韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 265-271.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 265-271.

Visual Basic을 이용한 비선형방정식의 수치해법 교육프로그램에 관하여

이 규 봉 (배재대학교)

수학을 교육하다 보면 느끼는 것 중의 하나가 학생의 이해를 돕기 위하여 수학 내용을 시각적으로 알려주되 그 방법이 쉬운 것을 찾는 것이다. 컴퓨터의 발달과 보급으로 인하여 조그만 노력하면 이것이 가능하다는 것을 보여준다. Visual Basic은 윈도우 컴퓨터 언어로서 배우기가 쉬울 뿐 아니라, 이 언어를 이용하여 윈도우용 실행화일을 쉽게 만들 수 있다. 이번 발표는 수치해석학에서 비선형방정식의 해를 구하는 과정을 그래픽을 이용하여 보여주는 프로그램 작성에 관한 것이다. 이것은 모든 수학의 주제에 이용할 수 있다는 가능성을 보여준다. 또한 이것의 종합적인 개발로 수학 교육에 관한 프로그램을 개발할 수 있다.

1. 서 론

학생을 가르칠 때 학생이 강의 내용에 흥미를 느끼면 쉽게 그 내용을 이해하게 된다. 수학은 많은 학생이 흥미를 느끼기보다는 대체로 멀리하려고 하는 경향이 짙은 과목 중 하나이므로 수학의 이론만을 가르치다보면 학생은 이해를 하려고 하기보다는 쉽게 흥미를 잃어버리게 된다. 일반 학생의 흥미를 유발시키는 방법 중 하나는 수학의 내용을 이론과 함께 시각적으로 보여주는 것이다. 그러나 시각적으로 보여주기 위하여, 기존의 상품을 구입하고 그것의 사용법을 파악한 후 학생에게 보여주는 것은 경제적으로나 교육적으로 낭비의 요소가 많다. 가장 현장을 잘 아는 교사가 원하는 교육내용을 자신이 프로그램하여 보여준다면, 교사의 노력이 필요하지만 경제적으로나 교육적으로 효율성이 높다고 생각한다. 지금은 컴퓨터의 발달과 보급으로 인하여 조그만 노력하면 쉽게 시각적인 방법을 만들 수 있다. Visual Basic은 윈도우 컴퓨터 언어로서 배우기가 쉬울 뿐 아니라, 이 언어를 이용하여 윈도우용 실행화일을 쉽게 만들 수 있다. Visual Basic 언어는 윈도우용 프로그램을 작성하는 컴퓨터 프로그래밍 언어로 객체지향적 프로그래밍 언어(Objected Oriented Programming)이다. 그러므로 이미 만들어져 있는 프로그램 또는 여러 조각의 프로그램을 옮겨다 사용할 수 있다. 또한 사건 유도(Event Driven) 방식이므로 마우스를 클릭한다거나, 키보드의 자판을 누를 때마다 새로운 행동을 유발할 수 있게 하여 시각적으로 많은 도움을 준다.

본 프로그램에서는 알고리즘에 의하여 구현된 그래프를 통해 비선형방정식의 형태와 단계적으로 근이 구해지는 것을 시각적으로 보여줌과 동시에 과정과 결과를 텍스트와 그래픽으로 저장할 수 있게하여 후에 다시 비교 자료로 이용할 수 있게 하였다. 2장에서는 비선형방정식의 해를 구하는 여러 가지 수치해법을 알아보고, 3장에서는 이 방법을 시각화한 프로그램 구성에 관하여 설명한다. 4장에서는 프로그램을 교육에 응용할 수 있는 가능성을 설명한다.

2. 비선형방정식의 수치 해법

자연과학이나 공학에서 다루어지는 수학 문제에서 비선형방정식 $f(x)=0$의 해를 얼마나 정확하게 그리고 빨리 구하는 것은 매우 중요하다. 다항식의 경우 인수분해, 조립제법과 같은 대수적인 방법이 있으나 이 방법은 매우 제한적으로 사용된다. 일반적으로 많이 알려진 수치적인 방법 중 이분법, Regular-Falsi 법, Newton 방법, Honer 방법, 할선법, 고정점방법, Muller 방법을 간단히 소개하고 그래픽을 사용하는 프로그램 구성에 대하여 설명한다.

2.1 이분법(Bisection Method)

이분법은 $f(a)f(b)<0$인 구간 $[a, b]$에서 $f(x)=0$의 해를 구하는 가장 간단한 방법이다. 근사해는 이 구간의 중점 $c=\dfrac{a+b}{2}$가 되고 다시 조건 $f(a)f(c)<0$을 만족하면 구간 $[a, c]$를, 만족하지 않으면 $[c, b]$를 해가 포함되어 있는 새로운 구간 $[a, b]$로 하여 다시 반복한다. $|f(c)|$가 충분히 작으면 그 때 c를 근사해로 택한다. 해가 포함되어 있는 구간이 계속 이등분되므로 오차의 범위가 분명하나 다른 방법에 비하여 수렴 속도가 느린 편이다.

2.2 Regula falsi 방법

Regula falsi 방법은 선형보간법에 기초를 둔 것으로써 이분법과 비슷하다. 그러나 구간 $[a, b]$을 단순히 양분하는 대신 양 끝점 $(a, f(a)), (b, f(b))$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점 $c=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$를 근사해로 한다. $f(c)f(b)<0$이면 새로운 점 $(c, f(c))$과 $(b, f(b))$에 반복 시행한다. 이분법보다 빠르게 수렴한다.

2.3 Newton 방법

Newton 방법은 원하는 근에서의 초기 근사값 x_0을 알고 있을 때 근을 구하는 방법으로 함수 $f(x)$의 점 x_0에서 접선을 구하고 이 접선의 해 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$를 새로

운 근사해로 정한다. 이 근사해를 기준으로 다시 되풀이하여 반복한다. 이 방법은 일단 수렴하면 매우 빠르게 수렴한다. 또한 복소해를 구하기 위해 복소영역에 응용되어 질 수 있으며 또한 비선형 연립방정식에도 확장되어 질 수 있다. 그러나 도함수의 값을 알아야하며 초기치를 잘못 선택하면 발산할 수도 있다.

2.4 할선법(Secant Method)

할선법은 두 개의 초기 근사해 x_0, x_1를 이용하여 두 점 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 새로운 근사해로 하여 다시 반복하는 것으로 Newton 방법에서 도함수 대신 앞서 구한 두 개의 근사해를 이용한 기울기를 이용한 것과 같다. 이 방법은 Newton 방법보다는 느리나 도함수를 사용하지 않을 뿐 아니라 다른 방법보다는 대체로 빠르게 수렴한다.

2.5 고정점 반복법

방정식 $g(x)=x$의 해를 구하기 위하여 초기값 x_0를 가지고 $x_n=g(x_{n-1}), n\geq 1$으로 정의된 수렴하는 수열 $\{x_n\}$을 찾아 근사해로 한다. 비선형 방정식 $f(x)=0$의 근 α를 구하는 문제는 α가 항상 함수 $g(x)=x-f(x)$의 고정점이 되므로 $g(x)$의 고정점을 찾는 문제와 동치가 된다.

2.6 Horner 방법

일차 이상의 다항식 $p(x)$를 $x-\alpha$로 나눌 때 몫 $q(x)$와 나머지 r는 조립제법(Horner`s algorithm)에 의하여 쉽게 구해진다. 특히 나머지 $r=p(\alpha)$가 된다. 다항식 $p(x)=(x-\alpha)q(x)+r$를 x에 관하여 미분하면 $p'(x)=q(x)+(x-\alpha)q'(x)$이 되고 $p'(\alpha)=q(\alpha)$이므로 $p'(\alpha)$ 역시 조립제법에 의해 쉽게 구할 수 있다. 다항식 $p(x)=0$에 Newton 방법을 적용하면

$$x_{n-1}=x_n-\frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

이고 $p(x_n)$과 $p'(x_n)$은 도함수 계산없이 조립제법에 의해 계산된다.

2.7 Muller 방법

Muller방법은 할선법의 개념을 좀더 확장시킨 방법으로서 다항식의 실근 및 복소수근을 함께 구할 수 있을 뿐 아니라 다항식 함수가 아닌 임의의 함수의 모든 근을 구할 수 있는 방법이다. Newton 방법보다는 일반적으로 늦게 수렴하지만 초기값이 충분히 좋은 선택이 아닐지라도 빠른 수렴을 하는 장점이 있기 때문에 많이 이용된다. $f(x)=0$의 근을 구하기 위해 할선법의 경우는 두 개의 초기값 x_0, x_1에 대해 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 x_2

로 잡는다. 그러나 Muller방법에서는 세 개의 초기값 x_0, x_1, x_2을 사용한다. 곡선 $y=f(x)$위의 세 개의 점 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$를 지나는 이차곡선이 x축과 만나는 점을 근에 대한 근사값 x_3로 결정한다. 여기서

$$x_3 = x_2 - \frac{2f(x_2)}{b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4af(x_2)}}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

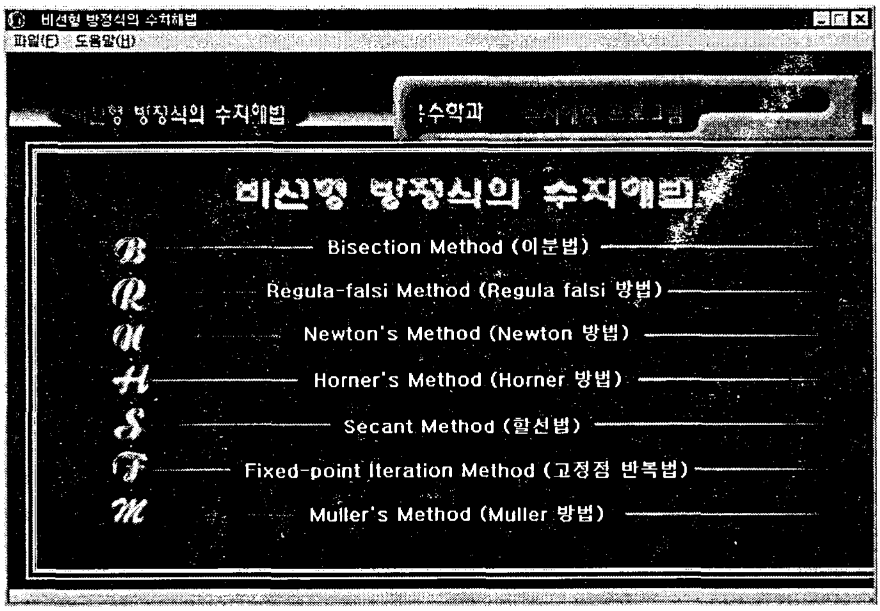
$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

위의 식에서 $b^2 - 4af(x_2)$의 값에 따라 x_3는 복소수가 될 수 있기 때문에 Newton 방법과는 다르게 초기값 x_0, x_1, x_2가 실수라 하더라도 복소수의 근을 구할 수 있다. 다시 x_3를 포함한 세 개의 점 x_1, x_2, x_3을 가지고 위와 같은 반복을 계속함으로써 허용오차 내의 근사값을 구한다.

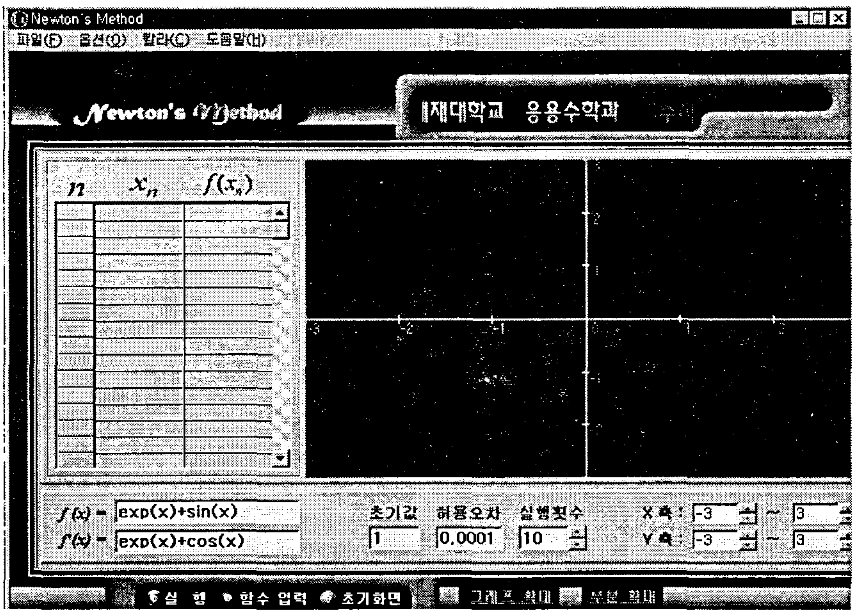
3. 프로그램의 구성

프로그램을 실행하면 처음 보여주는 전체 형태는 그림1과 같다. 이곳에서 원하는 방법을 선택한다. 또한 도움말을 이용하여 각 방법에 관하여 알아볼 수 있다. 그림2에서 함수입력을 클릭하면 함수입력창이 나타난다. 계산기를 사용하는 것과 같이 마우스를 이용하여 함수를 입력한다. Newton 방법의 경우에는 도함수도 같은 방법으로 입력한다. 초기값, 허용오차, 실행횟수를 마우스와 키보드를 이용하여 직접 입력한다. x, y의 범위도 입력한다. 실행를 누르면 반복되는 근사해와 변하는 과정의 기하학적 형태가 그림3과 같이 나타난다. 부분확대를 클릭한 후 원하는 부분을 마우스를 끌어놓아(drag and down) 표시하고 실행을 누르면 그 부분의 그래프가 확대되어 다시 보여준다. 그래프확대를 누르면 그래프가 전체창으로 된다. 메뉴창에 있는 파일을 누르면 화면구성을 초기치로 할 수 있고 그래프와 데이타를 저장할 수 있게 된다. 옵션을 누르면 그래프를 그리는 속도를 조절할 수 있고 격자선이나 그래프의 굵기를 조절할 수 있다. 또한 칼라를 누르면 그래프에 나타나는 색상을 조절할 수 있다. 도움말에는 소개된 알고리즘에 대한 설명을 볼 수 있다.

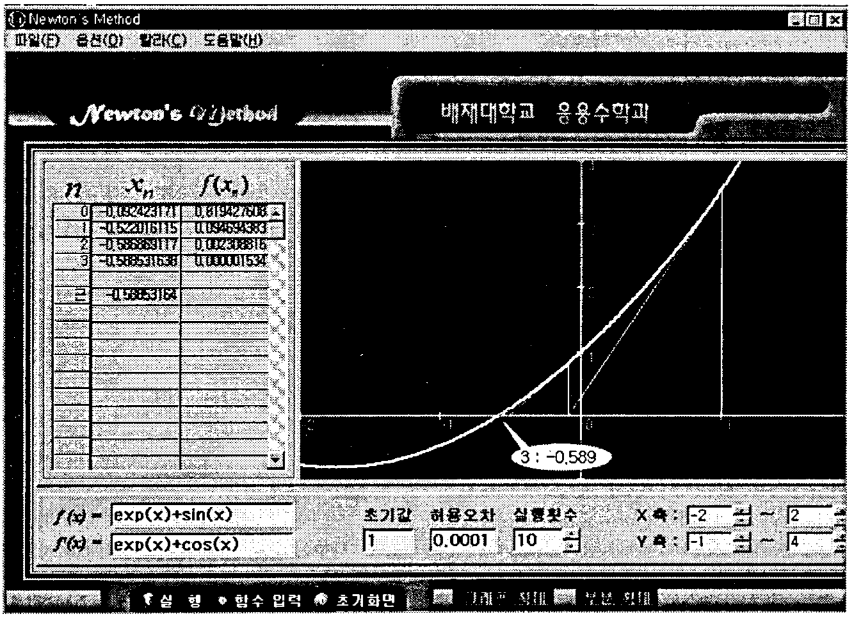
<그림 1>


비선형 방정식의 수치해법
파일(F) 도움말(H)
비선형 방정식의 수치해법
Bisection Method (이분법)
Regula-falsi Method (Regula falsi 방법)
Newton's Method (Newton 방법)
Horner's Method (Horner 방법)
Secant Method (할선법)
Fixed-point Iteration Method (고정점 반복법)
Muller's Method (Muller 방법)

<그림 2>


Newton's Method
파일(F) 옵션(O) 칼라(C) 도움말(H)
Newton's Method
응용수학과
n
f(x) = exp(x)+sin(x)
f'(x) = exp(x)+cos(x)
초기값
허용오차
실행횟수
1
0.0001
10
X축 : -3 ~ 3
Y축 : -3 ~ 3
실 행
함수 입력
초기화면

<그림 3>



4. 프로그램의 교육에 응용

수학을 가르치는 과정은 우선 용어를 정의하고 그로부터 계산 방법이나 이론을 가르킨다. 학생들이 이해하는 것을 돕기 위하여 처음에는 간단한 예제를 계산하고 그것이 익숙해지면 조금 더 어려운 문제를 다루게 된다. 그러나 교사가 항상 문제를 풀어주는 것은 번거러울 뿐 아니라 학생의 스스로 학습과 창의력을 약화시킬 수 있다. 비선형방정식의 해법을 예로 들어서, 수치적인 해법의 이론을 설명하고 간단한 예를 직접 교사가 계산해 보일 수 있다. 그 다음 이 프로그램을 학생에게 설명하고 계산 과정을 단계적으로 보여준다. 판서의 경우와 달리 시각적으로 보여줌으로서 학생의 관심을 유도할 수 있다. 단, 가능한 천천히 학생의 수준에 맞추어 진행한다. 학생은 직접 이 프로그램을 자신이 원하는 시간과 장소에서 스스로 학습할 수 있다. 자신이 직접 계산한 것과 컴퓨터로 계산하는 것을 확인할 수 있고, 더욱이 그 과정 자체를 파악할 수 있게 된다.

현대와 같이 컴퓨터가 많이 보급된 교육 현장에서 교사가 Visual Basic을 이용하여 교과 내용을 주제별로 자신의 취향에 맞게 프로그램을 작성하여 이론과 더불어 시각적으로 교과 내용을 학생에게 보여줌으로 학생의 관심을 끌 수 있고 학습 효과를 높일 수 있다. 이 프로그램은 다음 주소에서 받을 수 있다.

참 고 문 헌

정세영 외 3인 (1997). *수치해석학*, 서울: 경문사.
이을재 (1997). *한글 Visual Basic 5.0*, 혜지원.
Burden & Faires (1993). *Numerical Analysis*, PWS.