외력은 식 (19)를 이용하여 구할 수 있다. 이 때, 유연 구조물의 운동 방정식은 다음의 Lagrangian Equation을 적용 함으로서 유도될 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

여기서, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - V = \sum_{i=1}^{n+m} (T_i - V_i)$
 $\mathbf{q} = [X \ u_0 \ \theta_0 \ \dots \ u_n \ \theta_n]^T$

위 식에서 u_i 와 θ_i 는 각 유한요소에 대한 노드의 변위와

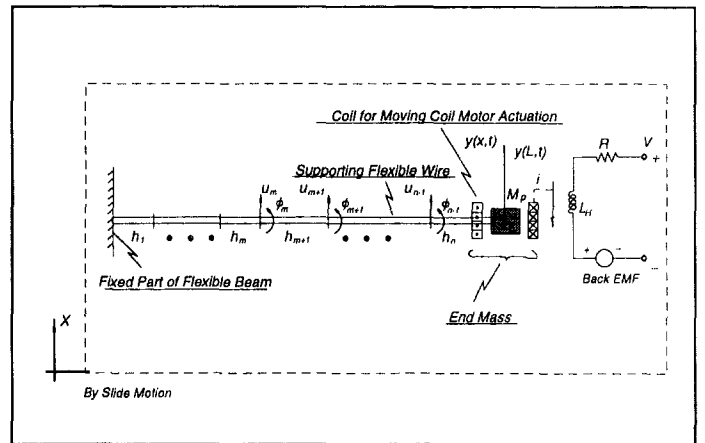


Fig. 8 Simplified FEM Model of Flexible Beam

회전각을 각각 의미한다. 식 (20)을 정리하면, 아래와 같은 MATRIX 미분 방정식을 얻게 된다.

$$[\tilde{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\tilde{K}] \{\mathbf{q}\} = \{\tilde{F}\} \quad (21)$$

이제 앞 절에서 유도된 경계조건에 관한 식 (8)에 식 (16)으로 주어지는 Hermitian 전개를 적용하면, 식 (20)에서 정의된 변수 벡터 \mathbf{q} 는 다음과 같은 구속조건을 갖게 된다.

$$u_0 = \theta_0 = 0$$

$$(6/h_n^2)u_{n-1} + (2/h_n)\theta_{n-1} - (6/h_n^2)u_n + (4/h_n)\theta_n = 0 \quad (22)$$

$$M\ddot{u}_n = EI \left(\frac{12}{h_n^3}u_{n-1} + \frac{6}{h_n^2}\theta_{n-1} - \frac{12}{h_n^3}u_n + \frac{6}{h_n^2}\theta_n \right)$$

이제 식 (22)의 구속조건을 식 (21)에 적용하면, 유연 구조물의 운동을 기술하는 수학적 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = \{\mathbf{F}\} = [0 \ \dots \ 0 \ f_m(t)]^T \quad (23)$$

여기서, $\mathbf{x} = [u_1 \ \theta_1 \ \dots \ u_n \ \theta_n]^T$

위의 식 (23)의 M - Matrix에서 강체운동 \mathbf{Y} 와 유연체 운동 \mathbf{x} 간의 연성 효과를 볼 수 있다. 그러나, Fig. 5로 표시된 전체 시스템은 그 구조상 수평이송(Slide) 부위가 유연 구조물 운동부 보다 강대하게 설계되므로, 유연 구조물 운동에 의한 Slide 운동효과는 무시할 수 있을 정도로 작다는 가정은 충분히 성립한다. 이 가정과 유연 구조물에 설치된 가동코일 모터, 그리고 수평이송부 운동특성을 함께 고려하면, Fig. 9의 전체 시스템 운동에 관한 블록선도를 얻을 수 있다.

3.4 실험적 결과와의 비교

위에서 얻어진 모델의 정확도를 검증하기 위하여 다음과 같은 실험들이 수행되었다.

- **실험 1:** 가동코일 모터를 Swept Sine으로 가진시키고 이 때 발생하는 연성 빔 끝 점의 가속도 주파수 응답을 구한다. 여기서, 수평 이송부는 고정되어 있다.
- **실험 2:** 실험 1과 동일조건으로 연성 빔을 가진시키고, 연성 빔 지지부 근처에 설치된 스트레인 게이지 출력신호에 대한 주파수 응답을 구한다.
- **실험 3:** 유연 빔을 실험장치에서 제거한 후, DC 모터로 수평 이송부를 가진 시킨다. 이 때, Optical Encoder에서 출력되는 신호에 대한 주파수 응답을 구한다.
- **실험 4:** 연성 빔이 장착된 상태에서 DC 모터를 가진시키고, Accelerometer 및 Optical Encoder에서 출력되는 신호에 대한 주파수 응답을 얻는다.

실험 1과 2의 결과는 연성 빔의 동적 특성을 파악하는데 사용되며, 실험 3은 DC 모터와 수평 이송부 간의 동적 특성을, 그리고 실험 4는 수평 이송부에 의하여 연성 빔에 미치는 간섭(Coupling) 효과를 보기 위함이다. 주파수 응답 해석기로는 B&K사의 주파수 응답 해석기 (Signal Analyzer: Model # 2035)가 사용되었다.

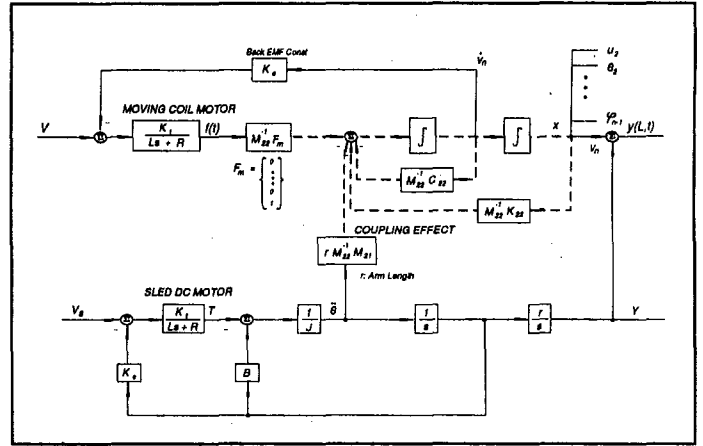


Fig. 9 Block Diagram for Total System Motion

Fig. 10 - Fig. 14에 실험 데이터들이 정리되어 있다. 이들 실험에서 유연 빔 끝 단에 매달린 집중 질량은 115.48 g 이다. 또한, 이 그림들에서 점선으로 표시된 주파수 응답은 Euler-Bernoulli Beam Model에 근거한 해석적 결과를 나타내며, 실선으로 표현된 주파수 응답은 FEM해석에 의한 주파수 응답을 보여주고 있다. Euler-Bernoulli Beam Model은 3차 모드까지만 고려된 결과이며, FEM 해석에서는 유연 빔을 4개로 균등히 분할하여 얻은 결과를 나타내고 있다. 이 그림들에 표시되지는 않았지만, 집중상수 해석법(Lumped Parameter Method)에 의한 해석 결과는 Euler-Bernoulli Beam Model에 대한 결과와 일치하게 나타났다.

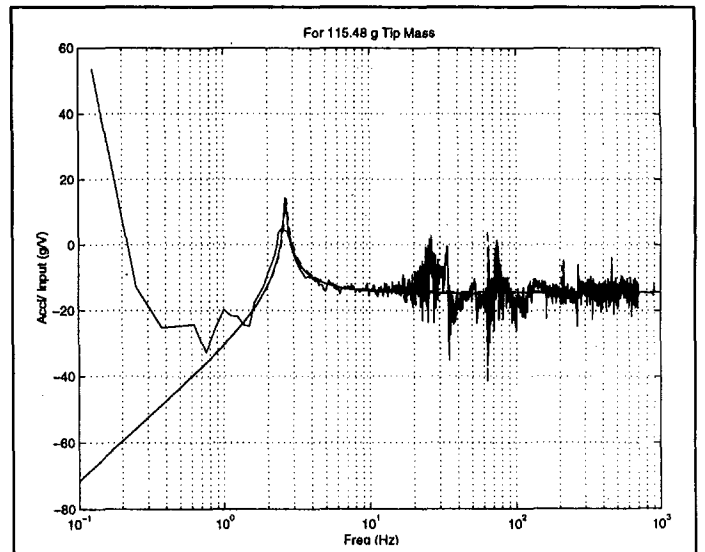


Fig. 10 Freq Response of End Point Acceleration (Exp #1)

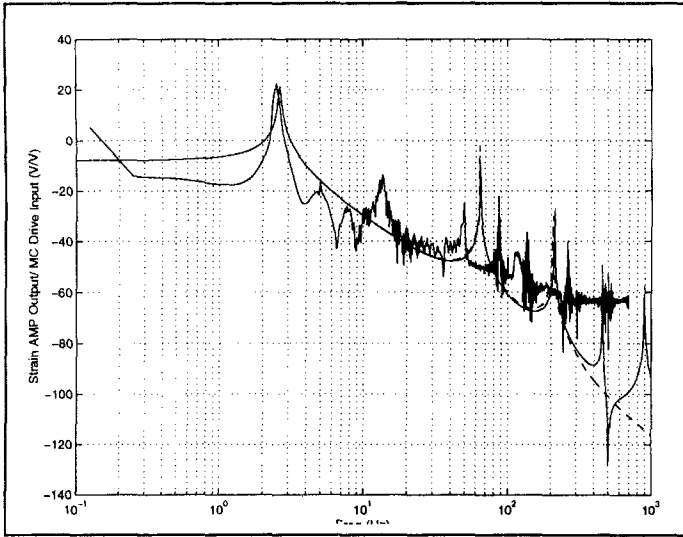


Fig. 11 Freq Response of Strain at the Clamping Pt (Exp #2)

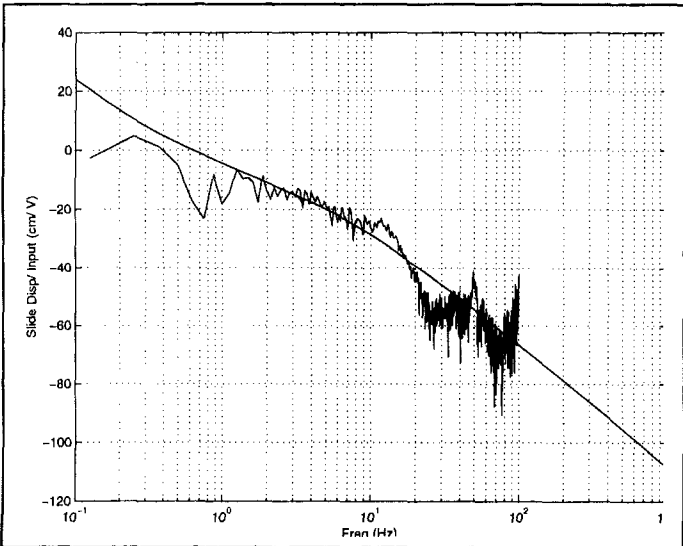


Fig. 12 Freq Response of Slide Base w/o Flexible Beam(Exp #3)

즉, Euler-Bernoulli Beam Model에서 2차 이상의 모드를 제거한 주파수 응답은 바로 집중상수 해석법에 의한 결과와 동일하게 나타났다. 또한, 이 그림들에서 2 Hz이하에서 나타나는 실험적 주파수 응답은 주파수 응답 해석기에 의한 오류라 생각되어 무시하기로 한다.

Fig. 10과 11은 Swept Sinewave가 가동코일 모터를 가진 시킬 때, 유연 빔 끝 단의 가속도를 측정하여 얻어진 주파수 응답과 유연 빔 지지부에서 스트레인 변화에 따른 스트레인 앰프 출력신호의 주파수 응답을 해석적인 결과와 함께 그린 것이다. 전체적으로 제 1차 공진 주파수는 실험적 결과와 거의 일치하고 있지만, 2차 이상의 고차 모

드는 많은 편차를 보여주고 있다. 또한, FEM에 의한 해석적 모델이 Euler-Bernoulli Beam Model 보다는 실험 결과와 조금 더 일치하는 것을 볼 수 있다.

DC 모터에 의하여 구동되는 수평 이송부의 동적 특성을 실험적으로 결정하기 위하여 Fig. 1의 구조를 갖는 실험 장치에서 유연 빔이 제거되었다. 이와 같이 함으로서, DC 모터는 수평 이송부만을 구동하게 된다. 따라서, 유연 빔과 수평 이송부 간의 간섭 효과를 배제할 수 있게 된다. Fig. 12는 DC 모터 구동전압에 대한 수평 이송부의 변위에 관한 주파수 응답을 의미한다. 또한, Fig. 13과 14는 실험 4에 의한 결과를 보여주고 있다. 즉, 유연 빔이 부착된 상태에서 DC 모터 구동에 의한 수평 이송부의 변위, 그리고 유연 빔 끝점의 가속도에 관한 주파수 응답을 나타낸다. Fig. 12와 Fig. 13을 비교하면, 서로 다른 조건에서 측정된 두 실험적 주파수 응답이 거의 동일함을 알 수 있다. 이것은 수평 이송부의 운동특성이 유연 빔의 운동 특성에 의하여 영향을 받지 않는다는 것을 의미한다. 또한, Fig. 14는 수평 이송부를 구동하는 DC 모터의 입력전압에 대한 유연 빔의 가속도에 관한 주파수 응답을 보여준다. Fig. 10과 이 그림을 비교하면, 가동 코일 모터 구동에 의한 유연 빔의 끝 점의 운동 특성 효과가 DC 모터에 의한 효과보다 대략 10배 정도, 그 효과 (Sensitivity)가 큼을 알 수 있다.

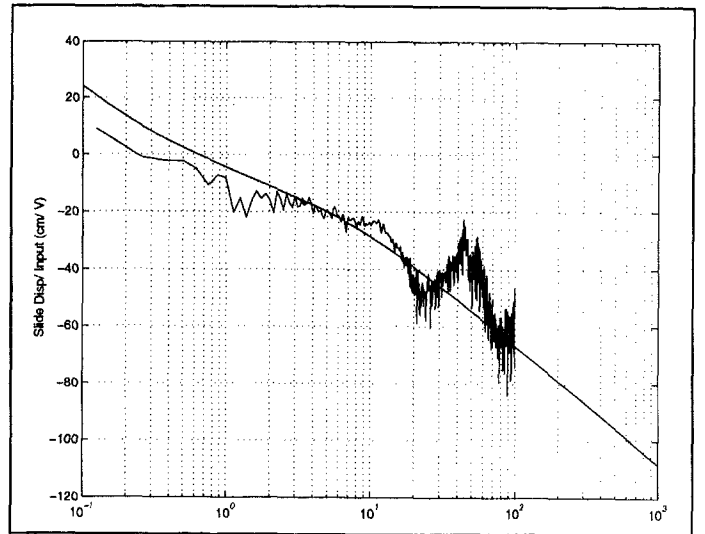


Fig. 13 Freq Response of Slide Base with Flex Beam(Exp #4)

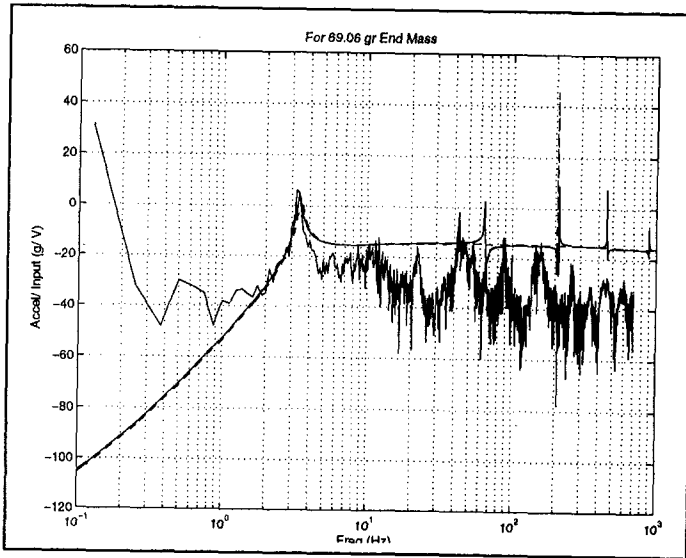


Fig. 14 Freq Response of End Point Acceleration (Exp #4)

4. 결론

본 논문을 통하여 제어공학 분야의 실험/실습장비로서 사용될 수 있는 가동코일과 DC 모터로 구동되는 위치 제어시스템이 설계/제작되었다. 또한, 이 시스템의 동적 운동 특성이 실험적으로 조사되었으며, 이를 바탕으로 해석적인 모델의 검증이 수행되었다. 해석적인 모델은 집중 상수 해석법 (Lumped Parameter Method)/ Euler-Bernoulli Beam Theory/ FEM 방법에 근거하여 각각 유도 되었으며, 실험적인 결과와 비교/분석 되어 졌다. FEM 방법에 의한 해석적 모델이 다른 모델보다 더 실험적인 결과와 일치되었지만, 그 차이는 크게 구분되지 않았다. 따라서, 모델의 구조가 단순하며, 저 차수의 모델을 제공하는 집중 상수 해석법 (Lumped Parameter Method)에 의한 해석적 모델을 기준 모델로 정하였다.

3.5 모델링의 평가

3가지의 해석적 모델 (Lumped Parameter Method, Euler-Bernoulli Beam Theory/ FEM) 중에서 FEM에 근거한 해석적 모델이 실험 결과와 보다 더 근접한 것으로 나타났다. 그러나, FEM Model과 타 모델간의 차이는 미미하다. 따라서, 앞으로 다루어질 제어계 설계 문제에 사용될 공칭 모델은 (Nominal Model) 모델의 구조/ 차수등이 타 모델에 비하여 비교적 단순한, 집중상수 해석법에 의한 모델이 사용될 것이다. Lumped Parameter Model에 대한 SIMULINK Model이 Fig. 15에 표시되어 있다.

참고 문헌

- [1] H. J. Dunn, "Experimental Results of Active Control on a Large Structure to Suppress Vibration", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Vol. 2, pp. 779 - 791, 1991
- [2] M. Steinbuch and et al, "Robust Control of a Compact Disc Player", Proc. of Decision and Control, pp. 2596 - 2600, 1992
- [3] M. Ogawa and Furukawa, "Robust Servo System of Optical Disk Drive", Japanese Journal of Applied Physics, vol. 31, pp. 643 - 647, 1992
- [4] N. A. Kheir, and et al, "Control Systems Engineering Education", Automatica, No. 2 pp. 147-166, 1996
- [5] S. Yurkovitch, and et al, "Control System Testbeds and Toys: Serendipitous or Suspect", Proc. of ACC, pp. 2692 - 2696, 1997
- [6] R. Isermann, "Mechatronic Systems - A Challenge for Control Engineering", Proc. of ACC, pp. 2617 - 2632, 1997
- [7] Analog Devices, "ADX05 Single Chip Accelerometer Data Sheet"
- [8] L. Meirovitch, "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill, 1986
- [9] P. B. Usoro, R. Nardira and S. S. Mahil, "A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 198-205, 1986

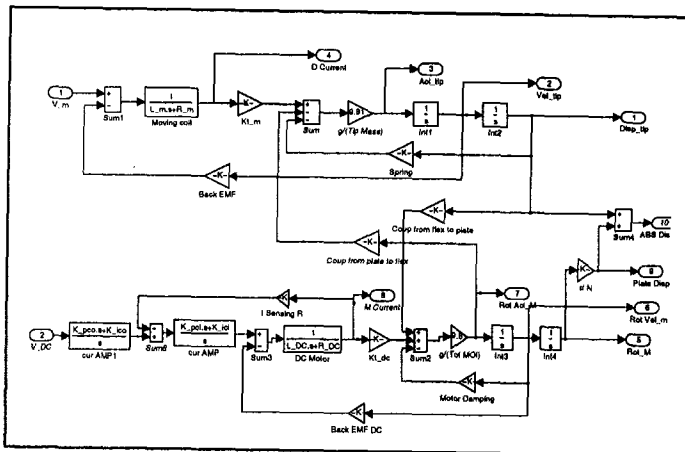


Fig. 15 SIMULINK Model for Experimental Rig