

# 전달강성계수법에 의한 직선형 구조물의 시간 이력응답 해석알고리즘에 관한 연구

## A Study on the Anlysis Algorithm of Time Historical Response of Straight-line Structure by the Transfer Stiffness Coefficient Method

문덕홍 · 강현석 · 최명수

D. H. Moon, H. S. Kang and M. S. Choi

**Key Words** : Time Historical Response Analysis(시간이력응답해석), Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Transfer Matirix Method(전달매트릭스법)

**Abstract** : This paper describes formulation for algorithm of time historical response analysis of vibration for straight-line structure. This method is derived from a combination of the transfer stiffness coefficient method and the Newmark method. And this present method improves the computational accuracy of the transient vibration response analysis remarkably owing to several advantages of the transfer stiffness coefficient method. We regarded the structure as a lumped mass system here. The analysis algorithm for the time historical response was formulated for the straight-line structure containing crooked, tree type system. The validity of the present method compared with the transfer matrix method and the Finite Element Method for transient vibration analysis is demonstrated through the numerical computations.

### 1. 서 론

비상시에 기계구조물의 안정성을 확보하는 것은 매우 중요한 문제이다. 이 중에서도 원자력 발전소와 화학 플랜트 등의 기기 및 배관계의 지진 시의 응답<sup>1)</sup>, 항공기 엔진 블레이드의 파손 시의 응답<sup>2)</sup> 등을 파악하는 것은 대형사고의 예측과 방지의 측면에서 대단히 중요시되고 있는 실정이다.

이런 연구의 대부분은 실험과 시간응답 시뮬레이션 등을 병행하고 있지만, 대상으로 하는 시스템이 주로 대규모이기 때문에 주로 대형의 계산기에 의존하고 있는 것이 현실이다.

최근에는 개인용 컴퓨터(PC ; Personal Computer)의 급격한 발달에 따라 대형계산기에 의존했던 대규모 구조물의 계산도 PC에서 가능하게 되었다. 그런데 이런 대규모의 계산수행에 PC를 사용함에 있어 문제점으로 되는 것이 기억용량과 계산시

간이다.

한편, 대상계를 이산화한 후, 시간 간격마다의 동적 응답계산에 각종 축차적분법과 전달 매트릭스법(TMM ; Transfer Matrix Method)을 이용하는 기법이 보고되고 있다<sup>2)</sup>.

저자들은 전달강성계수법(TSCM ; Transfer Stiffness Coefficient Method)이라는 새로운 진동해석 알고리즘을 제안하여 여러 가지 구조물의 자유진동 및 강제진동 해석에 적용하여 그 유용성을 제시한 바 있다<sup>3) 6)</sup>.

본 연구는 굴곡부 및 분기계를 포함하는 직선형 구조물의 시간이력응답해석 알고리즘을 정식화하기 위한 것이다. 구조물의 진동해석기법으로는 전달강성계수법을 사용하고, 시간이력응답을 구하기 위해 사용한 축차적분법으로는 Newmark 법을 도입하여 굴곡부 및 분기계를 포함하는 직선형구조물의 시간이력응답의 해석 알고리즘을 정식화하고, 간단한 구조물에 대한 수치실험을 통해서 본 해석 기법과 전달매트릭스법, 유한요소법(FEM ; Finite element method)의 결과와 비교하여, 본 해석기법의 유용성을 확인하고자 한다.

접수일 : 1999년 2월 13일

문덕홍 : 부경대학교 제어기계공학과

강현석 : 부경대학교 대학원

최명수 : 부경대학교 산학협동연구센터

## 2. 전달강성계수법에 의한 해석

### 2.1 해석대상의 모델링

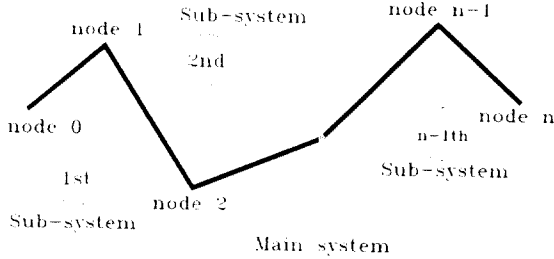


Fig. 1 Analytical model

Fig. 1은 화학플랜트 등의 배관계 등에서 자주 보여지는 구조물으로서, 본 연구의 해석 모델을 나타낸다. 계내에 굴곡부와 분기계를 가지고 있고, 하나의 주계(Main system)에 여러개의 분기계(Sub-system) 또는 스프링과 감쇠기로 이루어지는 기초지지 요소로 구성되어 있다.

그리고 임의의 절점에 조화 성분의 강제력이 작용한다고 가정한다.

해석 대상계는 임의의 강제력이 가해지는 부분, 기초지지 요소가 존재하는 부분, 주계와 분기계가 결합하는 부분은 반드시 절점이 되도록 분할하여 임의의 절점에 강제력이 작용하는 것으로 모델링한다. 편의상 계의 좌단을 절점 0, 계의 우단을 절점 n으로 한다.

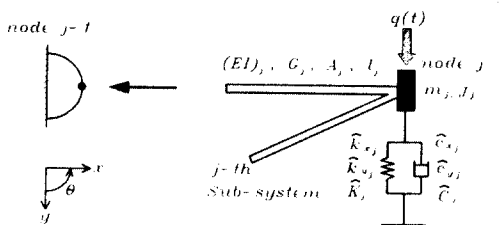


Fig. 2 Fundamental element of analytical model

Fig. 2는 Fig. 1 해석모델의 주계의 기본요소를 나타내고 있다. 결국 해석모델의 전체계는 이런 기본요소들의 직렬결합으로 구성되어 있다. Fig. 2에서  $q(t)$ 는 강제력,  $E_j, G_j, I_j, l_j, A_j$ 는  $j$ 번째 요소의 종탄성계수, 횡탄성계수, 단면2차 모멘트, 길이 및 면적을 나타내고,  $m_j, J_j$ 는  $j$ 번째 집중

질량의 질량, 관성모멘트이고,  $\hat{k}_{xj}, \hat{k}_{yj}, \hat{K}_j, \hat{C}_{xj}, \hat{C}_{yj}, \hat{C}_j$ 는 기초지지요소의 종방향과 횡방향의 전단 스프링상수 및 회전 스프링상수와 종방향과 횡방향의 병진감쇠계수, 회전감쇠계수를 나타낸다.

본 연구에서 사용하고 있는 기호의 의미는 다음과 같다.

- (1) 상기호 [ ^ ], [ ' ] 및 [ ~ ]가 붙은 기호는 각각 기초지지 요소, 굴곡부 및 분기계에 대한 물리량을 나타낸다.
- (2) 상기호 [ - ]가 붙은 기호는 절점 좌측의 물리량을 나타내고, 붙어 있지 않은 기호는 절점 우측의 물리량을 나타낸다.
- (3) 하첨자 [ j ]는 절점 j 또는 j번째 부재에 관한 물리량을 나타낸다.

### 2.2 축차적분법

본 논문에서 적용한 축차적분법으로는 Newmark 법을 사용하였고, 임의의 시간  $t_k$ 에서의 가속도 벡터  $\ddot{\mathbf{d}}_j(t_k)$  및 속도 벡터  $\dot{\mathbf{d}}_j(t_k)$ 는 다음과 같다<sup>7)</sup>.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}_j(t_k) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{d}_j(t_k) - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{d}_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) \\ \dot{\mathbf{d}}_j(t_k) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{d}_j(t_k) - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{d}_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) \\ \ddot{\mathbf{d}}_j(t_k) &= {}^t[ \ddot{x}(t_k) \quad \ddot{y}(t_k) \quad \ddot{\theta}(t_k) ]_j \\ \dot{\mathbf{d}}_j(t_k) &= {}^t[ \dot{x}(t_k) \quad \dot{y}(t_k) \quad \dot{\theta}(t_k) ]_j \\ \mathbf{d}_j(t_k) &= {}^t[ x(t_k) \quad y(t_k) \quad \theta(t_k) ]_j \end{aligned} \tag{1}$$

### 2.3 강성계수 및 보정벡터의 전달식

임의의 시간  $t_k$ 에서의 절점 j의 변위벡터 및 힘 벡터 사이의 관계는 다음식으로 정의한다.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{f}}_j(t_k) &= \overline{\mathbf{S}}_j \mathbf{d}_j(t_k) + \overline{\mathbf{e}}_j(t_k) \\ \mathbf{f}_j(t_k) &= \mathbf{S}_j \mathbf{d}_j(t_k) + \mathbf{e}_j(t_k) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서  $\overline{\mathbf{S}}_j, \mathbf{S}_j$  및  $\overline{\mathbf{e}}_j(t_k), \mathbf{e}_j(t_k)$ 는 시간  $t_k$

에서의 강성계수 매트릭스 및 힘 보정벡터를 나타낸다.

절점  $j$ 에서 매트릭스 형태의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{d}}_j(t_k) + \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{d}}_j(t_k) + \mathbf{K}_j \mathbf{d}_j(t_k) + \overline{\mathbf{f}}_j(t_k) - \mathbf{f}_j(t_k) = \mathbf{q}_j(t_k) \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j &= \text{diag} [ m \quad m \quad J ]_j \\ \mathbf{C}_j &= \text{diag} [ \hat{c}_x \quad \hat{c}_y \quad \hat{C} ]_j \\ \mathbf{K}_j &= \text{diag} [ \hat{k}_x \quad \hat{k}_y \quad \hat{K} ]_j \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{q}_j(t_k) = [ q_x(t_k) \quad q_y(t_k) \quad q_\theta(t_k) ]_j$$

식(1)과 식(3)으로부터,

$$\mathbf{P}_j \mathbf{d}_j(t_k) = \mathbf{Q}_j(t_k) + \mathbf{f}_j(t_k) - \overline{\mathbf{f}}_j(t_k) \quad (5)$$

여기서

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_j + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}}_j + \hat{\mathbf{K}}_j \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_j(t_k) = \mathbf{q}_j(t_k) - \mathbf{M}_j \mathbf{H} \mathbf{a}_j(t_k) - \hat{\mathbf{C}}_j \mathbf{H} \mathbf{v}_j(t_k)$$

식(6)에서  $\mathbf{H} \mathbf{a}_j(t_k)$  및  $\mathbf{H} \mathbf{v}_j(t_k)$ 는 시간  $t_{k-1}$ 에서의 변위, 속도, 가속도로 결정되는 벡터이고, 시간  $t_k$ 에서는 이미 알고있는 양이다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{a}_j(t_k) &= -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot \{ \mathbf{d}_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) \} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{v}_j(t_k) &= \dot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) + \Delta t \cdot \{ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \gamma \mathbf{H} \mathbf{a}_j(t_k) \} \end{aligned}$$

절점  $j-1$ 의 좌측에서 절점  $j$ 까지의 힘과 변위의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{f}}_j(t_k) \\ \mathbf{f}_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \mathbf{d}_j(t_k) \\ \mathbf{d}_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \mathbf{F}_j, & \mathbf{B}_j &= -\mathbf{F}_j \mathbf{L}_j^t \\ \mathbf{C}_j &= \mathbf{L}_j \mathbf{F}_j, & \mathbf{D}_j &= -\mathbf{L}_j \mathbf{F}_j \mathbf{L}_j^t \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{xGA} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}_j^{-1} \quad (9)$$

$$\mathbf{L}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix}_j$$

식(9)에서  $x$ 는 단면형상계수를 나타낸다.

식(2)와 식(8)의 관계로부터 절점  $j-1$ 의 우측에서 절점  $j$ 의 좌측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 필드 전달식을 구한다.

$$\overline{\mathbf{S}}_j = \mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{V}_j$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}}_j(t_k) &= -\mathbf{B}_j \mathbf{G}_j^{-1} \mathbf{e}_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_j &= \mathbf{S}_{j-1} - \mathbf{D}_j \\ \mathbf{V}_j &= \mathbf{G}_j^{-1} \mathbf{C}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

절점  $j$ 의 좌측에서 절점  $j$ 의 우측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 포인트 전달식을 구하기 위해 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j &= \overline{\mathbf{S}}_j + \mathbf{P}_j \\ \mathbf{e}_j(t_k) &= \overline{\mathbf{e}}_j(t_k) - \mathbf{Q}_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

계산량을 줄이기 위하여 필드 전달식과 포인트 전달식을 통합하면, 필드·포인트 전달식은 식(10)과 식(12)의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j &= \mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{V}_j + \mathbf{P}_j \\ \mathbf{e}_j(t_k) &= -\mathbf{B}_j \mathbf{G}_j^{-1} \mathbf{e}_{j-1}(t_k) - \mathbf{Q}_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

강성계수 매트릭스 및 보정 벡터의 식은 점화식의 형태로 정리되어 있기 때문에, 계산을 시작하는 절점 0에서의  $S_0$ 와  $e_0(t_k)$ 를 구해야 한다.

Fig. 1에서와 같이 계의 좌단의 경계조건 ( $\bar{f}_0 = 0$ )과 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$\begin{aligned} S_0 &= P_0 \\ e_0(t_k) &= -Q_0(t_k) \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로 식(13)와 식(14)로부터 계의 좌단에서 우단까지의 강성계수와 보정벡터를 연속적으로 계산할 수 있다.

### 2.4 굴곡부 및 분기계의 취급

Fig. 3 은 굴곡부 및 분기계가 있을 경우의 좌표변환관계를 나타낸것이다.

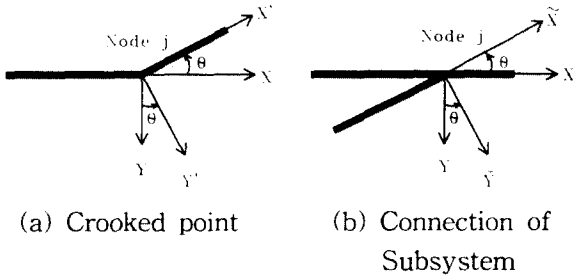


Fig. 3 Coordinate transformation at node  $j$

Fig. 3(a)와 같이 굴곡부가 있을 경우 좌표변환 매트릭스  $R_j$ 를 사용하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} d_j'(t_k) &= R_j d_j(t_k) \\ f_j'(t_k) &= R_j f_j(t_k) \end{aligned} \quad (15)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j$$

식(15)와 전달강성계수법의 기본식인 식(2)의 관계로부터 다음의 식을 구한다.

$$\begin{aligned} S_j' &= R_j S_j R_j^t \\ e_j'(t_k) &= R_j e_j(t_k) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 상첨자  $t$ 는 전치(Transpose)를 의미한다.

Fig. 3(b)와 같이 분기계가 있는 경우, 분기계의 좌단으로부터 우단, 즉 주계와 결합하는 단으로 2.3절의 전달계산을 행하면 우단(주계의 절점  $j$ )에서는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(t_k) &= \tilde{S}_j d_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k) \\ &= \tilde{P}_j d_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\tilde{f}_j(t_k)$ 는 분기계 우단의 힘벡터이고 주계가 분기계로부터 받는 반력벡터로 볼 수 있고, 방향은  $\bar{f}_j(t_k)$ 와 동일하다. 따라서 분기계가 존재하는 절점에서 식(5)는 다음식과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned} (P_j + \tilde{P}_j) d_j(t_k) &= \\ Q_j(t_k) - \tilde{e}_j(t_k) + f_j(t_k) - \bar{f}_j(t_k) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j &= R_j P_j R_j^t \\ \tilde{e}_j(t_k) &= R_j e_j(t_k) \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)에서  $(P_j + \tilde{P}_j)$  및  $\{\tilde{e}_j(t_k) - Q_j(t_k)\}$ 를 새로운  $P_j$  및  $Q_j(t_k)$ 로 정의하면 분기계가 없는 경우와 동일하게 계산을 할 수 있다.

### 2.5 상태량 벡터의 전달

계의 우단의 경계조건( $f_n(t_k) = 0$ )과 식(2)로부터 우단의 변위벡터는 다음과 같다.

$$d_n(t_k) = -S_n^{-1} e_n(t_k) \quad (20)$$

식(20)으로부터 구한  $d_n(t_k)$ 과 식(2), 식(5), 식(8)로부터 계의 우단에서 좌단까지의 상태벡터를 다음식으로부터 연속적으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{j-1}(t_k) &= V_j d_j(t_k) - G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (21)$$

## 3. 수치계산 결과

본 장에서는 2장에서 정식화한 알고리즘을 토대로 하여 실제 수치계산 모델에 적용한다. 3종류의

모델에 대해 계산하였고, 각 모델은 절점당 10개의 집중질량으로 분할하였다. Newmark 법에 의한 차분상수는 공통으로  $\beta=1/4$ ,  $\gamma=1/2$ 을 대입하여 사용하였다.

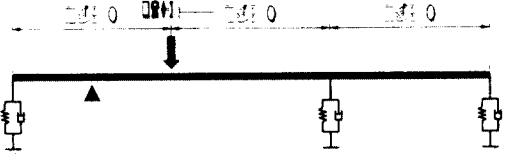


Fig. 4 Numerical model I

Fig. 4는 수치계산 모델 I으로서 총길이 1.5m의 구조물에 그림과 같이 스프링과 감쇠기로 이루어진 기초지지요소가 존재하고, 좌단으로부터 0.5m인 지점에 조화 강제력  $q_y(t) = q \cos \omega t$  ( $q = 10$ ,  $\omega/2\pi = 20$  [Hz]) 이 작용하고 있는 구조물이다.

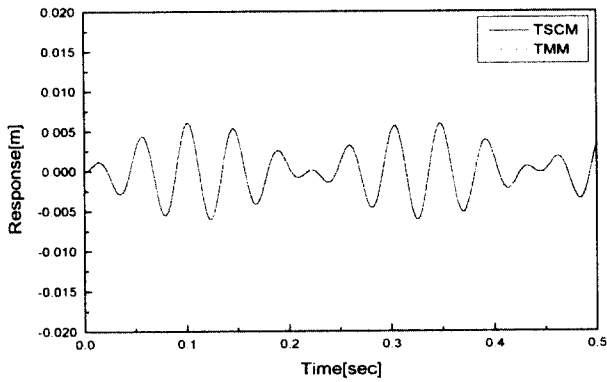


Fig. 5 Time response of model 1(NDT : 100)

Fig. 5는 모델 I에서 기초지지요소는 그림과 같이 전단스프링 ( $k_y = 10^5$  [N/m],  $c = 0$  [Ns/m])만으로 구성 되어 있고, Fig. 4에서 좌단으로부터 0.25m인 지점인 ▲ 표시가 되어 있는 부분에서의 y축 방향의 변위응답을 구하였고, 1주기당의 시간분할수(NDT ; Number of division time)를 100개로 등분할한 경우의 응답을 TSCM과 TMM의 결과를 비교한 것이다. 두 해석기법의 결과는 완전히 일치하고 있다.

Fig. 6은 Fig. 5의 경우와 동일한 조건으로 하고, 1주기당의 NDT를 300등분했을 경우의 TSCM과 TMM의 결과를 비교하고 있다. TSCM의 결과는 NDT 100인 경우와 동일한 결과를 보이지만, TMM의 결과는 0.1초를 지나면서 계산이 불안정해지기 시작하면서, 이후에는 정확한 계산을 하지 못하는 결과를 나타내고 있다.

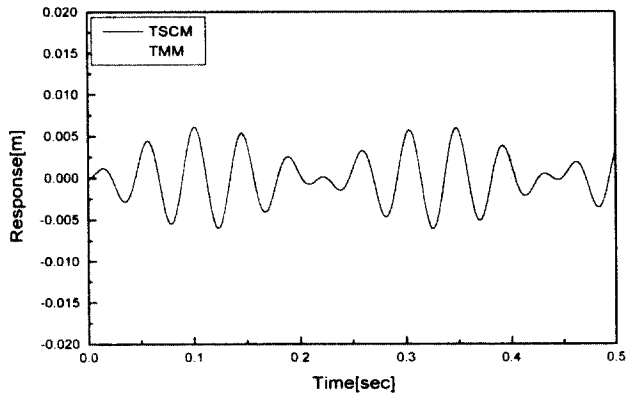


Fig. 6 Time response of model 1(NDT : 300)

Fig. 7은 수치계산에 사용된 두 번째 모델로서 굴곡부가 있는 모델이다.

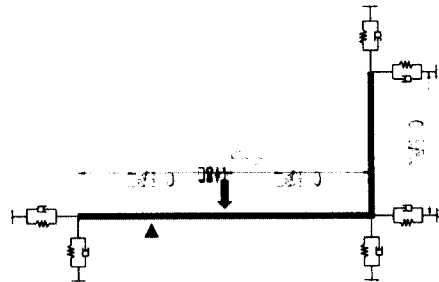


Fig. 7 Numerical model II

Fig. 8은 기초지지요소는 Fig. 7과 같이 x축 방향과 y축 방향의 전단스프링 ( $k_x = k_y = 10^5$  [N/m],  $c = 0$  [Ns/m])만으로 구성되어 있고, 강제력은 모델 I과 동일한 조건으로 해서 1주기당의 시간분할수를 300등분으로 나누었을 경우의 Fig. 7과 같이 좌단으로부터 0.25m 지점인 ▲ 표시가 있는 부분에서의 y축 방향의 변위응답을 TSCM과 TMM의 결과를 비교한 그림으로, TSCM의 경

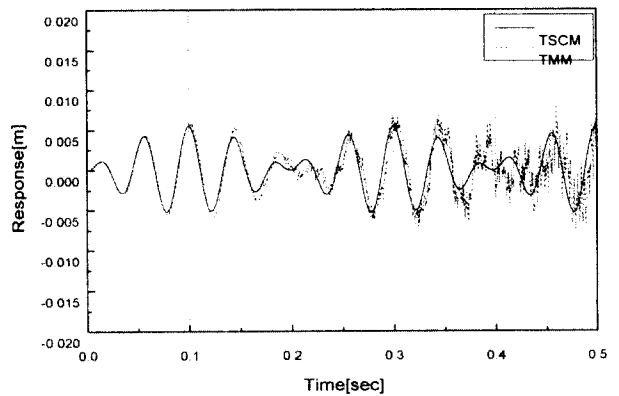


Fig. 8 Time response of model II(NDT : 300)

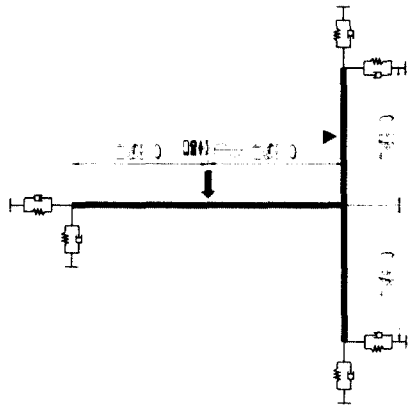


Fig. 9 Numerical model III

우는 원활한 계산을 수행하고 있지만, TMM의 경우는 0.1초를 지나면서 계산이 불안정해지는 결과를 보이고 있다.

Fig. 9는 수치계산 모델 III으로서 분기계가 존재하는 구조물이다.

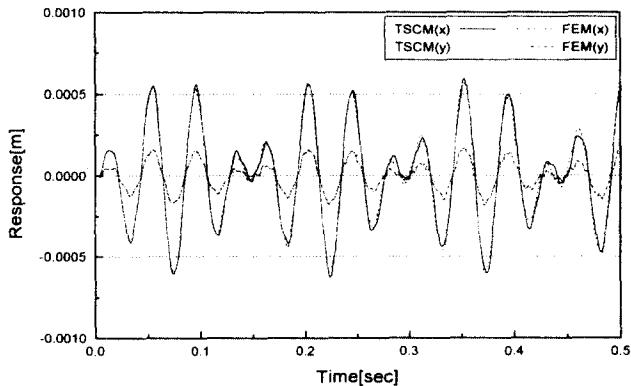


Fig. 10 Time response of model III(NDT : 100)

Fig. 10은 Fig. 9의 모델 III에 대하여 본 해석기법과 FEM의 결과를 비교한 것이다. 강제력은 모델 I, II와 동일한 조건을 사용하였고, 기초지지요소는 Fig. 9와 같이  $x$ 축 방향과  $y$ 축 방향의 전단 스프링( $k_x = k_y = 10^5$  [N/m],  $c = 0$  [Ns/m])만으로 구성되어 있다. 우측 상단으로부터 0.25m인  $\blacktriangleright$  표시가 있는 지점에서  $x$ 축과  $y$ 축 방향의 변위 응답을 두 기법으로 구한 결과로서, 두 기법이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

이상의 결과로부터 보다 정확한 직선형 구조물의 시간이력응답을 구하기 위해 시간간격을 작게 설정하더라도, 본 해석기법은 안정된 응답을 구할 수 있었던 반면에, TMM의 결과는 시간간격이 작

으면 수치계산의 응답결과가 불안정해짐을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구는 PC에 적합한 직선형 구조물의 시간 이력응답 해석기법을 제시하였다.

이 기법은 전달강성계수법에 Newmark 법을 도입하여 정식화한 해석알고리즘이다.

간단한 굴곡부와 분기계가 있는 직선형 구조물에 대한 수치실험을 통해서 시간이력응답 계산을 수행한 결과, TMM의 결과는 계 내부에 중간지지 가 있거나, 엄밀한 해를 구하기 위해 시간간격을 작게 설정하여 계산을 수행했을 경우에 정상적인 계산을 수행할 수 없었던 반면에, 본 해석기법은 안정된 계산을 수행하여 유용한 결과를 얻을 수 있었다.

#### 참고문헌

1. 浪田方郎, 川畑淳一, 市橋一郎, 福田俊彦, “彈塑性ダンパ支持配管系の耐震設計手法の開発”, 日本機械學會論文集(C編), 61卷, 590号, pp. 3881~3888, 1995
2. 林正生, 山内進吾, 大鍋壽一, 船渡川治, “ブレード破損時の回轉軸系の非線型過渡應答解析”, 日本機械學會論文集(C編), 59卷, 557号, pp. 85~92, 1993
3. 문덕홍, 최명수, 홍승수, “강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 진동해석 기법”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 316~321, 1996
4. 문덕홍, 최명수, “강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 강제진동 해석”, 한국박용기관학회 추계학술강연회 초록집, pp. 128~234, 1996
5. 문덕홍외 3인, “강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 169~175, 1997
6. 문덕홍외 3인, “동강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석”, 대한기계학회 부산지부 춘계학술대회 논문집, pp. 242~246, 1997
7. Singiresu S. Rao, “Mechanical Vibrations”, Addison-Wesley 3rd Ed., pp. 712~713