韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 8집, 1999. 1. 209-229.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 8, Jan. 1999. 209-229.

Polya의 문제해결 전략을 이용한 효과적인 문장제 지도방안

-고등학교 중심-

방 승 진 (아주대학교)
이 상 원 (능인고등학교)

보통 문장제(거리 · 속도 문제, 시계 문제, 농도 문제, 개수 세기, 측도 영역)는 초등학교부터 반복하면서 대학수학능력 시험에서는 외적 문제해결력을 측정하는 문장으로 나타난다. 문장제를 해결하는데는 사고가 여러 단계로 이루어져야 한다. 따라서 일반적으로 문장제는 난해하므로 조직적이고 전문적인 학습지도가 이루어져야 한다. 하지만 입시위주의 교육 등 여러 여건상 잘 이루어지지 않고 있는 것이 현실이다. 수학을 잘하는 학생이라도 문장제를 해결하지 못하는 경우가 많다. 본 연구에서는 문장제의 해결의 저해 요인을 완화시킬 수 있는 지도 방안으로서 Polya의 문제해결 전략을 이용하며, 실험반과 비교반의 학습 효과를 비교 분석하여 이를 통하여 효율적인 문장제 지도방안을 연구한다.

I. 서 론

수학에서 문장제를 해결하는데는 분석력, 수식 표현능력, 문제 해결력 등이 동시에 요구되어 학생들의 수학적 사고능력이 종합적으로 발휘되는 분야이다. 따라서 문장제의 정답률은 낮고 학생들이 기피하는 유형이다. 그렇지만 문장제 문제는 학생들의 수학적 사고 능력 배양을 큰 도움을 주고 더 나아가 학생들이 대학에 진학했을 때 미분적분학과 공업수학, 물리 · 화학 등 여타 과목 학습에 여러 가지 도움을 주어, 이는 우리 나라의 과학기술을 발전 시키는 원동력이 된다고 생각한다. 따라서 학생들의 기피 이유로 정확히 진단하여 저해요인을 제거할 수 있는 지도방안을 생각하는 것은 중요하다. 이에 Polya의 문제해결전략을 문장제 지도에 활용 했을 때 어떤 효과가 있는지를 연구해 보았다.

II. 저해요소 추출

(1) 문장제 문제란? 수식보다는 문장으로 꾸며져서 수식화 과정을 거쳐서 풀리는 문제.
(2) 비교반과 실험반
① 비교반 : 평상시 학습지도 방법으로 수업지도를 하는 반.

② 실험반 : Polya의 문제 해결 전략 방법에 의하여 수업지도를 하는 반.

1998년 4월 초 저해요소 추출을 위해서 실시한 설문조사 결과 비교반 98명과 실험반 50명에 나타난 문제점은 다음과 같다.

(3) 평가에서 문장제 문항에 대한 선호도 조사

<표 1>

항목 \ 반	비교반		실험반	
	인원	비율	인원	비율
문장제가 아닌 문항	90	92%	48	96%
문장제 문항	8	8%	2	4%

(4) 문장제 문항의 저해 요인의 조사결과는 다음과 같다.

<표 2>

번호	항목	인원(148)	비율
①	문장이 길고 복잡하기 때문에 식을 세우기가 어렵다.	110	74.3%
②	예전에 문장을 풀어본 경험으로 흥미가 상실하여 아예 문제를 포기	18	12%
③	시간적 여유가 없기 때문.	12	8.1%
④	문장제 문제는 문장제가 아닌 문제보다 시간이 더 소요되기 때문.	8	5.4%
⑤	이것 이외에도 다른 요인.	***	***

<표 2>에서와 같이 중상위 학생들이 ①항목이 대부분 이였고 이는 바로 기초학력의 결손이 가장 큰 문제라고 생각되며 상위권 학생일수록 ②③④의 항목에 해당하는 학생수가 많았다. 따라서 복잡한 식을 체계적으로 쉽게 식을 세우는 학습지도방법이 시급하다고 생각되어진다.

(5) 학교에서 실시되고 있는 문장제 수업 진행이 문제해결에 도움이 된다고 생각합니까?

<표 3>

번호	항목	인원(148)	비율
①	많은 도움이 된다.	25	3.3%
②	도움이 된다.	10	6.7%
③	그저 그렇다.	55	37.1%
④	도움이 되지 않는다.	68	46.3%
⑤	모르겠다.	10	6.6%

(6) 지금까지 문장제 해결을 위한 학습교재는 적절한가?

<표 4>

번호	항목	인원	비율
①	아주 적합하다.	2	1.4%
②	적합하다.	10	6.7%
③	보통이다.	66	44.6%
④	적합하지 않다.	70	47.3%

이상의 표본조사 결과로 문제해결을 지도할 때에는 학생들에게 적절히 사용함으로써 문제해결을 도와주는데 그 목적이 있다. Polya는 그의 저서 "How to Solve It?" 에서 문제해결 과정을 네 단계로 나누고 각 단계에서 해야할 그 중요한 발문과 권고를 제시하고 있다. 그 발문과 권고는 문제를 스스로 해결할 때에는 본인 스스로에게 사용하게 하고 있으며, 문제해결을 지도할 때에는 학생들에게 적절히 사용함으로써 문제해결을 도와주는데 그 목적이 있다.

III. 연구방법

수학문제를 문장제와 문장제가 아닌 문제로 분류할 수 있는데 1998년 3월부터 10월까지 8개월 간의 모의고사에서 문장제의 정답률을 추출한다. 한편 실험반과 비교반을 설정하여 Polya의 문제 해결 전략을 조직적으로 활용하여 실험반을 지도하고 비교반은 종래의 방법대로 학습지도를 한다. 이때 실험반과 비교반의 지도는 같은 시간과 조건을 부여하여 다른 요인에 의한 오차를 배제시킨다.

(1) 월별 대외고사에서 비교반과 실험반의 성적을 비교하여 문항별 성적의 정답률을 비교하였다.

(2) 비교반 고등학교 3학년 2개 반은 종래의 방법대로 학습 지도하고, 실험반 고등학교 3학년 1개 반은 Polya의 문장제 해결 전략을 이용하여 학습 지도하여 8개월이 지난 후 문장제 평가를 실시하여 그 차이점을 비교, 분석 해본다.

(3) 조사 대상자의 표본 집단의 자료를 평가하여 그 결과 저해요소를 발견하고 그 문제점이 무엇인지 알아본다.

(4) 비교반과 실험반의 학습효과를 Polya의 문장제 해결 전략이 문장제 지도에 얼마만큼 효과가 있는지를 검증한다.

(5) Polya의 문제 해결능력 전략의 효율성과 그 신뢰성을 높이기 위해서 거리・속도문제, 시계문제, 농도문제, 계수문제, 척도 영역문제, 사고력과 창의력을 가지는 문제중에서 10문항<부록3>을 골고루 엄선하여 비교반과 실험반에 평가를 실행하여 그 결

과를 비교, 분석해 본다.

(6) 설문지 조사에 의하여 표본 대상자에게 저해요인을 조사해 본다. 설문지는 부록에 제시한다.

Polya의 문제해결 전략을 이용한 문장제 지도방법에서 실험반에 수업중 활용된 문제는 많이 있다. 그 중에서 대표적인 10문항만 <부록1>에 제시한다.

IV. 표본조사와 통계분석

<연구 1> 고등학교 3학년 학생 중심으로 모의고사 문제에서 일반문항의 정답률과 문장제 문제의 정답률을 비교 분석해본 결과 모든 학생들이 문장제 정답률이 문장제가 아닌 정답률보다 현저하게 뒤떨어진다는 사실을 발견하게 되었다.

조사 대상자의 반별 분포는 다음 <표 5>와 같다.

<표 5> 표본 대상자 수

학번별 / 교사별	비교반	비교반	실험반	계
연구자	48	50	50	148
전체	48	50	50	148

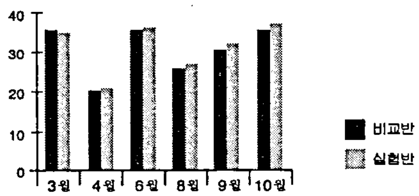
표본 조사의 결과로 얻어진 반별 일반문항 정답률과 문장제 정답률은 <표 6>과 같다.

<표 6> 월별 평균 정답률

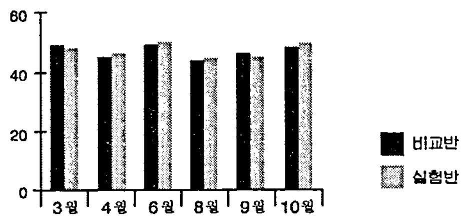
월별 / 반별 평균		3월	4월	6월	8월	9월	10월
비교반 A	문장제가 아닌문항	49.7	45.7	50.1	43.7	47.2	48.2
	문장제 문항	35.5	20.5	35.8	25.8	31.6	32.3
	편차	14.2	25.2	14.3	17.9	15.9	15.9
비교반 B	문장제가 아닌문항	49.5	46.7	49.5	44.2	46.2	49.3
	문장제 문항	36.7	20.9	36.0	26.1	30.4	33.3
	편차	12.8	25.8	13.5	18.1	15.8	16.0

월별 / 반별 평균		3월	4월	6월	8월	9월	10월
비교반 평균	문장제가 아닌문항	49.6	46.2	49.8	44.0	46.7	48.8
	문장제 문항	36.1	20.7	35.9	26.0	30.9	32.8
	편차	13.5	25.5	13.9	18.0	15.8	16.0
실험반	문장제가 아닌문항	48.7	47.0	50.5	44.5	45.3	50.5
	문장제 문항	35.8	21.9	37.1	27.9	33.4	34.7
	편차	12.9	25.1	13.4	16.6	11.9	15.8

<표 6>을 그래프로 그려보면



<그림1> 문장제의 정답률



<그림 2> 문장제가 아닌 문제의 정답률

(1) 실험반과 비교반의 문장제 문제는 <표 6>와 <그림 1>에서 보듯이 3월부터 시간이 지나면서 6월부터는 성적이 점점 향상됨을 알 수 있다. (단, 4월 이후부터 Polya의 문제 해결 과정을 적용에 따라 실험반을 지도하였다.)

(2) 비교반과 실험반의 일반문항의 정답률 <표 6>와 <그림 2>에서 보면 전체 성적 편차가 크지 않음을 비교할 수 있다.

(3) 월별 비교반과 실험반의 문장제 정답률을 <그림 1>에서 보듯이 일반문항 정답률보다 현저히 낮은 이유는 학년이 높아질수록 학습결손의 기회가 쌓여져 나타난 결과가 아닌가 생각된다.

(4) <표 6>의 3월의 문장제가 아닌 문항의 비교반과 실험반의 성적분포를 T-Procedure에 의하여 조사해 보면 다음과 같다.

<표 7>

구분	Number	Mean	Std Dev	Std Error	Min	Max
Control group (비교반)	98	49.6	11.3	1.14	21	75
Treatment group (실험반)	50	48.8	12.1	1.71	22	70

<표 8>

Variance	T	DF	Prob> | T |
Unequal	0.42	92.8	0.67
Equal	0.42	146.5	ⓑ0.6693

Variances are equal, F'=1.15, DF =(49.97),

ⓐ Prob> F' = 0.5460

ⓐ의 값이 0.05보다 크므로 95% 신뢰도로 볼 때 실험반과 비교반은 같은 분산을 갖는다. 따라서 ⓑ반에서부터 0.6693이 0.05보다 크므로 95% 신뢰도에서 생각할 때 실험반과 비교반은 별 차이가 없다고 말할 수 있다.

<표 6>에서 3월의 문장제 문제의 비교반과 실험반의 성적분포를 T-Procedure를 조사해 보면 다음과 같다.

<표 9>

구분	Number	Mean	Std Dev	Std Error	Min	Max
Control group (비교반)	98	37.1	7.48	0.76	20	60
Treatment group (실험반)	50	35.8	7.21	1.01	25	55

<표 10>

Variance	T	DF	Prob> | T |
Unequal	1.05	102.0	0.2960
Equal	1.04	146.0	ⓑ0.3009

Variances are equal, F'=1.08, DF =(97.49),

ⓐ Prob> F' = 0.7921

ⓐ의 값이 0.05보다 크므로 95% 신뢰도로 볼 때 실험반과 비교반은 같은 분산을 갖는다 할수 있고 따라서 ⓑ로부터 실험반과 비교반은 별 차이가 없다고 할 수 있다. (95% 신뢰도) (왜냐하면 0.3009>0.05)

위의 결과에 의하여 3월의 비교반과 실험반의 성적은 문장제가 아닌 문항과 문장제 문항의 성적은 비슷하거나 같다고 할 수 있다.

<표 6>에서 10월의 문장제가 아닌 문항의 비교반과 실험반의 성적분포를

T-Procedure를 조사해 보면 다음과 같다.

<표 11>

구분	Number	Mean	Std Dev	Std Error	Min	Max
Control group (비교반)	98	50.6	11.42	1.44	22	70
Treatment group (실험반)	50	49.2	12.42	1.53	22	75

<표 12>

Variance	T	DF	Prob> | T |
Unequal	0.51	93.8	0.69
Equal	0.44	136	ⓑ0.6893

Variances are equal, F'=1.08, DF =(97.49),

ⓐ Prob> F' = 0.5560

ⓐ의 값이 0.05보다 크므로 95%의 신뢰도로 볼 때 실험반과 비교반은 같은 분산을 갖는다고 할 수 있고 따라서 ⓑ로부터 실험반과 비교반은 별 차이가 없다고 이야기 할 수 있다. (95%신뢰도)

<표 6>의 10월의 문장제 문항은 비교반과 실험반의 성적분포를 T-Procedure에 의하여 조사해 보면 다음과 같다.

<표 13>

구분	Number	Mean	Std Dev	Std Error	Min	Max
Control group (비교반)	98	36.4	8.13	0.82	18	70
Treatment group (실험반)	50	39.1	9.02	1.27	20	75

<표 14>

Variance	T	DF	Prob> | T |
Unequal	1.72	90.2	0.08
Equal	1.79	146.0	ⓑ0.0491

Variances are equal, F'=1.08, DF =(97.49),

ⓐ Prob> F' = 0.3840

ⓐ의 값이 0.05보다 크므로 90% 신뢰도로 볼 때 실험반과 비교반은 같은 분산을 갖는다고 할 수 있고 따라서 ⓑ로부터 0.0761<0.1 이므로 실험반이 비교반보다 성적이 더 좋다고 할 수 있다.

(5) <그림1>에서 비교반과 실험반의 문장제 정답률의 편차가 크지 않는 이유는 문장제의 해결은 저학년부터 수학적 기본 정의와 기초가 필요한 것이므로 교사의 세심

한 관심과 연구가 절실히 필요하다고 생각된다.

<그림 2>의 문장제가 아닌 문항에서 모의고사 결과를 보면 비교반과 실험반의 성적분포는 별 차의 없이 거의 비슷하다는 결과를 알수 있다.

<연구 2>: 연구1에서 신뢰성을 높이기 위해서 현행 고등학교의 여러 종류의 교과서에 나오는 문장제 가운데서 표본조사용의 문제를 주관식 10문항을 선정하여 비교반과 실험반에 평가를 실시하여 그 결과를 비교 분석하면 다음과 같다. 문장제 평가문항은 부록에 제시한다.

<표 15> 비교반과 실험반의 성적 분포표

반별 / 교사	비교반	실험반
연구자	33.6	37.1

<표 16>

구분	Number	Mean	Std Dev	Std Error	Min	Max
Control group (비교반)	98	33.6	11.6	0.95	5	70
Treatment group (실험반)	50	37.1	8.7	1.23	20	60

<표 18>

Variance	T	DF	Prob> | T |
Unequal	-2.2	109.6	ⓑ 0.0287
Equal	-1.91	197.0	0.0578

Variances are equal, F'=1.82, DF =(149.48),

ⓐ Prob> F' = 0.0176

위의 표본집단의 성적에 대한 성적분포를 T-Test procedure 에 의하여 분석해 보면

첫째, 각 군의 분산이 같은지 다른지 증명해보면 ⓐ은 동분상에 관한 검증의 p-value로써 p가 0.0176이므로 유의수준 5%(0.05)에 비해 작으므로 두 군의 분산이 다르다 할 수 있다. 이 경우 두 군의 평균값에 대한 검증은 ⓑ를 이용하게 되는데 이 p-value 역시 α=0.05보다 작으므로 두 군간의 평균의 차이가 있음을 알 수 있다. 특히 평균(실험반) - 평균(비교반) = 2.2166 이므로 실험반의 평균이 비교반의 평균보다 크다고 할 수 있다. 이런 결과로 실험반이 비교반보다 성적이 향상되었음을 알 수 있다.

<표 15>에서 비교반과 실험반의 평균을 비교해 보면 비교반보다 실험반이 평균이 더 높음을 알 수 있다. 이런 결과로 실험반이 비교반보다 성적이 향상되었음을 알 수 있다.

V. 이론적 배경 및 문제해결의 적용방법

1. 이론적 배경

문제해결이란 과거에 배운 지식 이해 기능 등을 이용하여 문제를 해결하는 과정이다. 문제해결 과정에서는 정보와 사실들을 분석 종합하는 기능이 중요하며 결국 문제해결에 성공하기 위해서는 학습하는 방법을 배워야 한다.

문제해결에서 중요한 것은 단순한 답이 이니라 답을 이끌어내는 사고과정으로 문제 상황에 따라 사고과정은 아주 다양하게 나타난다. 그 동안 우리는 이 문제는 이렇게 풀고 저 문제는 저렇게 푼다라고 강조하면서 개별문제 또는 그와 유사한 문제에 대한 풀이방법을 나름대로 지도해 왔다. 그러나 이는 문제마다의 풀이 방법이 달라 학생들은 수학에 중압감을 갖고, 수학은 어렵고 재미없는 과목이라는 속단 속에 수학을 멀리하게 하는 원인이 되기도 한다. 따라서 모든 종류의 문제를 해결하는 방법의 공통된 특성을 찾아낼 수 있다면 학생들은 수학적 문제해결 능력이 향상될 수 있을 것이고, 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖게 될 것이다. 따라서 Polya가 제시한 문제풀이 전략은 단순히 개별학습에서 강조하듯 선행개념의 제시가 아니라 학생들로 하여금 창의적 사고활동을 활발하게 할 수 있는 지침으로 보아야 한다.

2 문제해결 전략 방법

수학의 목표는 기초적인 개념, 원리 법칙을 이해하게하고 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는데 있다. 문장제는 단순한 학문이 아리라 고도의 사고력과 논리를 요하는 계통적인 학문이기에 세심한 노력과 연구가 필요한 분야이다. 이런 문장제를 효율적으로 지도하는 문제해결 전략방법은 다음과 같다.

(1) 일반적 반응

문장제를 기피하고 어려워 하므로 대부분의 학생들이 많은 문제를 푸는데 시간에 쫒겨 문장제 문제 해결에 대한 집착력이 떨어지므로 문장제 문제의 이해도가 낮아 식을 세우는데 많은 어려움을 겪고 있다.

문장제는 여러 단원의 통합적인 문제이기에, 수학의 전영역에 대한 기초학력이 결손으로 응용력이 뒤떨어져서 많은 학생들이 문제 해결에 많은 어려움을 겪고 있다.

또한 수학의 기초개념, 원리, 법칙에 대한 지도는 구체적이고 확실하게 지도하려는 경향이 있으나 문장제를 푸는데 교사의 지도방법이 소홀하여 구체적 해결방법을 제시하지 않고 있다.

(2) 적용방법

Polya의 문제해결과정을 4단계로 나누어 적용하였고 즉, 1단계는 문제 이해단계, 2단계는 문제 해결계획 수립의 단계, 3단계는 실행의 단계, 마지막으로 검정(반성)의 4단계이다. 1단계에서 교사의 역할은 문제를 정확히 읽고 그문제를 정확히 파악할수 있게 질의 응답을 통하여 이해를 할 수 있게 하였다. 2단계에서는 파악된 문제를 보다 쉽게 이해시키기 위해서 자신이 가지고 있는 수학적 지식, 정보를 총 동원하여 문제를 해결하는 식을 세울 수 있도록 지도하였다.

학생 자신이 가장 저항을 느끼는 단계이므로 본 단계를 가장 중요시하게 지도하였다. 수학적 기초 지식이나 재능이 부족한 학생에 대해서는 아이디어를 개별적으로 제공해 주었을 때 더욱 성취감을 가지고 문제 해결에 임하였다.

3단계에서는 계획된 수식을 정확하게 계산할 수 있게 격려하고 지도하였다.

4단계에서는 풀이 과정을 확인하고 그 결과를 격려, 칭찬하고, 다른 해결방법을 모색해 보았다. 또한 이와 유사한 문제 해결을 경험하도록 지도하였다.

(3) 적용 후 반응

적용 후 처음에는 학생들이 익숙해 하지 않고 조급하게 결과를 기대하는 경향을 보였고, 일정 기간 경과 후 교사의 꾸준한 지도로 문장제를 이해 체계적으로 이해하려는 노력이 엿보였다. 문장제를 막연히 두려워하는 단계를 벗어나 쉽게 접근하려는 시도를 하였다. 당황하지 않고 차근차근 문제해결의 식을 세우는 습관이 생겼다. 어려운 문장제를 쉽게 포기하지 않고 문제를 해결하려는 과제집착력이 이전보다 더 돋보였다.

참고로 각 단계에서 일어나는 구체적인 발문과 지문은 다음과 같다.

◇ Polya의 문제해결 전략 과정 ◇

단 계	문제 해결의 구체적 장면
1 단계: 문제 이해의 단계	○ 주어진 조건과 미지의 것은 무엇인가? ○ 자료는 무엇인가? ○ 주어진 조건은 미지의 것을 구하는데 충분한가? 또는 불충분한가? 또는 남아도는가? 또는 모순되는가? ○ 그림을 그리고 적당한 기호를 도입할 수 있는가? ○ 조건의 각부를 분리하여 쓸 수 있는가?
2 단계: 해결 계획 수립의 단계	○ 앞에서 이와 같은(유사한) 문제를 풀어 본 적은 없는가? ○ 그렇지 않으며 약간 다른 형태로 된 같은 문제를 본 일이 있는가? ○ 유사 문제를 풀은 경험을 살려 그 방법이나 결과를 이용할 수 없을까? ○ 문제를 다른 말로 표현할 수 없을까? ○ 정의를 생각하라. ○ 만약 문제가 풀어지지 않으면 무엇인가? 이와 관련된 쉽고 비슷한 문제, 특수한 문제, 일반적인 문제, 유추적인 문제는 풀 수 없을까? 문제의 일부분은 풀어질 수 있는가? ○ 일부의 조건을 버리거나 또는 관련한 조건을 취할 때 문제는 풀어질 수 있는가? ○ 주어진 조건은 모두 사용되었는가? ○ 문제에 담겨 있는 본질적 개념은 모두 고려되었는가?
3단계: 실행의 단계	○ 계획을 실행할 때는 각 단계를 검토하고, 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?
4 단계: 검증(반성) 단계	○ 논증 과정을 점검할 수 있는가? ○ 이론의 근거를 가지고 설명할 수 있는가? ○ 결과를 다른 방법으로 구할 수 있는가? ○ 다른 문제에 이 결과나 방법을 응용할 수 있는가?

VI. 결 론

1. 고등학교 3학년 학생들의 문장제 해결력의 실태를 파악하기 위하여 표본조사를 실시해 본 결과 일반 문제보다 문장제 문제 해결 능력이 현저하게 뒤떨어진다는 것을 알 수 있었다.

2. 문장이 길고 복잡하여 식을 세우기가 어려운 저해요인은 Polya의 문장제 해결전략을 통하여 학생들이 계획을 세워 차근차근하게 식을 세우는 습관을 길러주었다.

3. 흥미가 상실하여 문제를 포기한 저해요인은 Polya의 문장제 해결전략을 통하여 어려운 문장제를 포기하지 않고 문제를 해결할려는 과제집착력이 향상되어 흥미를 상실하지 않았기 때문에 Polya의 문제해결 전략이 많은 도움을 주었다고 생각된다.

4. 문제해결 전략에 대한 적극적인 지도가 문제해결력 성취에 효과가 있고 학생들과 다양한 학습환경을 마련하고 효율적인 학습지도를 위하여 끊임없이 현장에서의 실천 연구가 필요하다.

5. Polya 의 문제해결 과정에서 4단계로 비교적 지도단계가 섬세한 발문과 권고가 있어 문제를 충분히 검토하고 이해할 수 있도록 학습지도에 도움을 준다.

6. 현행 교과서 구성은 학생들에게 문장제를 지도하는 면에서 학습교재가 미비하기에 이를 보안할 수 있는 교수학습 자료가 시급한 현실에 놓여있다.

참 고 문 헌

강옥기 (1994). *중등학교에서의 문제해결 학습 지도,* 청람수학교육 제 4집, 한국 교원대학교, pp.129-159.

대구광역시 (1998). *학업 성취 수준별 교수. 학습 및 평가 자료 개발 · 적용.*

신현성 (1995). *수학 교육론,* 경문사, pp.166-207.

우정호 (1995). *어떻게 문제를 풀 것인가?,* 천재교육, pp.22-66.

이상원 (1990). *초등학교의 효율적인 문장제 지도방안,* 영남대학교 석사학위 논문.

이재돈. *수학교육론* (上,下), 대구대학교 사범대학 수학교육과.

<부록1>: 3월에서 10월까지 실험반에 활용한 대표적인 10개 문항

1. 목욕탕에 세 개의 수도꼭지 P, Q, R로 물을 채우려고 한다. 세 개를 모두 틀어 물을 채우면 1시간, P와 R을 틀어 채우려면 1.5시간, Q와 R을 틀어 채우면 2시간 걸린다. P와 Q를 틀어 채울 때 걸리는 시간을 구하여라.

2. 어떤 용기에 물이 담겨 있다. 현재 이 용기에 남아 있는 물의 양은 전날 같은 시각의 물의 양의 9%이라 한다. 이와 같은 추세로 물의 양이 줄어든다면 남아 있는 물의 양이 현재의 절반 이하가 되려면 최소한 며칠이 걸리는가?

3. 100g의 식염수가 있다. 여기에서 20g을 덜어 내고 그 대신에 물 20g을 더 넣었다. 이 조작을 되풀이하면 몇 회 후에 그 농도가 처음 농도의 $\frac{1}{9}$ 이하로 되겠는가? (단, log2 = 0.3010, log3 = 0.4771)

4. 어느 공장에 똑같은 제품을 만드는 A, B, C 세가지 형의 기계가 있다고 한다. 1시간 동안에 A형 1대와 B형 2대는 20개의 제품을, B형 1대와 C형 2대는 30개의 제품을, A형 1대와 C형 1대는 25개의 제품을 만들 수 있다고 한다. A, B, C 각각을 1대씩 동시에 이용하여 290개의 제품을 만들기 위해서는 몇 시간의 걸리겠는지 구하여라.

5. 어떤 그릇에 농도가 80%인 소금물 100g이 들어 있다. 이 그릇에서 10g의 소금물을 퍼내고 대신 물 10g을 넣는 시행을 여러 번 반복했을 때, 몇 번 후에 처음으로 그 농도가 20%보다 적어지겠는가? (단 log2 = 0.3010, log3 = 0.4771)

6. 철수는 50원짜리 동전 몇 개와 100원짜리 몇 개, 500원짜리 몇 개를 가지고 있다. 500원짜리 동전의 개수는 50원짜리 동전의 개수보다 2배가 되고 100원짜리 동전의 개수는 50원짜리 동전의 3배가 된다. 동전은 모두 합하여 5400원이다. 현재 철수는 몇 개씩 가지고 있는가?

7. 두 사람이 216쪽의 책을 읽는데, 유정이는 가영이보다 하루에 3쪽씩 더 읽어서 가영이보다 6일 빨리 읽었다. 유정이가 하루에 읽을 쪽수를 구하여라. (단 두 사람 모두 마지막 날까지 매일 일정한 쪽수를 읽는다고 한다.)

8. 240km 떨어져 있는 두 지점 A, B를 자동차로 왕복하는 데 돌아올 때는 갈 때보다 시속 20km씩 빨리 달려서 왕복 7시간 걸렸다. 갈 때의 속력을 구하여라.

9. 앞면에는 흰색, 뒷면에는 검은색이 칠해진 정삼각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 각 변의 중점을 이은 선분을 경계로 잘라 그 중 가운데 삼각형을 뒤집어

놓으면 합동인 4개의 정삼각형 중 세 개는 흰색이고, 가운데 하나는 검은색이다. 이 4개의 삼각형을 처음과 같은 방법으로 시행하면 다음 그림과 같다. 이와 같은 시행을 계속해서 4회 하였을 때, 만들어진 삼각형 중에서 흰색인 삼각형의 개수는?

10. 갑, 을 두 사람이 각각 두 지점 A, B를 자동차로 출발하여 상대방을 향하여 일정한 속도로 달렸다. 도중에 만났을 때 갑이 을보다 36km 더 달렸음을 알았다. 갑, 을 두사람이 만난 후 갑은 3시간이 걸려 B에, 을은 12시간이 걸려 A에 도착했다. 두 지점 A, B 사이의 거리는 몇 km인가?

<부록2> : 앞의 예시 문항을 Polya의 4단계를 적용했을 때의 교안

<문 1>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다 · 수도꼭지의 종류는? · 세 개 모두 틀면 몇 시간 걸리는가? · P와 R을 틀면 몇 시간 걸리는가? · 구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단 계	· 만약, 세 수도꼭지를 각각 틀었을 때 한 시간당 채우는 량을 $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$이라 할 때, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{r})\times\frac{3}{2}=1$, $(\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\times 2=1$이라면 문제의 뜻에 맞는가? · 그렇다면 p, q, r은 각각 얼마인가? · 그러면 $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\times t=1$ 이라 할 때, t(구하는 시간)는 얼마인가?	$p=2$ $q=3$ $r=6$ $t=\frac{6}{5}$ =1.2시간 =1시간 12분
실행	· 계획을 세워 풀어본다. · 학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. (필요시 질문을 던진다.) · 무엇을 x라 놓아야 할까? · 연립 방정식의 풀이를 확실히 익힌다.	
반성	· 풀이 과정과 전략을 서로 이야기하게 하고 학생 3명 정도가 자신의 풀이과정을 칠판에 써서 설명하도록 한다. 다 듣고 난 후 풀이를 해준다. 속도 문제와 연관지어 풀이해 볼 수도 있다. 부피와 시간, 거리와 시간 등 여러 가지 문제와 연관지어 풀 수도 있다. · 학생 답변의 과정에 따라 칭찬과격려을 아끼지 않는다.	각 수도꼭지에서 한시간에 나오는 물의 양은 각각 p, q, r 놓고 목욕탕의 부피를 1로 잡는다. (속도를 묻는 문제와 연관지어 생각할 수 있다.

<문 2>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	・문제를 크게 읽는다. ・현재의 물의 양은 전날의 물의 양의 몇 %인가? ・매일 전날의 양의 몇%가 남아 있는가? ・만일 오늘의 양이 100이면 내일의 양은 얼마인가? ・구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단계	・만약 전날의 물의 양을 A라 할 때, 현재의 물의 양 $A\times\frac{9}{100}$ 이 라면 문제의 뜻에 맞는가? ・현재 물의 양이 $A\times\frac{9}{100}$ 일 때, 내일의 물의 양은 $A\times\frac{9}{100}\times\frac{9}{100}$ 라면 문제의 뜻에 맞는가? ・그러면 현재의 양의 $\frac{1}{2}$ 이하가 되려면 며칠이 걸리겠는가? 현재의 양=B $B\times(\frac{9}{100})^n \leq B\times\frac{1}{2}$ ・n의 값을 구한다. n $\leqq 0.xxx$	
실행	・계획을 세워 푼다. ・학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. (필요시 질문을 던진다.) ・푸는 방법을 여러 가지가 있을 거다 ・log의 활용과 풀이를 확실히 익힌다.	
반성	・등비수열과 로그를 응용해서 낸 문제이다. ・1회, 2회 반복적으로 해보고 규칙을 발견하여 일반항을 찾아 내면 쉽게 풀수 있다. ・풀이과정을 일일이 학생들에게 질문을 던져 차근차근하게 식을 세우는 습관을 길러 주도록 세심한 노력을 한다.	

<문 3>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	・문제를 크게 읽는다. ・식염수가 몇 g 있는가? ・여기서 무엇을 얼마만큼 덜어내는가? ・그 대신에 무엇을 얼마만큼 넣는가? ・처음의 농도는 몇 %인가? ・구하고자 하는 것은 무엇인가?	・위 2번 문제와 비슷한 성격의 문제임을 유의한다.
해결 계획 단계	・만약 100g의 식염수에서 20g을 덜어내고 대신에 물 20g을 넣으면 문제의 뜻에 맞는가? ・그렇다면 농도는 몇 %인가? ・1회 시행 후의 식염수에서 다시 20g을 내고 물 20g을 넣으면 농도는 몇 %인가? ・그렇다면 농도는 몇 %인가? ・몇 회 후 농도가 처음의 $\frac{1}{9}$ 이하가 되는가? $\frac{100\times(\frac{8}{10})^n}{100} \leq \frac{1}{9}\times 1$ $n \geqq 9.xxx$ (분모: 용지+용매->항상 100으로 일정) (분자: 매회 실행 후 80%만 남음)	
실행	・계획을 세워 풀어본다. ・학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. (필요시 질문을 던진다.) ・푸는 방법은 여러 가지가 있을 거다. ・log의 활용과 성질을 확실히 익힌다.	
반성	・화학이나 물리에서 활용하는 공식을 수학문제에 적용해 본다. ・농도에 관한 기본적인 설명을 이해하고 자신감을 갖도록 한다. ・전체 물의 양을 100으로 변함 없음을 응용했다. ・식에 맞게 상세한 그림을 그려 이해를 보다 쉽게 시킨다.	

<문 4>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · 기계의 종류는? · 1시간 동안에 A형 1대와 B형 2대는 몇 개의 제품을 만드는가? · 1시간 동안에 B형 1대와 C형 2대는 몇 개의 제품을 만드는가? · 1시간 동안에 A형 1대와 C형 1대는 몇 개의 제품을 만드는가? · 구하고자 하는 것은 무엇인가?	· 위 1번 문제와 비슷한 성격의 문제임을 유의한다.
해결 계획 단계	· 1시간 동안에 각각의 기계 한 개가 만들 수 있는 제품의 양을 a, b, c라 한다. · 만약, $a+b\times2=20, b+c\times2=30, a+c=25$라면 문제의 뜻에 맞는가? · 그렇다면 a, b, c는 각각 얼마인가? · 그러면 (a+b+c)t=290일 때, t(걸리는 시간)는 얼마인가?	
실행	· 계획을 세워 풀어본다. · 학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. (필요시 질문을 던진다.) · 무엇을 x라 놓아야 할까? · 연립 방정식의 풀이를 확실히 익힌다.	
반성	· 기계당 한시간에 만드는 양은 a, b, c라고 정하고 관 계식을 만든다. · 연립 일차방정식으로 푼다. · 전에 설명한 내용은 다시 반복 시킨다.	

<문 5>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · 몇 %의 소금물이 얼마큼 들어 있는가? · 여기서 소금물을 몇 g가 내고 대신에 물을 몇 g 넣는가? · 구하고자 하는 것은 무엇인가?	· 위 2번, 3번 문제와 비슷한 성격의 문제임을 유의한다.
해결 계획 단계	· 만약 100g의 소금물에 10g을 덜어내고 대신에 물 10g을 넣으면 문제 뜻에 맞는가? · 그렇다면 농도는 몇 %인가? · 1회 시행 후 소금물에서 다시 10g을 덜어내고 대신에 물 10g을 넣으면 문제의 뜻에 맞는가? · 그렇다면 농도는 몇 %인가? · 몇 회 시행 후 농도가 20%보다 적어지겠는가? $\frac{100\times(\frac{9}{10})^n}{100} \leqq \frac{20}{100}\times1$ $n \geqq 15.xxx$ (분모: 용질+용매-> 항상 100으로 일정) (분자: 매회 실행후 90%만 남음)	
실행	· 계획을 세워 풀어본다. · 학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. (필요시 질문을 던진다.) · 푸는 방법은 여러 가지가 있을 거다. · log의 활용과 성질을 확실히 익힌다.	
반성	· 물의 양이 100g으로 변화없음을 이용한다. · 소금의 양은 등비수열로 푼다. · 계산과정에 오류가 발생하지 않도록 주의 시킨다.(효율적인 계산방법을 지도한다.	

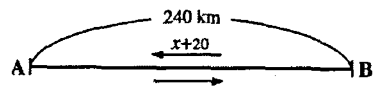
<문 6>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · 동전의 종류는? · 500원 짜리 동전의 개수는 50원 짜리 동전의 몇 배인가? · 100원 짜리 동전의 개수는 50원 자리 동전의 몇 배인가? · 만약, 50원 짜리가 2개라면 ①100원 짜리는 몇 개인가? ②500원 짜리는 몇 개인가? · 구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단 계	· 만약, 50원 짜리가 2개이고, 100원 짜리가 6개이고, 500원 짜리가 4개라면 위 문제의 뜻에 맞는가? · 그렇다면 그것의 합계는 얼마인가? · 그렇다면 50원 짜리 3개, 100원 짜리 9개, 500원 짜리 6개도 위 문제의 뜻에 맞는가? · 합계를 구하면?	
실행	· 계획을 세워 풀어 봅시다. · 학생이 푸는 모습을 잠시 관찰한다. · 관찰하면서 필요에 따라 다음 질문을 던진다. · 푸는 방법은 2가지 정도가 있을 거야. · 무엇을 x로 놓아야 할까?(방정식을 이용했을 때는)	
반성	· 동전 종류에 따라 미지수를 정하고 관계식을 만들면 된다. · 학생들에게 여러 가지 질문들을 던져본다.	

<문 7>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · 몇 명을 비교하는가? · 유정이와 가영이가 하루동안 읽는 쪽수는? · 누가 며칠 더 빨리 읽는가? · 구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단계	· 만약 유정이가 하루에 12장, 가영이가 하루에 9장 읽으면 위 문제 뜻에 맞는가? · 두 명은 각각 며칠 걸리는가?	
실행	· 계획을 세워 풀어 봅시다. · 무엇을 x로 놓아야 할까?	
반성	· 한사람이 읽을 양을 미지수로 정한다. · 구해야 할 값을 x로 놓으면 풀이하기가 쉽다. · 가능한한 일상생활에 연관지어 생각해 본다. · 비슷한 문항은 학생을 지명하여 얼마만큼 알고 있는지 확인해 본다,	

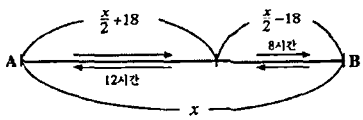
<문 8>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · A, B 사이 거리는? · 갈 때와 올 때 속력 차이는? · 몇 시간 걸렸는가? · 구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단 계	· 만약 갈 때 속력이 10km/h, 올 때 속력이 30km/h 로 달렸다면 문제 뜻에 맞는가? · 왕복 몇 시간 걸리는가? · 도식화 할 수 있는가 	
실행	· 계획을 세워 풀어 봅시다. · 무엇을 x로 놓아야 할까? · 학생의 사고과정을 직접 설명시케 본다.	
반성	· 수직선을 긋고 관계를 알아본다. · 속도를 미지수로 놓고 푼다. · 학생들에게 여러 가지 경우를 질문을 해보고 이 문제가 무엇을 묻는 문제인지 질문을 해본다.	

<문 9>

단계	교수 학습 활동	비고
문제 이해	· 문제를 크게 읽는다. · 삼각형의 종류는? · 매번의 규칙은 무엇인가? · 구하고자 하는 것은?	
해결 계획 단 계	· 1회 실행 후 흰색 삼각형 개수와 검은색 삼각형 개수는? · 2회 실행 후 흰색 삼각형 개수와 검은색 삼각형 개수는? · 3회 실행 후 흰색 삼각형 개수와 검은색 삼각형 개수는? · 규칙은?	
실행	· 계획을 세워 풀어봅시다.	
반성	· 그림을 여러번 그려보면서 관계식을 세운다. · 곱하기를 이용해 관계를 살피는 것이 더 풀이하기 쉽다. · 시행때 마다 규칙을 발견해 본다. · 다른 풀이 방법이 없는지 학생들에게 질문해 보고 있다면 다른 풀이 방법으로 풀이해 본다.	

<문 10>

<table>
<tr><th>단계</th><th>교수 학습 활동</th><th>비고</th></tr>
<tr><td>문제
이해</td><td>· 문제를 읽는다.
· 만났을 때 갑은 을보다 몇 km 더 달렸는가?
· 구하고자 하는 것은?</td><td></td></tr>
<tr><td>해결 계획
단 계</td><td>· 그림으로 도식화 할 수 있는가

</td><td></td></tr>
<tr><td>실행</td><td>· 계획을 세워 풀어봅시다.
· 무엇을 x로 놓아야 할까?</td><td></td></tr>
<tr><td>반성</td><td>· 속도와 거리 및 가속도에 관한 문제는 자주 응용되어 출제된다.
· 그림을 이용해서 미지수를 정하면 풀이하기 쉽다.
· 미분, 적분에서도 속도, 거리, 가속도 문제를 낸다.
· 통합 단원적으로 공부하면 좋겠다.</td><td></td></tr>
</table>

<부록 3>: 1998년 10월 30일에 실시한 문장제 평가 문항

1. 매시 3km로 흐르는 강에서 8km 떨어진 두 지점을 배로 오르내리는 데 5시간이 걸렸다. 정지된 물 위에서의 배의 속력은 시속 몇 km인가?

2. 240쪽의 책을 갑은 을보다 하루에 4쪽씩 더 읽어 을보다 5일 빨리 더 읽었다. 갑, 을은 각각 하루에 몇 쪽씩 읽었는가? 단, 두 사람은 각각 매일 일정한 양을 읽는다고 한다.

3. 두 대의 보트 A, B의 속력은 같고, 항상 일정하다고 한다. A는 정지된 물에서, B는 일정한 속도로 흐르는 강물에서 똑같이 100km의 거리를 왕복운행하였다면, 어느 보트가 더 빨리 운행하였겠는가?

4. 갑, 을, 병 세 사람이 공동으로 일하면 x일 만에 완성되는 공사가 있다. 이 공사를 갑, 을, 병 세 사람이 각각 혼자서 일하면 $(x+6)$일, $(x+15)$일, $2x$일이 걸린다고 한다. 이 일을 병 혼자서 하면 며칠 걸리겠는가?

5. A 그릇에는 농도 p%의 소금물 300g, B 그릇에는 농도 q%의 소금물 300g이 있다. A, B 두 그릇에서 동시에 100g씩 퍼내어 서로 교환해 섞는 시행을 n회 반복한 후, A 그릇의 소금물의 농도를 a_n%, B 그릇의 소금물의 농도를 b_n%라고 하면, 이차

정사각행렬 X에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ \text{X행렬은?}$$

6. 가로, 세로의 길이와 높이가 각각 3cm, 4cm, 5cm인 직육면체가 있다. 가로, 세로, 높이를 각각 같은 길이 x cm 만큼 늘여서 직육면체의 부피가 120cm^3 이상 210cm^3 이하가 되게 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

7. A 지점에서 280km 떨어져 있는 B 지점까지 운행하는 기차가 있다. A 지점을 출발하여 B 지점을 12km 남겨 놓고 기관에 고장이 생겨서 속력을 처음보다 시속 20km를 줄였더니, 예정보다 30분 늦게 도착하였다. 이 기차의 처음 속력을 구하여라.

8. A 항구에서 B 항구를 향하여 일정한 속력으로 항해하는 배가 있다. 항로의 $\frac{2}{3}$를 왔을 때, 기관 고장 때문에 그 때부터 매시 6km 감속하여 B 항구에 도착하였다. 이 때, 걸린 전체의 시간은 처음부터 정규 속력보다 매시 4km 느리게 항해한 것과 같은 시간이라고 한다. 배의 처음 속력을 구하여라.

9. 그릇 A에는 10%의 소금물 300g, 그릇 B에는 5%의 소금물 300g이 들어있다. A, B로부터 각각 100g씩 취해서 A의 것은 B에, B의 것은 A에 넣는 조작을 100번 거듭한 결과 A의 소금물은 a%, B의 소금물은 b%가 되었다고 한다. 이 때, $\frac{1}{4}(a+b)$의 값을 구하여라.

10. 정부가 통일 이후 필요한 통일비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2001년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2001년 1월 1일부터 10조 원을 적립하기 시작하면, 2010년 12월 31일까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조 원인가? (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고, $(1.06)^{10}$은 1.8로 계산한다.)

<부록4>: 설문지

이 설문지는 여러분의 의견을 알아보고 이를 앞으로의 교과 연구에 반영하여 효과적인 문장제 지도방안을 마련하기 위한 연구의 자료로 사용코자 합니다. 학생 여러분이 지금까지 수업을 지도 받으면서 평소에 느꼈던 점을 솔직하게 표시해 주시기 바랍니다.

※문장제 문제란? 수식보다는 문장으로 꾸며져서 수식화 과정을 거쳐서 문제가 풀리는 문제 즉 거리, 속도문제, 농도문제, 계수문제, 척도영역문제,(수학외적인 문제)를 말한다.

1. 학생은 대외평가나 교내평가에서 어느 문항을 먼저 해결하려고 하는가?
① 문장제가 아닌 문항 (　　)
② 문장제 문항 (　　)

2. 문장제를 싫어하는 이유는?
① 문장이 길고 복잡하기 때문에 식을 세우기가 어렵다.(　　)
② 예전에 문장을 풀어본 경험으로 문제를 열심히 푼만큼 계산과정 오류와 착오 등으로 흥미가 상실하여 아예 문제를 포기해 버린다. (　　)
③ 문장제가 아닌 문제를 먼저 푼 다음, 문장제 문장을 풀기 때문에 시간적 여유가 없기 때문. (　　)
④ 문장제 문제는 문장제가 아닌 문제보다 시간이 더 소요되기 때문.(　　)
⑤ 시간과 노력에 비해 점수를 얻기 어렵다.(　　)
⑥ 이것 이외에도 다른 요인이 있어서면 구체적으로 서술해 주시기 바랍니다.
(　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

3. 현재까지 실시되고 있는 문장제 수업진행이 문제 해결에 도움이 된다고 생각합니까?(　　)
① 많은 도움이 된다. ②도움이 된다. ③ 그저 그렇다. ④ 도움이 되지 않는다.
⑤ 모르겠다.

4. 지금 까지 문장제 해결을 위한 학습 교재는 적절한가?(　　)
① 아주 적합하다. ② 적합하다. ③ 보통이다. ④ 적합하지 않다.

※끝까지 진지하게 답해 주어 감사합니다. 수고 많았습니다.