

디지털 영상복원을 위한 SMOSLG 알고리즘

송민구[†] · 엄준근^{††}

요약

OSL 알고리즘은 복잡한 초월함수 형태의 페널티 함수가 주어지더라도 쉽게 반복 알고리즘이 유도되는 장점을 갖지만, 평활상수의 수렴영역이 제한적인 단점이 있다. 우리는 이 문제를 해결하기 위해서 MPMEG 알고리즘을 제안한 바 있다. 그러나 이 알고리즘은 평활상수의 수렴영역은 확장되었지만 페널티 로그 우도를 증가시키는 수렴속도가 OSL 알고리즘보다 느리다는 문제점을 내포하고 있다. 따라서 본 연구에서는 평활상수의 수렴영역의 확장뿐만 아니라 수렴의 속도도 빠른 SMOSLG 디지털 영상복원 알고리즘을 제안하였고, 영상실험의 결과 제안된 알고리즘이 평활상수의 수렴영역 확장 및 수렴속도가 향상됨을 확인 할 수 있었다.

SMOSLG Algorithm for Digital Image Restoration

Min-Koo Song[†] · Joon-Keun Yum^{††}

ABSTRACT

OSL algorithm has an advantage that repeated algorithm is easily derived, even though penalty function which has a complicated transcendental function. In order to solve this problem, we suggested MPMEG algorithm. However, though this algorithm extend convergence rate of smoothing constant, it include the problem that is not faster than OSL algorithm in the convergence rate increasing penalized log-likelihood. Accordingly, in this paper, we will suggest SMOSLG digital image restoration algorithm which is fast in the convergence rate as well as extend convergence region of smoothing constant. And also we will study the usefulness of algorithm suggested through digital image simulation.

1. 서론

일반적으로 디지털 영상 복원이란 퍼짐 효과와 잡음 효과 등에 의해 오염된 불완전한 영상을 기초로 진영상을 추정하는 것이다. 즉 N 개의 독립 관측 화소의 집합인 관측 영상 y 를 사용하여 P 개의 화소를 갖는 진영상 θ 를 추정하는 것이라 볼 수 있다. 하지만 이 경우의 문제점은 첫째, 관측된 영상과 진영상의 크기가 거의 비슷하다는 것이며, 둘째 진영상의 화소 P 는 진영상의 추정치를 동시에 계산할 수 없을 정도로 매우 크다는 것이다.

첫 번째 조건으로 인하여 추정영상의 분산이 크기 때문에 다소의 잡음이 포함된 관측영상에 대한 복원영상은 매우 불안정한 상태를 나타내게 된다. 이 점을 해결하기 위해서 대수우도에 페널티를 도입한 페널티 대수우도(penalized log-likelihood) 방정식

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{L(\theta) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (1.1)$$

의 최대페널티 대수우도 추정량(maximum penalized log-likelihood estimator)을 사용할 수 있을 것이다. 단, $L(\theta) = \ln g(y|\theta)$ 이고, $g(y|\theta)$ 는 y 의 밀도함수이며, $J(\theta)$ 는 영상의 경계를 보존하면서 잡음을 평활하도록 고안된 페널티 함수이다. 그리고 상수 $\lambda > 0$ 는 해

[†] 정 회 원 : 동국대학교 통계학과 강사
^{††} 정 회 원 : 동국대학교 통계학과 교수
논문접수 : 1999년 8월 12일, 심사완료 : 1999년 11월 8일

상도와 잡음의 정도에 따라 실험자가 경험적으로 결정하는 값이다.

두 번째 제한은 방정식 (1.1)로부터 해를 직접 계산할 수 없게 한다. 그 주된 이유는 해를 얻기 위해서는 $P \times P$ 의 크기를 갖는 역행렬 계산이 요구되기 때문이다. 이 문제점에 대한 대표적 해결방법으로 Geman과 Geman(1984)의 깁스샘플링(gibbs sampling)방법이나, Besag(1986)의 ICM(iterative coding method), 그리고 Abdalla 와 Kay(1990)의 ICM과 EM 알고리즘을 결합한 방법 등이 있다.

한편, 모수에 관한 사전정보(prior information)를 알고 있는 영상복원인 경우에는, 대수우도에 페널티를 부여하는 PEM(penalized EM)알고리즘을 사용하면 복원영상의 화질과 수렴속도를 향상시킬 수 있을 것이다. 그러나 PEM 알고리즘은 페널티 함수가 θ 에 대해서 전개되지 않는 초월함수 형태일 경우에는 사용할 수가 없다. 이것을 해결하기 위해서 Green(1990a)은 PEM 알고리즘의 M-단계에서 근사해를 제공하는 OSL(one-step-late) 알고리즘을 제시하였다. 이 알고리즘의 가장 큰 장점은 페널티 함수의 1차 미분 전개가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 수렴할 때에는 PEM 알고리즘과 같은 정상점(stationary point)에 수렴한다는 것이다. 그러나 PEM 알고리즘이 평활상수 λ 의 크기에 상관없이 수렴하는 반면, OSL 알고리즘은 λ 값의 크기에 민감하게 수렴한다(1990b Green). 이 사실은 오염도가 높은 영상인 경우의 복원에는 비교적 큰 λ 값이 요구되나 수렴영역이 좁기 때문에 폭넓은 λ 값을 부여할 수 없음으로써 OSL 알고리즘을 사용할 수 없음을 의미한다.

한편, Lange(1995)는 M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전개가 극히 어려운 경우와 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여 이를 보완하기 위하여 각 M-단계에서 「뉴턴」 알고리즘의 1단계 추정치를 사용하는 EM 그라디언트 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘은 M-단계를 전개하기가 편리하고, 평가함수의 2차 미분행렬 즉 헤지안(Hessian) 행렬이 대각행렬 이어서 역행렬 계산이 매우 간단하다. 이러한 맥락에서 송 민구(1999)는 OSL 알고리즘의 장점을 그대로 유지하면서 이 알고리즘의 수렴이 λ 에 민감하게 의존하는 단점과 평가함수 전개의 어려움을 동시에 해결하기 위하여, OSL, PEM 및 EM 그라디언트 알고리즘을 이용하여, 수렴 구간이 $\lambda > 0$ 인 변형된 PEM 그라

디언트(Modified PEM Gradient : MPMEG) 알고리즘 제안하였다. 그러나 이 알고리즘은 평활상수의 수렴영역은 확장되었지만 페널티 대수우도의 수렴속도가 OSL 알고리즘보다는 느린 단점을 내포하고 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위한 1차 MOSLG 알고리즘을 제안하고 그 유용성을 모의영상 실험을 통하여 밝힌다. 2장은 EM 알고리즘의 개념 및 종류를 설명하고, 3장은 MPMEG 알고리즘의 구성을 살펴보고, 4장에서는 Convex 및 SMOSLG 알고리즘의 개념 및 이론적인 전개과정을 밝히며, 5장에서는 영상실험을 통하여 MPMEG 알고리즘과 SMOSLG 알고리즘의 수렴속도를 비교하며, 6장에서는 결론을 도출한다.

2. EM 알고리즘 개념 및 종류

EM(expectation maximization)알고리즘은 불완전 자료(incomplete data)에 대하여 최우추정치를 반복적으로 구하는 방법이다(Dempster, Laird 그리고 Rubin,1977). 우리가 표본 자료라고 말하는 불완전 자료 y 는 완전 자료 x 의 관측 가능한 함수로 취급할 수 있다. 따라서 완전자료와 관측된 불완전 자료와의 관계를

$$y_i = y(x) = y(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (2.1)$$

와 같은 함수관계로 나타낼 수 있으며, 이들의 관계를 확률밀도함수를 사용하여 구체적으로 표현하면 다음과 같이

$$g(y|\theta) = \int_{\{x : y(x)=y\}} f(x|\theta) dx. \quad (2.2)$$

나타낼 수 있다. 여기서, $g(y|\theta)$ 는 관측치 y 의 확률 밀도함수이고, $f(x|\theta)$ 는 완전자료 x 의 확률밀도함수이다.

한편 완전자료의 대수우도 $L(\theta) = \ln f(x|\theta)$ 라 하면, 완전자료 x 는 관측할 수 없는 자료이므로 $L(\theta)$ 을 직접 결정하지 못한다. 단지 불완전 자료 y 가 주어졌을 때, 기대값으로 간접평가 할 수 있을 뿐이다. 그래서 다음과 같은 완전자료 대수우도에 대한 조건부 기대값을 평가함수(evaluation function)라 한다.

$$Q(\theta|\theta^n) = E[\ln\{f(x|\theta)\}|y, \theta^n]. \quad (2.3)$$

여기서, θ^n 는 모수 θ 의 n 시점에서의 추정치이고, $\ln f(x|\theta) = l(\theta|x)$ 는 완전자료의 대수우도이다. 일반적으로 EM 알고리즘을 E 단계와 M 단계인 두 단계로 구분해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- E-단계(expectation step)
평가함수 $Q(\theta|\theta^n) = E[\ln\{f(x|\theta)\}|y, \theta^n]$ 를 구한다.
- M-단계(maximization step)
평가함수 $Q(\theta|\theta^n)$ 을 최대화하는 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 구한다.

한편, 평가함수가 모든 θ 의 영역에서 미분 가능하면 $\frac{\partial}{\partial \theta} Q(\theta|\theta^n) = 0$ 으로부터 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 구할 수 있다. 이때 PEM 알고리즘은 식 (1.1)대신 n 번째 스텝에서

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (2.4)$$

을 최대화시키는 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 반복적으로 구함으로써 식 (1.1)의 해에 수렴하게 된다. 그런데 디지털 영상분석에서 자주 페널티 함수의 1차 미분인 $\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta)$ 항이 θ 에 대해 전개되지 않음으로써 PEM 알고리즘의 사용을 불가능하게 한다. 이를 극복하는 대안으로서 Green (1990a)은 방정식 (2.4) 대신

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta^n)\} = 0 \quad (2.5)$$

을 사용하는 OSL 알고리즘을 제안하였다. 위 두식의 차이는 불균일도 페널티의 도함수가 새 대체값 θ 가 아닌 현 상태값(current value) θ^n 에서의 도함수 값이라는 것이다. 그래서 이 알고리즘을 OSL(one-step-late) 알고리즘이라고 부르기로 한 것이다. 이 알고리즘을 구상한 동기는 목적함수가 현 모수추정치에 선형일때 EM 알고리즘은 그래디언트(gradient) 알고리즘과 매우 흡사하다는 것이며, 알고리즘이 느리게 수렴하면, $DJ(\theta^n)$ 와 $DJ(\theta)$ 는 거의 차이가 없다는 것이다. 여기서 D 는 도함수를 의미한다. 또한 $\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta)$ 항의 전개가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 이 알고리즘이 수렴할 때는 PEM 알고리즘과 같은 정상점(stationary point)에 수렴한다는 점이다. 그렇지만 서론에서도 지적하였듯이 OSL 알고리즘은 λ 의 수렴

범위 좁다는 단점을 가진다.

한편, EM알고리즘의 M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전개의 어려움을 해결하기 위한 방법으로 Lange (1995)은 식 (2.4)의 그래디언트 알고리즘을 제안하였다. 그는 EM 알고리즘의 수렴 속도가 거의 선형적이라는 점에 착안하여, 각 M-단계에서 「뉴턴」 알고리즘의 1-단계 추정치를 사용하는 식 (2.6)과 같은

$$\theta^{n+1} = \theta^n - (D^{20}Q(\theta^n|\theta^n))^{-1}D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) \quad (2.6)$$

알고리즘을 구성하였다. 여기서 $D^{ij}f(x|y) = \partial^{i+j} f(x|y) / \partial x^i \partial y^j$ 를 나타낸다. EM 그래디언트 알고리즘의 가장 눈에 띄는 첫째 장점은 M-단계에서 θ^{n+1} 을 구하기 위해 복잡한 $D^{10}Q(\theta^n|\theta^n) = 0$ 을 전개할 필요가 없다는 것이다. 둘째 장점은 대부분의 문제에서 $D^{20}Q(\theta^n|\theta^n)$ 은 역행렬의 계산이 간단한 대각행렬이라는 것이다.

3. 변형된 PEM 그래디언트 알고리즘

송민구(1999)는 OSL 알고리즘의 문제점을 해결하기 위하여 식 (2.4)의 PEM 알고리즘을 Lange(1995)의 그래디언트 형태로 표현한 식 (3.1)과 같은 MPEMG (Modified Penalized EM Gradient)알고리즘을 제안하였다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20}Q_P(\theta^n|\theta^n)\}^{-1}D^{10}Q_P(\theta^n|\theta^n). \quad (3.1)$$

여기서, $L_P(\theta) = L(\theta) - \lambda J(\theta)$ 이고, $Q_P(\theta|\theta^n) = Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)$ 이다. 제안된 (3.1)의 알고리즘을 사용하면 평가함수 Q 와 페널티 함수 J 에서 동시에 기인하는 θ 에 대한 전개상의 어려움을 피할 수 있을 것이다. 그런데 이 알고리즘을 사용하는데는 제한이 따른다. 왜냐하면, 항행렬(directional matrix)

$$D^{20}Q_P(\theta^n|\theta^n) = D^{20}Q(\theta^n|\theta^n) - \lambda D^2J(\theta^n) \quad (3.2)$$

가 대각행렬이 아니기 때문이다. 사실 디지털 영상관련분야의 대부분의 문제에서 식 (3.2)의 우변은 대각행렬로 정의되는 반면 페널티 함수의 2차미분인 $D^2J(\theta^n)$ 은 비 대각행렬로 이루어진다. 따라서 식 (3.2)의 항행렬의 역행렬을 구해야 하는데, 일반적으로 디지털 영상복원에서는 이 항행렬의 차수가 매우 크므로 역행렬의 계

산에 대단한 어려움이 따른다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 식 (3.1)의 MPIMG 알고리즘을 다음과 같이

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{P - \lambda K\}^{-1} \{D^{10}Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \quad (3.3)$$

나타낸다. 단 $D^2J(\theta^n) = K$, $D^{20}Q(\theta^n | \theta^n) = P$, K 는 대칭행렬이고 P 는 대각행렬이다.

따라서 식 (3.3)의 MPIMG 알고리즘은 $\lambda > 0$ 에 대해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{H(I - \lambda \Lambda)^{-1}H\} \cdot \{D^{10}Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\}. \quad (3.4)$$

단, I 는 단위행렬, Γ 와 Λ 는 각각 행렬 $P^{-1/2}KP^{-1/2}$ 의 직교분해에서 얻어진 고유치들로 이루어진 대각 및 고유벡터행렬 이고, $H = P^{-1/2}\Gamma$ 이다. 식 (3.4)의 알고리즘에서 주목할 것은 역행렬에 비대각 성분이 빠져있어 식 (3.1)에서의 계산상의 문제점이 해결된다는 것이다.

4. SMOSLG 알고리즘의 구성

j 번째 픽셀에 대한 로그우도의 편미분은

$$\dot{L}_j(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\theta) \quad (4.1)$$

으로 나타내자. 본 논문에서는 몇 개의 픽셀로 이루어진 그룹들은 순차적으로 갱신을 하고 그룹내의 픽셀들은 동시 갱신하는 방법을 사용한다. 이 방법을 GCA (grouped coordinate accent) 알고리즘이라 한다(1997 Fessler). 그리고 수렴속도를 향상시키기 위하여 그룹내의 픽셀들을 공간적으로 충분히 분리되도록 선택한다. 먼저, S 를 픽셀 $\{1, 2, \dots, P\}$ 의 부분집합이라 하고 S^c 를 S 의 여집합 및 $|S|$ 를 S 의 원소수라 하자. GCA 알고리즘에서는 n 번째 반복에서 θ_S^n 이 고정되어있는 동안 θ_{S^c} 를 갱신한다. 그런데 θ_S 에 관하여 $\Phi(\theta_S, \theta_{S^c}^n)$ 을 직접 최대화하는 것은 사실상 불가능하다. 그래서 본 논문에서는 최소한

$$\Phi(\theta_S^{n+1}, \theta_{S^c}^n) \geq \Phi(\theta_S^n, \theta_{S^c}^n) = \Phi(\theta^n) \quad (4.2)$$

을 만족되는 즉 목적함수의 단조증가성이 보장되도록

θ_S^{n+1} 을 선택하는 방법을 사용한다. 따라서 $\Phi(\theta_S^{n+1}, \theta_{S^c}^n)$ 를 최대화하는 θ_S^{n+1} 를 구하는 대신에, 단조성이 만족되는 영역 즉

$$\Phi(\theta_S, \theta_{S^c}^n) - \Phi(\theta^n) \geq \phi(\theta_S; \theta^n) - \phi(\theta_S^n; \theta^n) \quad (4.3)$$

이 만족되는 영역 $R_S(\theta^n) \subseteq R^{|\mathcal{S}|}$ 에서 대리함수(surrogate function) $\phi(\theta_S; \theta^n)$ 을 최대화한다. 한편, GCA 알고리즘을 구체적으로 표현하면

$$\theta_S^{n+1} = \arg \max_{\theta_S \in R_S(\theta^n)} \phi(\theta_S; \theta^n),$$

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n, \quad j \in S^c$$

과 같이 나타낼 수 있을 것이다.

4.1 대리함수의 선택

대리함수 $\phi(\cdot; \theta^n)$ 는 아래와 같이 가법적으로 분리되는 함수를 사용한다. 그리고 ϕ_j 들

$$\phi(\cdot; \theta^n) = \sum_{j \in S} \phi_j(\theta_j; \theta^n). \quad (4.4)$$

의 선택은 EM 접근 방법 대신 De Pierro의 오목성 기법의 변형을 사용하는데, 이 방법의 핵심은

$$\langle a_i, [\theta_S, \theta_{S^c}^n] \rangle$$

$$= \sum_{j \in S} \alpha_{ij} \left[\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right] \quad (4.5)$$

과 같이 구성하는데 있다. 단, 여기서 $\alpha_{ij} > 0$ 은

$$\sum_{j \in S} \alpha_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (4.6)$$

이 만족되도록 선택한다. 만약 R 의 모든 영역에 걸쳐 h_i 가 오목(concave)이면, 식 (4.5)와 볼록성질(convexity inequality)로부터

$$h_i(\langle a_i, [\theta_S, \theta_{S^c}^n] \rangle)$$

$$\geq \sum_{j \in S} \alpha_{ij} h_i \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right) \quad (4.7)$$

가 성립한다. 따라서 식 (4.7)로부터 $\theta_S \in R_S(\theta^n)$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$L(\theta_S, \theta_S^n) = \sum_{i=1}^N h_i(\langle a_i, [\theta_S, \theta_S^n] \rangle) \geq \sum_{j \in S} Q_j(\theta_j; \theta^n) \quad (4.8)$$

여기서,

$$Q_j(\theta_j; \theta^n) = \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} h_i \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle a_i, \theta^n \rangle \right) \quad (4.9)$$

이다. 한편, 두 개의 이웃하는 화소들이 서로 같은 그룹 내에 속하지 않도록 그룹을 정리하면, 대리함수 식 (4.10)은

$$\phi_j(\theta_j; \theta^n) = Q_j(\theta_j; \theta^n) - \beta \sum_k w_{jk} \phi(\theta_j - \theta_k^n) \quad (4.10)$$

단조성을 만족하게 될 것이다.

4.2 SMOSLG 알고리즘을 이용한 영상복원

일반적으로 영상 관측시스템을 각 화소에 대한 관계 식으로 나타내면,

$$y_i = f \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right) + a_i = f \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) + a_i \quad (4.11)$$

$i=1, \dots, N; j=1, \dots, P$

과 같다. 여기서, 선형필터에 대한 비선형 함수 f 는 log 함수를 사용하고, v_i 는 관측치 y_i 에 영향을 미치는 화소의 개수를 나타낸다. 한편, $a_i \sim N(0, \sigma^2)$ 을 따른다면,

$$y_i \sim N \left(f \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right), \sigma^2 \right) \quad i=1, \dots, N \quad (4.12)$$

를 따를 것이다. 따라서 관측치 (y_1, \dots, y_N) 이 주어졌을 때, θ 에 대한 우도는

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N h_i \left(\sum_{j=1}^P u_{ij} \theta_j \right) \quad (4.13)$$

과 같이 주어지는데, 여기서

$$h_i(d) = -\frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 (y_i - f(d))^2 \quad (4.14)$$

을 나타낸다. 여기서 함수 $h_i(d)$ 은 d 에 대하여 오목

함수이다. 이 오목성질을 이용하여 아래의 식을 유도할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j = \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} \left\{ \frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right\} \quad (4.15)$$

단, $\sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} = 1$ 이고 $a_{ij} > 0$ 이고, $d_i^n = \sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j^n$ 를 나타낸다. 이때 볼록(convex)성질에 의하여

$$\begin{aligned} h_i \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) &= h_i \left(\sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} \left\{ \frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right\} \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

이 성립한다. 이것을 식 (4.13)에 대입하면,

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{v_i} u_{ij} \theta_j \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{v_i} a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^N a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \right] \\ &\approx \sum_{j=1}^N w_j(\theta; \theta^n) \end{aligned}$$

과 같이 전개된다. 여기서,

$$\begin{aligned} W(\theta; \theta^n) &= \sum_{j=1}^{v_i} w_j(\theta; \theta^n) \\ &= \sum_{j=1}^{v_i} \sum_{i=1}^N a_{ij} h_i \left(\frac{u_{ij}}{a_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + d_i^n \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

을 나타낸다. 우리는 식 (4.17)을 대수우도함수 $L(\theta)$ 에 대한 대리함수(surrogate function)라 부른다. 그런데 우리는 $L(\theta^n) = W(\theta^n; \theta^n) = W(\theta^n)$ 의 관계가 성립하기 때문에

$$L(\theta^{n+1}) - L(\theta^n) \geq W(\theta^{n+1}; \theta^n) - W(\theta^n) > 0 \quad (4.18)$$

임을 보일 수 있다. 따라서 θ^n 을 반복적으로 구하면 $L(\theta)$ 를 최대화하는 근에 도달함을 알 수 있다. 그런데 영상관련분야의 대부분은 추정하고자 하는 모수의 수와 관측치의 수가 비슷하기 때문에 조그마한 잡음이 포함된 경우에도 왜곡된 복원영상을 나타낸다. 이것을

해결하기 위하여 페널티 함수가 포함된 식 (1.1)을 최대화하는 근을 구하는 것이 목적이므로 대리함수(4.17)은

$$W_{\lambda}(\theta; \theta^n) - \lambda J(\theta) \quad (4.19)$$

와 같은 형태로 나타낸다.

한편, 볼록(convex) 알고리즘의 n+1 단계에서 식 (4.19)의 해 θ_j^{n+1} 를 구하기 위해서 초기치 $\theta_j^{n:0} = \theta_j^n$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \theta_j^{n:k+1} &= \theta_j^{n:k} - \{w'_j(\theta_j^{n:k}|\theta^n) - \lambda J'_j(\theta_j^{n:k}|\theta^n)\}^{-1} \\ &\quad \{w'_j(\theta_j^{n:k}|\theta^n) - \lambda J_j(\theta_j^{n:k}|\theta^n)\}, \quad (4.20) \\ &j = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

여기서, w'_j 와 w''_j 는 w_j 를 θ_j 에 관한 1,2차 편도함수를 나타낸다. 그런데 식 (4.20)은 알고리즘의 복잡성으로 인한 실효성에 문제가 있으므로 (4.20)알고리즘을 보다 단순화시킨

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n - \{w'_j(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J'_j(\theta_j^n|\theta^n)\}^{-1} \\ &\quad \{w'_j(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J_j(\theta_j^n|\theta^n)\}, \quad (4.21) \\ &j = 1, \dots, P \end{aligned}$$

식 (4.21)의 알고리즘을 1차 볼록(convex) 알고리즘이라고 하겠다. 그런데 이 알고리즘은 페널티 함수가 초월함수로 주어질 경우에는 계산의 복잡성으로 인하여 알고리즘의 수렴속도가 느린 문제점을 내포하고 있다. 그러므로 이 문제점을 극복하기 위하여 본 논문에서는 식 (4.21)의 알고리즘을 다음과 같이 변형시켜 사용한다.

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} &= \theta_j^n + \frac{w'_j(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J'_j(\theta_j^n|\theta^n)}{-(w'_j(\theta_j^n|\theta^n) - \lambda J''_{D,j}(\theta_j^n|\theta^n))} \\ &j = 1, \dots, P \end{aligned} \quad (4.22)$$

단, 여기서 $J''_{D,j}(\theta_j^n|\theta^n)$ 는 페널티 함수의 대각행렬을 나타낸다. 우리는 이 알고리즘을 SMOSLG(Simplified Modification OSL Gradient)알고리즘이라 하겠다. 한편,

$$\begin{aligned} w'_j(\theta_j^n|\theta^n) &= \frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N [y_i - \phi(d_i^n)] u_{ij} \\ &= \frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N [y_i - \log(d_i^n)] u_{ij}. \quad (4.23) \end{aligned}$$

단, $\phi = \log$ 함수

이고

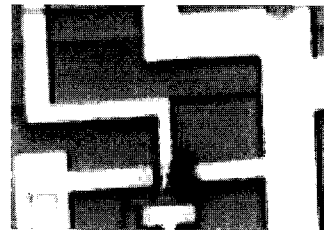
$$\begin{aligned} w''_j(\theta_j^n|\theta^n) &= -\frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N \{ \phi'(d_i^n)^2 - \phi''(d_i^n)[y_i - \phi(d_i^n)] \} \frac{u_{ij}^2}{\alpha_{ij}} \\ &= -\frac{1}{\sigma^{2n}} \sum_i^N \{ 1 + y_i - \log(d_i^n) \} \frac{u_{ij}^2}{\alpha_{ij}} (d_i^n)^2 \quad (4.24) \end{aligned}$$

단, $\phi = \log$ 함수

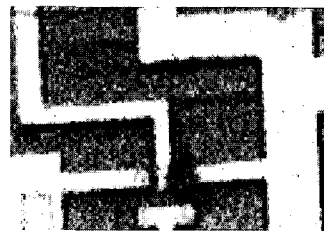
이다.

5. 디지털 영상복원 시뮬레이션

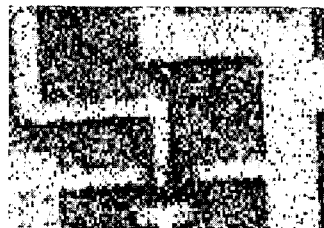
이 절에서는 디지털 영상실험을 통해 MPIMG 알고리즘과 SMOSLG 알고리즘의 페널티 대수우도에 대한 수렴속도를 비교하여, SMOSLG 알고리즘이 MPIMG 알고리즘보다 빠르게 수렴함을 밝힌다.



(a)



(b)



(c)

(그림 1) (a) 진영상,
(b) 퍼짐+잡음: $\sigma = 0.08$ 로 오염된 영상,
(c) 퍼짐+잡음: $\sigma = 0.28$ 로 오염된 영상

(그림 1)의 (ㄱ)은 90×70 크기의 진영상(true image)인데, 반도체 회로의 일부분을 찍은 사진이다. 이때 $P=90 \times 70=6300$ 이다. 그리고 (ㄴ)과 (ㄷ)은 진영상을 점확산함수(point spread funtion)로 퍼지게(blurring)한 후, 평균이 0 이고 $\sigma=0.08$ 및 0.28 인 가우지안 잡음으로 오염시킨 영상이다. 그리고, 페널티 함수는 Green(1990b)에서처럼 $\ln \cosh(x)$ 을 사용하여

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^P \sum_{k \in \partial_j} \ln \cosh(\theta_j - \theta_k), \quad (5.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, P$$

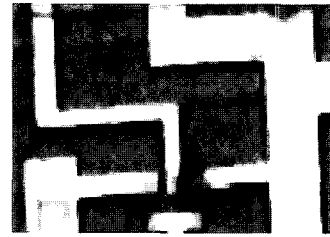
와 같이 나타낸다. 따라서 MPEMG 알고리즘을 이용한 디지털 영상복원 식은

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \left\{ \sum_{i=1}^N p_i h_{ij}^2 + \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{j=1}^P \sum_{k \in \partial_j} [1 - \tanh^2(\theta_j^n - \theta_k^n)] \right\}^{-1} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N h_{ij} R_i^{(n)} - \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \in \partial_j} \tanh(\theta_j^n - \theta_k^n) \right\}$$

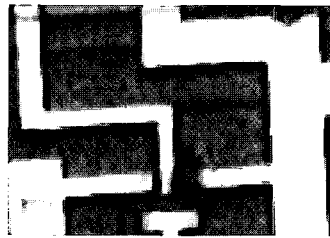
$$j = 1, 2, \dots, P \quad (5.2)$$

식 (5.2)과 같고, SMOSLG 알고리즘을 이용한 영상 복원은 식 (4.23)과 같음을 알 수 있다. 여기서, R_i 는 n 번째 단계에서 i 번째 관측화소의 잔차를 의미하고, $\sigma^{2(n)}$ 은 n 번째 단계에서 σ^2 의 추정치를 나타낸다.

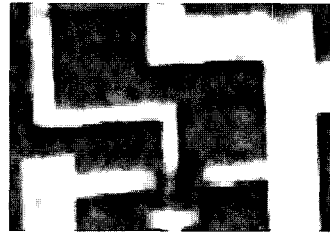
(그림 2)의 (ㄱ), (ㄴ)은 $\sigma=0.08$ 그리고 (ㄷ), (ㄹ)은 $\sigma=0.28$ 인 오염영상에 대해 각각 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘으로 복원한 영상이다. 이 오염영상에 대한 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘의 평활상수의 수렴영역은 $\lambda > 0$ 모든 범위에서 사용이 가능하다. 즉 평활상수의 수렴 범위는 두 알고리즘 모두 평활상수가 양의 값을 가지는 범위에서는 페널티 로그우도의 단조증가성을 보장한다. 또한 오염영상에 대한 복원영상의 상태를 비교해 보면 동일한 λ 값을 주었을 때 두 알고리즘 모두 비슷한 결과를 보여 주고 있음을 알 수 있다. 오염영상에 대한 충분한 잡음제거는 자동인식 분야에서 중요하게 사용되는 경계선추출(edge-extraction)을 위해 반드시 필요하다. 한편, 동일한 평활상수 λ 값이 주어졌을 때 두 알고리즘 사용하여 복원된 영상의 화질에는 뚜렷한 차이는 없었다. 그러나, SMOSLG 알고리즘이 MPEMG 알고리즘보다 오염도 σ 값에 관계없이



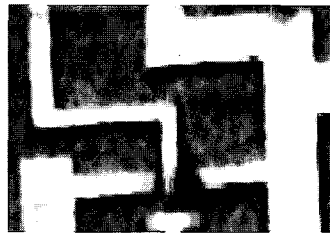
(ㄱ)



(ㄴ)



(ㄷ)



(ㄹ)

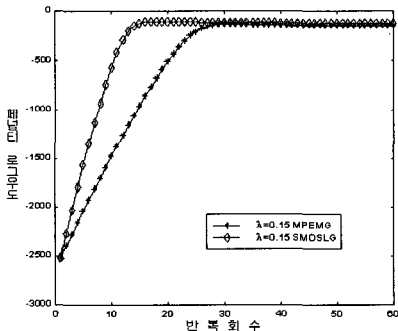
(그림 2) (ㄱ), (ㄴ), 은 $\sigma=0.08$ 일 때 $\lambda=0.15$, $\lambda=0.15$, 에 대한, (ㄷ) (ㄹ), 은 $\sigma=0.28$ 일 때 $\lambda=0.23$, $\lambda=0.23$,에 대한 복원결과. (ㄱ),(ㄷ)은 MPEMG, (ㄴ),(ㄹ)은 SMOSLG 알고리즘을 사용한 복원결과.

모두 페널티 로그우도가 빠르게 수렴함을 알 수 있다 (그림 3 참조). 수렴률이 빠르다는 것은 최적의 복원영상을 구성하는 디지털 영상복원의 실용적인 면에서 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다.

6. 결 론

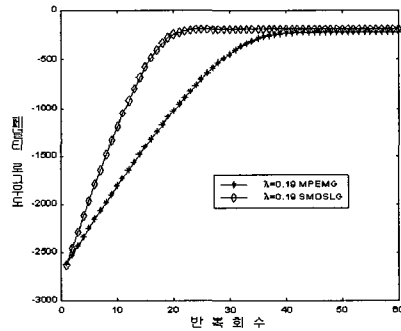
OSL 알고리즘은 페널티 함수의 1차미분인 $\partial J(\theta)/\partial \theta$ 항의 전개가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 이 알고리즘이 수렴할 때는 PEM 알고리즘과 같은 정상점에 수렴한다는 장점 때문에 디지털 영상복원에서 자주 사용되지만, 평활상수 λ 에 대한 수렴 제한성 때문에 잡음에 대한 평활의 한계를 갖는다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 송민구(1999)는 MPEMG 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이 알고리즘은 평활상수 λ 에 대한 수렴 영역은 확장되었지만 페널티 로그우도의 증가를 보장하는 수렴속도가 OSL 알고리즘보다

느린 문제점이 있다. 이 점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 SMOSLG 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘은 (그림 3)에서 보여 주듯이 오염도 σ 값 변화에 따른 여러 형태의 평활상수 λ 값에서도 항상 MPEMG 알고리즘보다 빨리 수렴함을 알 수 있다. 특히, (그림 3)의 (ㄷ)에서 나타나듯이 오염이 심한 영상복원인 경우 비교적 큰 평활상수 값을 부여하여 잡음을 평활 하여야 하는데, 이 경우처럼 λ 값이 큰 경우일 때는 MPEMG 알고리즘보다 SMOSLG 알고리즘이 상대적으로 매우 빠르게 수렴함을 알 수 있다. 한편 본 논문에서 MPEMG 알고리즘과 SMOSLG 알고리즘을 사용하여 복원된 영상의 화질은 큰 차이는 없었다. 하지만 반복적인 기법을



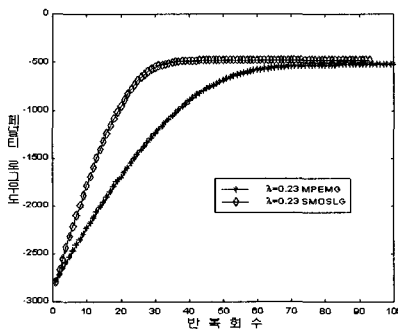
(ㄱ)

$\sigma = 0.08$ 일 때의 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘의 $\lambda = 0.15$ 에서의 페널티 로그우도 수렴률 비교



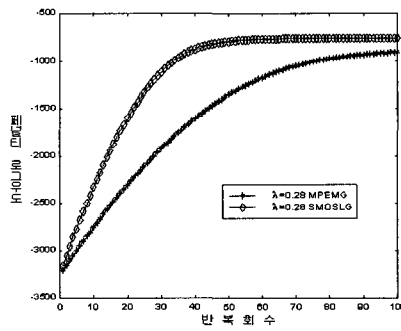
(ㄴ)

$\sigma = 0.15$ 일 때의 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘의 $\lambda = 0.19$ 에서의 페널티 로그우도의 수렴률 비교



(ㄷ)

$\sigma = 0.28$ 일 때의 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘의 $\lambda = 0.23$ 에서의 페널티 로그우도 수렴률 비교



(ㄹ)

$\sigma = 0.35$ 일 때의 MPEMG 및 SMOSLG 알고리즘의 $\lambda = 0.28$ 에서의 페널티 로그우도의 수렴률 비교

(그림 3) σ 및 λ 값에 따른 두 알고리즘의 반복에 대한 페널티 로그우도의 수렴률의 비교

사용하여 최적의 영상을 결정하는 영상복원이나 영상재구성시 알고리즘이 빠르게 수렴한다는 것은 실용적인 측면에서 큰 의미를 부여할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Abdalla, M. and Kay, J. "Edge Preserving Image Restoration, Stochastic Models, Statistical Methods, and Algorithm in Image Analysis," P. Barone et al.(Eds.), Springer-Verlag, pp.1-13, 1992.

[2] Besag, J.E. "On the Statistical Analysis of Dirty pictures(with discussion)," *Journal of Royal Statistical Society B*, pp.259-302, 1986.

[3] German, S., and German, D. "Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.

[4] Green, P.J. "On use of the EM Algorithm for Penalized Likelihood Estimation," *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol.52, pp.443-452, 1990a.

[5] Green, P.J. "Bayesian Reconstruction from Emission Tomography data using a Modified EM Algorithm," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol.9, No.1, pp.84-93, 1990b.

[6] Jain, A.K. 'Fundamentals of Digital Image Processing,' Prentice-Hall, 1989.

[7] J. A. Fessler, E. P. Ficaro, N. H. Clinthorne, and K. S. Lange "Grouped-Coordinate Ascent Algorithms for Penalized-Likelihood Transmission Image Reconstruction," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol.16, No.2, pp.166-75, 1997.

[8] Lange, K.S. "A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm," *Journal of Royal*

Statistical Society B, Vol.57, pp.425-437, 1995.

[9] 송민구, "변형된 PEM 그래디언트 알고리즘을 이용한 디지털 영상처리 알고리즘에 관한 연구", 한국정보처리학회 논문지 심사중, 1999.

[10] 송민구, "디지털 화상복원에서 페널티 EM 그래디언트 알고리즘에 관한 연구", 동국대학교 대학원, 1998.

[11] 송민구, 염준근, "변형된 PEM 그래디언트 알고리즘을 이용한 디지털 화상복원의 통계적 방법에 관한 연구", 한국통계학회 춘계 학술발표 논문집 pp.153-158, 1998.



송 민 구

e-mail : minkoo@cakra.dongguk.ac.kr
 1988년 동국대학교 통계학과 졸업
 1991년 동국대학교 대학원 통계학과(이학석사)
 1998년 동국대학교 통계학과(이학박사)

1994년~현재 동국대학교 통계학과, 컴퓨터정보통신학부 강사
 1998년~현재 주식회사 포시엠 DB 마케팅 연구소 부소장
 관심분야 : 통계적 영상처리, 영상재구성, 데이터 마이닝 등

염 준 근

e-mail : joonkeun@cakra.dongguk.ac.kr
 1971년 동국대학교 통계학과 졸업
 1979년 동국대학교 대학원 통계학과(이학석사)
 1985년 서울대학교 대학원 계산통계학과(이학박사)

1981년~현재 동국대학교 통계학과 교수
 관심분야 : 회귀분석, 신뢰성 이론, 통계적 영상처리 등