한국초등수학교육학회지 3, 41-59. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 3, 41-59.

수학에 있어서 이해와 문제 해결에 관한 소고[1]

강 신 포[2]

수학 수업에 있어서 문제 해결을 강조하는 것과 이해를 강조하는 것은 상호 버팀이 되는 관계가 된다. 교사들이 문제 해결을 통해서 수업할 때, 문제 해결에 대하여 뿐만 아니라 학생들에게 그들 자신의 이해를 계발시키기 위한 강력하고 중요한 도구를 제시한다. 학생들이 수학을 깊게 그리고 풍부하게 이해하게 됨에 따라 수학 문제를 푸는 데 수학을 이용하는 능력은 더 증가된다.

I. 서 론

NCTM에서 문제 해결은 1980년대의 학교 수학의 초점이 되어야 한다고 권고한 이래로, 문제 해결은 최근까지도 수학 교육의 주된 연구의 대상이 되고 있으며 앞으로도 계속 강조될 것이다. 문제 해결에 대해 논의하다 보면, G. Polya가 문제 해결에 기여한 업적에 대해 기술하고 있는 수많은 문헌을 보게 된다. 그는 4 단계로 된 문제 해결 모델을 제안하였고 그 첫째 단계가 문제 이해이다. 그렇게 본다면 문제 해결을 위해서는 무엇보다 문제 이해가 앞서야 한다고 본다.

이해 활동의 개념은 본 논문의 모든 개념에서 중심이다. 그러므로 3장 <이해 행위의 요소와 조건들>은 다른 어떤 것 보다 더욱 많은 공간을 차지한다. 2장 <이해와 의미>는 3장을 소개하는 역할을 한다. 그것은 일상 언어에서의 이해라는 단어의 다양한 사용과 다양한 의미에 대해 묻고, 의미와 이해 개념 사이의 관계와 의미 개념을 논한다. 그리고 3장에서는 검토되는 이해 활동이 무엇인지에 대한 질문을 강조한 주제의 풍부한 배경을 보여주고 있다. 4장 <이해의 과정>은 이해의 전 과정과 그 만의 역할과 해석과 확인을 보여준다. 5장 <이해의 향상과 문제 해결>은 수학 이해의 향상을 위한 문제 해결과 문제 해결 수업을 위한 접근과 문제 해결을 통한 이해 향상에 관해 논한다.

II. 이해와 의미

1. 이 해

이해란 단어는 비공식적 언어에서 매우 다양한 형태와 표현에 사용된다. 우리는 사람들이 어떤 것을 이해한다고 말하고, 어떤 것에 대한 이해를 말하며, 매우 다양한 이해들을 사람들은 하고 있다고 말한다.

---

1) 본 논문은 1999년도 부산교육대학교 자유과제연구 지원비에 의하여 연구되었음.
2) 부산 교육 대학교 ([677-736] 부산광역시 연제구 거제1동 263)

우리는 또한 상호간의 이해, 누군가의 발언이나 누군가의 글, 어떤 단어에 대해서도 이야기를 한다.

이제 실제로 정신적 경험이 있는데 그것을 우리는 '이해의 행위'라고 부르고, 필요할 때 이해 행위를 경험하게 하는 잠재적인 것인 이해가 있다. 이해의 행위는 어떤 관점에서 적당한 시기에 일어나는 경험이며 빨리 끝난다. 그러나 특히 교육에서 우리는 오랜 시간 동안 일어나는 인식 활동으로서 이해를 역시 말한다. 그때 우리는 이미 이해한 것이 더 나은 발전을 위하여 중요한 단계를 나타내는 이행의 행위로 이해의 과정이라는 용어를 사용한다.

수학을 이해하는 여러 가지 방법의 예는 학생들이 수학적 개념을 이해하는 데 어려워하는 데서 쉽게 볼 수 있다. Greeno(1991)는 추상적인 개념에 있어서 이해, 추론, 앎의 행동들은 마을이나 부엌, 목재소 같은 실제적 환경에서의 그것들과 흡사하다고 주장한다. 추상적 개념들은 결합되고 분리되어질 수 있는 실제 대상들처럼 여겨진다. Greeno는 만약 어떤 사람이 25×48을 암산하라는 요구를 받아서 그것을 종이와 연필로 계산하려고 한다면 매우 잘못 이해한 것이다. 만약 어떤 사람이 25나 48은 합쳐질 수도, 분해될 수도 있는 개체로서 이해하고, 48을 40+8로 그리고 40을 4×10으로, 25×4는 100으로, 100×10은 1000으로, 이제 25×8은 100의 2 배인 200, 결과는 1200으로 이해한다면 더 나은 이해가 생성된다고 한다.

2. 의 미

의미의 개념처럼 철학에서 많은 어려움을 가지게 하는 개념은 거의 없다. 그 이유는 더 일반적인 방법으로 의미를 말하려고 하는 어떤 이론의 피할 수 없는 특징에 있는지 모른다. 어떤 의미의 정의는 그 자체가 의미를 가진다. 그래서 드물게는 의미는 그 의미의 충분한 일반성을 고려하고 있다. 다른 철학자들은 다른 것의 의미에 그들 자신이 몰두한다. 그리고 그들은 의미의 다른 개념에 그들의 주의를 집중했다. 그들은 아마도 그렇게 하는 것을 옳게 여겼다. "무리수란 단어의 의미가 무엇인가?"처럼 어떤 질문은 분별할 수 있는 질문이지만, "단어의 의미가 무엇인가?"와 같은 질문이나 "의미가 무엇인가?"라는 질문은 난센스이다. 의미를 가지고 있다는 말에 대해 누군가 질문을 할 수 있는 몇 가지 문법적인 질문이 있다. 이 질문에 대하여 첫 질문은 그것이 가지고 있는 의미는 무엇인가? 그것의 가장 자연스러운 대답은 신호(sign)이다. 만일 어떤 것이 의미를 가진다면 그것은 신호이다. 혹은 신호는 의미를 가지는 것이다. 이것은 신호의 개념을 잘 이해하게 한다.

수학 수업에서 쓰이는 언어는 매우 복잡한 구조를 가지고 있다. 학생들이 배우는 수학 언어는 다차원적이다. 즉 그것의 의미가 책에 쓰여진 단어나 교사의 가르침에 의해서 결정되는 것이 아니다. 예를 들어 문제의 의미는 학생들과 교사가 주어진 상황에 따라서 그들 문제에 할당시킨 역할에 의존한다. 그 문제가 학생들에 의해서 풀려는 것과 교사에 의해서 지정되는 것은 다르다. 그 문제가 학생들에게 새로운 주제를 소개한다든지 다른 접근 방식이 허용됨을 보여주기 위해서 또는 어떤 방법을 적용하는가에 대한 학생들의 능력을 체크할 수단으로라든지, 아니면 학생들이 그들 지식의 증명을 위한 경우에 따라 (교사의 의도가 어떤 견지에 따라서) 그와 같은 각각의 상황들은 다른 '교훈적인 대조'를 이룬다.

일상적인 단어는 수학에서 다른 어떤 것을 의미한다. 그러나 특히 초등학교에서 일상 언어는 마치 설명할 어떤 것이 없는 것처럼 교사들에 의해서 빈번하게 사용된다. 학생들은 큰 수가 종이 위에 크게 쓰여진 숫자가 아니고 수평선과 수직선은 주위 공간의 방향을 뜻하는 게 아니라, 종이의 방향을 의미하는 것이다. "케이크를 만들다"에서 '만들다'는 것은 "2의 2 배는 4를 만든다"에서 '만든다'와는 다른 것이다 (Durkin & Shire 1991).

3. 이해와 의미 사이의 관계

철학자마다 이해와 의미의 개념을 관련짓는 방법 또한 다르다; 어떤 사람은 의미로써 이해를 설명하고, 다른 사람은 이해로써 의미를 설명한다. 하지만 이해가 정신적인 경험임에는 동의한다. 이해는 항상 문두에 위치한다. 최소한 몇몇 저자들은 모두 의미가 공식적인 반면 이해는 비 공식성을 담고 있다고 본다. 사회적 상호작용과 의사소통을 통해서 이해에 직면하는 것은 단지 이해의 개인적 과정에 몇 걸음 다가간 것뿐이다. 그들은 이해의 변화에 자극을 줄 수 있다고 하지만 그 변화가 받아들이는가 하는 문제는 개인적 문제로 남는다. 의미와 이해 사이의 연계성을 짓는 데 모순되지 않게 하기 위해서는 이해의 대상이 의미의 대상과 다름이 없다는 것은 인정해야 한다.

개념의 이해 혹은 사고의 이해를 말할 때 Peirce는 개념과 사고는 신호 또는 개념이나 사고 같은 인식론적 대상과 기호와 같은 언어적 목적을 구별한다. 개념이나 사고는 이해의 기본이라고 말하려고 한다. 그리고 이해에 목표로 삼는 것은 우리에게 이러한 사고나 개념들을 기호로 나타내는 것이다. 이해가 의미를 통해서 설명되어질 때 그것은 보통 이해는 의미를 완전히 장악하고 있는 것이다. 이것은 이해가 인지와 똑같은 목표를 가진다고 보는 쪽으로 생각이 기울은 몇몇 철학자에게 해당되는 말이다.

사람들은 분별력에 대한 논증 불능의 질문들을 묻는 것에서 의욕을 잃어버린다면, 그들은 모든 문명의 기초가 되는 논증 가능의 질문을 묻는 능력 또한 잃어버린다고 말한 Hannah Areudt의 현명한 격언을 상기해 보자.

수학을 가르치는 데 있어서 주어진 명제가 참인지 거짓인지에 대한 논리적 질문들을 줄이기를 원하는가? 학생들의, 수학적 이론들의 이치와 의미에 대한 질문들로부터 사실과 증명에 대한 질문들을 구별해 낼 수 있어야 한다. 하지만 후자의 질문들은 형이상학적이라고 거부하지 않고, 수학 교육의 부분과 전체로 간주해야 한다. 이런 더 많은 실용주의의 태도는 이해로써 의미를 설명하려고 하는 접근에서는 쉽게 잊혀지지 않는다.

Ajdukiewicz(1974)는 두 사람이 똑같은 방법으로 표현을 이해하는지, 혹은 표현에 똑같은 뜻을 부여하는지에 대해 결정하기 위한 4 가지 기준들을 제시했다.

① 그들은 같은 대상에 그 표현을 적용한다.
② 그들은 표현이 주어진 대상에 적용할지 어떨지를 결정하는 데 같은 방법을 사용한다.
③ 그들은 표현을 같은 문법적, 긍정적, 의문적, 명령적 형식을 사용한다고 본다.
④ 그들은 표현에서 감정적 양상을 같은 종류로 돌린다.

III. 이해 행위의 요소와 조건들

이 장에서는 이해 행위에 초점을 맞출 것이다. 그것 내부에 있는 구성 요소와 정신적인 작용을 포함하는 성질에 대해서 논의한다. 우리는 이해 행위의 내부(심리학적인)와 외부(주로 사회적인)의 행위 상태에 대해 질문하는 자세를 가질 것이다. 이해 행위에 대한 모든 주의를 기울인다. 왜냐하면 가르치는 것에서 이해 행위는 교사와 학생 양질의 주요한 관심인 듯하기 때문이다. 우리는 학생들이 어떤 이해의 방법, 어떤 이해, 어떤 지식을 얻을 수 있도록 만들기를 원한다. 그러나 우리는 이해 행위를 경험하도록 그들을 돕는 것 외의 다른 것은 할 수 없다. 더욱이, 특히 오늘날 빠르게 변화하는 과학 기술과 탈산업 세계에서 학생들은 충분히 교육을 받았다고 간주할 수 없다. 무엇보다도 먼저 어떻게 배울 것인가? 이

해의 노력, 이해 방법의 변화에 대한 끊임없는 노력을 어떻게 할 것인가를 모두 배워야 한다. 그러므로 이해 행위가 무엇으로 구성되어 있는가를 아는 것, 그것에 대해 숙고하여 얻은 의견은 그가 이해의 방법들을 가지고 있을지 모르는 모든 지식보다 미래 교사에게 더 도움이 될지 모른다.

1. 무엇이 이해 행위가 될 수 있는가?

비록 이해한다 단어는 여러 가지 의미를 알고 있지만, 이해의 대상을 또 다른 대상에 대하여 관련시키는 정신적인 작용을 의미한다. Ajdukiewicz는 그의 정의를 표현을 이해하는 것에 오직 적용시켰다. 표현을 이해하는 것은 이 표현과 그 밖의 어떤 것, 또 다른 대상 사이의 생각에 연쇄를 고의로 만든다. 이 정의를 바로 이해라는 표현을 넘어서 확장하고 싶다. 표현을 대상으로 대체할 것이다. 그리고 다른 어떤 대상이 우리 사고가 이해의 행위에 방향 짓고 있는 쪽으로 사용된다. 대상을 첫 번째는 이해의 대상이라 부르고, 두 번째는 이해의 바탕이라고 부를 것이다. 예를 들어 이해하는 대상은 수학적 용어 문제가 될 수 있다. 그리고 이해 행위에서 확실하게 잘 알려진 양식에 따라 문제를 인식할지 모른다. 이 양식은 이 문제에서 이해의 바탕이 될 것이다.

가. 대상의 개념: 수학적 대상들

여기서 대상의 의미가 무엇인가를 질문하게 된다. 이해의 대상은 신호(sign)라고 가정하고, 신호는 어떤 사람을 위한 대상을 대표하는 어떤 것이다. 그러나 신호를 어떻게 정의 내릴 수 있는가? 만약 이런 방법을 쓴다면 어떤 사람에 의해서 어떤 방법으로 이해된 것은 무엇이든지, 어떤 이 사람에게는 신호로 나타낸다고 하면 이때 신호의 개념은 이해의 개념으로 설명된다.

우리는 수학의 분야에서 이해를 함으로써 흥미를 가지게 됨에 따라 우리는 오직 수학적 대상이 무엇을 의미하는지를 설명할 수 있다. 대상의 개념과 관련된 질문은 수학 교육자들 사이에 때때로 논의된다. Greeno는 정신의 세계에서 실재는 물질의 세계에서 목재 작업장의 도구와 비교된다는 수학적 대상의 존재에 찬성하여 변론하였다. 반면에 Chervallard(1992)는 만약 그것이 적어도 한 사람에 대한 대상이라면, 대상에 대한 어떤 점을 숙고하라고 제의하였다.

그렇지만 우리는 특히 수학에서 대상들이 종종 이해 행위 안에서 다시 짜 맞춰진다는 것을 알아차려야 한다. 추상적인 개념들과 관계들은 명시하는 방법으로 전달 될 수 없다. 이 대상의 윤곽은 첫 번째 이해 행위에서 분명할 필요가 없다. 그것은 애매하고 희미할 수 있다. 사람들은 그가 이해하려고 하는 것이 무엇인가를 말할 수 없을지 모른다. 그것은 오직 이해를 통해서만이 이 대상에 대한 약간의 설명과 증명으로 이끌어간다. 그러나 여전히 이해해야 할 어떤 것이 있다는 것을 느끼지 않고는 이미 일어났던 어떤 이해의 행위에 대해서 이야기하기가 어렵다.

나. 질서와 조화

우리의 사고에서의 질서와 조화, '그것이 적당하다'는 것이 아마 가장 분명한 기준이라고 느낄 때가 있다. 우리는 내성에 의해 이러한 느낌을 안다: 어떤 것을 인식하려는 일반적인 행동은 그것을 분류하는데 있다. 즉 이름을 붙여서 다른 비슷한 대상들 사이에 질서 있게 놓는다. 예를 들면 $y=2x+3$과 같은 문제를 접했을 때 우리는 '아, 일차 방정식'이라고 스스로에게 말한다. 이해의 가장 기본적 행위는 이러한 질서의 느낌이 필요하다. 예를 들면, 대학생들의 수학적 개념의 이해는 이미 이름을 들었거나 이론,

공식을 보았던 기억에 기초할지 모른다. 그러나 이러한 기억은 분리될 수 없다. 학생은 적어도 그가 듣거나 본 것을 기억한다. 우리의 '의식의 장'에서의 질서와 조화는 형태 심리학에서 아주 중요하다. 의식의 장에서 평형화하려는 경향은 기본 특징이다. 이러한 생각은 인지 구조 평형화에 대한 Piaget의 이론에서 다시 나타난다. 동화와 조절은 이러한 구조들을 평형화하도록 하는 마음의 두 가지 작용이다.

다. 통합된 사고의 바탕에 대한 이해

통합된 원리를 발견하는 기준, 우리가 이해하려는 관계는 아마도 이해의 모든 행위들에 적용되지 않는다. 그러나, 추상적인 개념, 원리, 이론을 이해할 때 중요한 역할을 한다. 통합으로서의 생각은 Leibniz에게 아주 중요하다(인간의 이해에의 새로운 시도). 그는 이해는 사물들을 모아서 이루어지는 것을 의미하는 것이 아니라 중요한 문제는 모인 것을 어떤 관점에서 보는가에 있다. 프랑스어의 Comprendre, '이해하는 것'은 통합으로서의 '한데 모음'이라는 이 생각에 정확히 어원을 갖고 있다. 그래서 이러한 통합화에 기초한 어떤 것에 대한 인지는 우리의 이해가 구성하는 것임이 틀림없다.

과학적인 이해는 종종 복잡성을 줄이고 통합화하고 단순화하고 몇 개의 일반적인 법칙에 모두 근거함으로써 특징지어진다. 이러한 과학적 이해의 관점에서 단순화하는 사람은 모든 철학자들을 충족시키지 못한다. 예를 들어 Maslow는 그가 '적법한 설명'의 범주에 속한다고 말하는 단순화하는 사람들의 이해와 비교하기 위해 그러한 이해의 개념을 소개했다.

2. 이해 행위의 구성 요소들

이 부분에서 우리는 더욱 더 세부적으로 이해 행위의 구성 요소를 토의할 것이다. 말하자면 이해의 주체, 대상, 바탕과 이해의 대상과 연계되는 심적 작용이다.

가. 이해의 주체: 누가 이해해야 하는가?

우리는 심리학적 그리고 실제 사건에 관하여 이해 행위를 말할 때 일반적으로 각 개인에게 주어진 시간에 이해 행위가 개별적으로 일어나는 것으로 생각한다. 이러한 경우에 있어서 이해 주체는 심리학적 주체이다. 실험실이나 학급내의 학생들 간단히 말하자면 너 또는 자신이다. 그러나 어떤 수학적인 개념의 이해가 역사적으로 발전되었는가와 과거에 일어났던 어떤 이해 행위를 말할 때는 심리학적 주체의 개념은 더 이상 적절하지 않다. 새로운 이해 방법은 다소 미정 상태이다. 수학의 일반화 문제를 연구했던 폴란드의 철학자 Lubomirski(1983)는 이러한 주체의 개념에 매우 관심이 많았다. 그의 책에서 취했던 일반화에 대한 인지는 논리학의 인지가 아니라 인식론적 인지이다. 그래서 그는 일반화된 주체를 다루어야 했다. 이러한 일반화된 주체에 대한 정신적인 연구의 결과로써 주체의 일반화뿐만 아니다. Lubomirski의 의문은 하나의 수학적 입장에서 또 다른 수학적 입장으로 어떠한 인지적인 절차로서 주체의 일반화에 관하여 말하고 싶어할 때, 이러한 범주를 어떻게 이해하는가에 달려 있다.

결국 우리의 연구에 있어서 사실상 학생들에게 있어서 우리가 수학에 대한 실질적 이해에 관하여 말할 때 심리학적 주체를 빼놓고 생각할 수는 없다. 수학을 수업하는 데 있어서 교사는 일시적 주체가 아니라 매우 구체적인 사람들과 함께 해야 한다. 그러나 그 반면 우리가 보편적 개념에서 일부 수학적인 문제에 대한 이해력을 말하고자 한다면 일시적 주체에 대한 개념을 쉽게 찾을 수 있다. 우리가 알아야 할 것은 어떠한 개념이 오랜 시간에 걸쳐 어떻게 발전되었고 이러한 발전이 야기되게 한 큰 돌파구가

된 상황(의문, 문제, 역설)이다. 누가 무엇을 언제 했는가에 관해서 정확한 역사적 사실은 없다. 이것은 학생들에게 우리가 가르치는 것을 설계하고 주체의 이해 과정을 쉽게 할 수 있는 지침이 될 수 있다.

나. 이해 대상

고전심리학에서 의식이란 것은 일련의 대상 없는 감각 또는 감성이라 한다. 반면에 Gestalt 심리학에서는 의식은 항상 어떤 것에 대한 지각이다. Locke의 에세이에서 이해는 idea를 가지고 있고 또한 그것은 우리의 감각이나 정신에 작용하여 얻어낼 수 있다. 수학 교육 지침이 단지 일반적인 교육 지침의 가지였을 때부터 크나큰 단계가 이루어져 왔지만 그러한 이해의 대상이 애매 모호한 것은 수학 교육자의 활동에서 때때로 관찰되어질 수 있다.

교육에 관한 일반적인 지침은 (이해의 대상이 무엇이든지) 일반적인 이해에 관해서 말해진다. 그리고 일반적인 교육 지침은 어떤 지침을 가리키는 원칙을 공식화한다. 교수 방법은 내용을 구체화하여야 한다는 점에서 분명하게 한다. 왜냐하면 매우 명확하게 배우는 것은 내용을 상세하게 해서 가르칠 때이기 때문이다. 이해 대상에 대한 문제는 교수의 내용과 연관될 뿐만 아니라 이러한 교수의 목적과도 관련이 된다. 학교의 대수학의 체계에서 우리가 학생에게 방정식을 푸는 기법을 가르치는 것을 목적으로 정해 두던지 아니면 학생들이 문제를 푸는 데 있어서 여러 가지 접근 방법(해결)을 인식하는지 간에 똑같지는 않다. 문제를 푸는 방법 중의 하나가 즉 방정식을 해결하는 것이다. 내지는 우리가 학생들이 문제를 풀도록 하든지 아니면 그들이 대수학으로 문제를 풀게 하든지 한다. 우리가 잊어서 안 되는 것은 많은 아동들은 강제적이거나 그들의 자유로운 의사에 의해서 선택되지 않는다는 것이다. 그러므로 제도화된 교육에 있어서 이해의 대상에 대해서 말할 때는 매우 주의해야 한다. 교사에서 학생까지 이해의 대상은 그것의 획일성을 쉽게 변화시킬 수 있다. 교사에게는 대수적 방법의 문제 해결인 것이 학생에게는 기계적인 과정이 될 수 있다. 교사와 학교 기관의 요구에 부응하기 위해 행해지는 것이 학교이다. 그것은 방법론과 관계없고 재미있는 질문에 대답하는 것과도 확실히 관계없다.

다. 이해의 바탕

Ajdukiewiez에 따르면 표현을 이해하는 행위는 항상 정신적 표상에 기반을 둔다. 그는 정신적 심상과 개념(논리적 측면이 아닌, 정신적 측면)과 같은 두 종류의 표상으로 생각하였다. 물론 우리의 이해는 다른 다양한 것들에서 찾을 수도 있다. 예를 들면 생각에는 판단 또는 신념 또는 일들을 이렇고 저렇다고 하는 사고 등이다. 물론 정신적 심상과 개념 이외에 다른 종류의 표상이 있다. 이제 몇몇의 이해의 기초의 가능한 범주에 대해서 다루어 보자.

(1) 이해의 바탕으로서 표상

Ajdukiewiez는 표상을 개인에게 동시에 일어나는 정신적 경험이라고 정의한다. 즉 주어진 개인의 내면 속에서, 주어진 순간에 일어나는 한정된 경험을 말한다. 이해되고 있는 대상의 표상에 바탕을 둔 이해의 행위에 있어서 주체는 이러한 대상에 대해서 평가하거나 판단하지 않는다. 이해의 대상은 단지 어떤 정신적인 이미지와 설명에 부합될 뿐이다. 예를 들어 만약 이해의 대상이 게임이라면, 게임의 이론에 전문가가 아닌 누군가가 축구, 하키, 테니스, 브리지, 포커와 같은 게임을 기억하게 될지 모르거나 내기가 걸려있고, 이긴 자와 진 자가 있는 오락 활동을 의미하는 것으로 게임의 개념을 정리할지 모른다.

Ajdukiewiez는 단지 두 가지 종류의 표상, 즉 심적 이미지 표상과 개념 표상으로 구분한다. 심적 이

미지의 개념은 시각적인 것 뿐 만 아니라 다른 감각상의 경험, 청각, 촉각, 후각 모두를 내포한다. 심적 이미지는 고통과 슬픔, 즐거움과 같은 감정의 기억에 기초한다. 개념 표상은 어떤 종류의 정의나 기술로 구성되어 있고 본질적으로 말로써 나타낸다. 예를 들어 정사각형이라는 말에 대한 이해는 대각선을 수직으로 가지는 직사각형 같은 것이다. 정신적 표상에 대한 이러한 분류는 매우 간단하다. 즉 심리학에서 다루는 이러한 개념에 대한 논의나 논쟁 따위는 하지 않는다. 우리는 여기서 이러한 논의에 대한 세부 사항으로 시작하지는 않을 것이다. 그러나 단지 표상은 현실적으로 이러한 순수한 형태 중 하나로 드물게 나타난다.

Bruner의 제안에 따르면 많은 이해의 행위는 이해의 대상을 스스로 나타내는 데 있지 않고, 한 가지 묘사에서 또 다른 묘사로 변형시키는 데 있다. 이것은 특히 추상적인 대상을 이야기하고 다른 방식의 묘사를 하는 수학의 경우 더욱 그러하다. 일반화는 알고 있는 주제를 한 가지 수학적 상황에서 다른 수학적 상황으로 이끄는 인식의 과정이다. 이러한 수학적 상황은 가까이 있는 문제의 표상인 것처럼 보인다.

그러나 이런 표상은 순수하게 활동적인 것도 영상적인 것도 아니고 순수하게 상징적인 것도 아니다. 그것은 다소 복잡하다. 왜냐하면 그것은 수학적 지식의 모든 요소들을 포함하고 있기 때문이다. 수학 연구가는 변하기 쉬운 표상들의 복잡한 체계들을 동시에 연구하는 것이 가능하다.

(2) 지적 모형들

Greeno는 그의 논문에서 우리의 깨달음, 이해, 그리고 추론 등이 표상들보다는 지적 모형들에 기초한다고 주장한다. 그는 인지과학의 정보 처리 과정의 대안으로서 '개념적 환경에서의 깨달음'에 대한 그 자신의 의견을 발표한 바 있다. 그에 의하면 인지과학은 '표상'이라는 인간 정신의 실재에 대한 깨달음에 기초하는 것이다.

우리의 지적 생활에 대한 Greeno의 견해는 생산과 소비에 매우 많이 초점을 두었고, 생산에는 약간 적게 두었다. 일반적으로 이것은 깨달음에 대해서는 적절한 개념일지 모르나 사고에 대해 적절한 관념은 확실히 아니다. 지식을 이용하여 무엇인가를, 본질적으로 인간을 위한 무엇인가를 하기 위해서가 아니라, 단지 이해 그 자체를 위한 이해, 추론 그 자체를 위한 추론, 깨달음 그 자체를 위한 깨달음이 아니지 않는가! 그러한 관점에서 증명의 필요성은 이론의 사실 여부의 평가에 대한 형식적인 필요에 있는 것이 아니라, 증명하는 것에 대한 인간의 요구에 있다.

우리 주위에서 변화, 운동하고 있는 다양한 대상들로 채워진 정신적 모형들의 결합체는 결합되기도 하고 분해되기도 한다. 그리고 그것들을 통해 작업하는 과정에서 그것들에 매우 익숙해지고 우리가 이해를 하는 데에 확실하게 작용하며 도움을 준다. 그러나 그들은 우리의 정신에서 탐구하게 되는 개념의 범위에 대해서 완전하고 옳은 상황을 획득하게 될지도 모른다. 그들은 실제로 완전한 세계가 되려 하고 있다. 그리고 그로 인해 그들은 보다 많은 탐구에 걸림돌이 된다. 우리가 정신적인 모형 기능을 많이 만들면 만들수록 그것은 보다 더 잘 적용되고, 이리하여 우리가 우리 스스로 만든 장애물은 보다 커지는 것이다.

(3) 이해의 바탕으로서의 통각

최상위 수준의 추상적 사고에서, 이해는 아마도 Wurzburg School의 심리학자들이 통각이라 부르는 것에 근거하고 있을 것이다. 그들은 '사고하는 것은 너무 어려워서 많은 사람들은 오히려 결론 내려 버리는 편이 낫다'와 같은 문장을 우리가 이해할 수 있도록 해주는 것이 통각이라고 말한다.

우리가 이 문장을 인정하게 되는 첫 번째 것은 생각하기와 결론들을 이끌어내기 사이에서 형성된 대립이다. 즉 결론을 이끌어 내는 것(형식화된 방법이나 습관화된 무의식적인 방법으로)은 생각하기와는 동떨어진 것으로 보인다는 것이다. 우리는 문장의 논리적인 구조와는 별개로 생각해 왔을지도 모르고 우리의 이해는 어떤 특정한 논리적 양식에 근거한다. 우리는 이 양식이 우리가 이미 경험을 갖고 있기 때문이란 것을 안다. 보통 우리는 이런 이해의 단계를 재빨리 거쳐버리고, 생각하기와 결론을 이끌어내기에 관한 진술이 왜 참인지를 계속하여 이상하게 여긴다.

(4) 이해의 바탕으로서의 어떤 것에 대한 예상

어떤 예상을 기초로 한 이해는 과학적 사고에 꽤 중요한 것인 듯하다. 이것은 사물들이 그와 같은 상태인 이유, 혹은 (실험, 조작, 조사 등의) 결과 등에 관한 우리의 의문에 대한 해답을 주는 이해 행동에 속하는 범주이다. 어떤 것에 대한 예상은 사람의 확신이나 견해의 표현을 요구하지 않는다. 그것은 아마도 한 사람이 생각해 낸 설에 지나지 않을 것이다. 가령 $\sqrt{2}$는 두 정수의 비로 나타내어질 수 없다는 사고의 기초로 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'라는 것을 이해하는 데 있어서 그 사고는 신념일 수도 있다. 어떤 이는 이미 이해한 그것의 증명에 근거하여 이 생각이 옳다는 것을 확신할지 모른다. 또는 그것의 이해는 공리의 역사적 중요성을 인지하는 것일 수 있다. 역사적 가치의 맥락에서 $\sqrt{2}$는 무리수라는 논의는 사각형의 대각선은 그것의 변과 상등하지 않다는 피타고라스의 기하학적 발견에 상응하는 산수적 대응이다.

라. 이해에 포함된 지적 작용들

이해에 포함되는 네 가지 기본적인 작용들이 있다. 그것은 동일시, 판별, 일반화 그리고 종합이다.

(1) 동일시

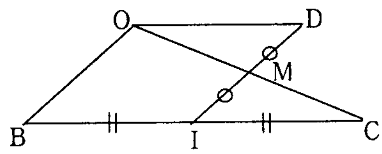
우리는 여기서 발견이나 인식의 의미에서 동일시에 대해 이야기하려고 한다. 가령 내가 나의 이해에 대한 대상을 동일시했다는 것은 첫째로 발견했다는 것을 의미하는데 그것은 나의 지각의 장의 바탕으로부터 분리되고 뽑아내어진 것이다. 그리고 두 번째로 내가 이해하려는 것으로서 그것은 인식했다는 것이다. 동일시는 인지 심리학자들에 의해 einisicht라 불리어진, 이해 행위에 포함된 주요 작용이다. 그러면 수학에서 그러한 einisicht의 예를 한번 들어보자.

<예> 증명에서 기하학의 결정적 부분의 검증

학생들이 다음의 사실을 기하학적으로 증명해야 한다고 가정해 보자.

> 만약 세 점 O, B, C가 평면에서 동일 직선상의 점이 아니라면, I는 BC의 중점이고 D는 DOBI가 평행사변형이라는 위치에 있으며, M이 DI의 중점이라면, M은 OC의 중점이다.

이 문제를 풀기 시작할 때, 그 도형은 아마도 오른쪽 그림과 같은 것으로 이해되어질 것이다. 이때, DOBI가 평행사변형으로 되고, 마찬가지로 해결책은 도형에서 DOIC 부분이 평행사변형으로 인지되고 동일시되는 것을 요구한다.



(2) 판별

두 대상 사이의 판별은 다른 대상들 중에서 두 대상들의 동일시이다. 예를 들어 방정식의 개념을 이해하는 것은 참, 거짓을 논할 수 있는 등식과 변수에 약간 자유스러운 조건을 가진 방정식들 사이의 판별을 요구한다. 동일시와 판별의 의미는 Locke(1690)가 말한 개념들 사이의 일치와 불일치에 가깝다.

① 두 대상은 하나가 아닌 두 개라는 단순한 지각이다. Locke는 이러한 구별은 짐승들조차 할 수 있다고 말한다.

② 대상들 자체에 있을 수 있는, 어떤 상당한 상황에 대하여 다른 하나와 함께 비교하는 단계이다.

③ 더 높은 단계로서, 두 개의 일반적인 개념들이 추상적인 관계의 관점에서 비교될 때이다.

(3) 일반화

일반화는 주어진 상황(이해의 대상인)이 다른 상황의 특별한 경우로 생각되어지는 마음의 작용으로 이해된다. 상황이란 용어는 여기서 물체의 종류에서부터 사건(현상)의 종류, 문제, 원리, 진술, 이론에까지 넓은 의미로 사용되어진다. 예를 들어, 우리는 피타고라스의 법칙과 관계된 수학적 상황을 가지게 될지 모른다. 처음에는 직각삼각형의 변 위에 그려진 정사각형의 그림에 한정되었다가 여러 가지 계산 연습에 의해서 $a^2+b^2=c^2$의 공식을 사용하게 된다. 만약 이 상황이 직각삼각형의 변 위에 그려진 그림이 비슷한 그림이고 상황의 특수한 경우로 인식된다면 우리는 일반화를 이야기할 수 있다.

일반화는 하나의 상황을 다른 상황의 특수한 경우로 동일시하게 보는 것으로 정의될 수 있다. 그러나 동일시는 그것으로 유도되는 일반화보다 더 기본적이고 근본적이다. 단지 일반화는 동일시의 기초 위에서 개발되어진다. 이들 모든 작업들은 많은 단계가 있고 그들은 아마도 상호작용 하여 개발될 것이다.

우리는 어떤 것, 예를 들어 개념, 문제, 수학적 상황 등을 일반화한다. 그러므로 일반화는 대상으로서 이러한 어떤 것을 증명하는 것을 필요로 한다. 일반화를 향해 우리 학생들을 지도함에 있어서 우리는 매우 자주 일반화의 대상이 일반화를 위한 대상이 아니라는 것을 잊어버린다. 그들은 그들이 무엇을 일반화하려 하는지를 알고 있는가? 그 점에서 그 대상이 그들의 지적 능력 내의 것인지 아닌지 체크할 때 가치가 있을 것이다. 이것은 언제나 이루어지는 것은 아니다.

(4) 종합

종합은 여기서 우리에게 다음과 같이 의미한다. 공통적인 사실에 대한 조사, 원리를 통합하는 것, 몇 개의 일반화와 이 토대 위에서 전체로 파악하는 것 사이의 유사성에 대한 조사. 예를 들면 수학적 증명을 단계를 따른 후 마침내 우리는 소위 증거의 개념을 이해할 수 있고, 그 증명이 전체가 된다. 그것은 하나의 진술로부터 다른 진술의 고립된 하나의 논리적 전개가 더 이상 아니다. Czezowski(1959)는 역시 사람에게 하나의 증명을 발견할 수 있도록 가능케 하는 그런 종합이라고 주장한다.

사람은 역시 더 전체적 통합, 이해하고, 전체로서 수학적 지식의 거대한 분야를 말할 수 있다. 19C에서 20C에 수학이 단일화의 길을 걸어왔던 그런 통합이다. 이런 단일화는 함수, 사상, 사상의 불변, 대수학의 구조, 범주와 같은 기본적 조직화된 개념을 바탕으로 했다.

수학에서 이해에 대한 생각은 집합, 관계, 동치 관계, 함수 등과 같은 기본적이고 매우 일반적인 구조적 개념의 수를 줄이는 데에 기초를 두고 있다. 1960-70년대에 소위 새 수학이 학교 개혁의 길잡이였다. 아동들이 수학을 더 잘 이해하지 못할 뿐만 아니라 그들의 이해력이 지금까지 보여주었던 것보다 더욱 악화시킨 새 교육과정의 모든 제안자에게 충격이었다. 새 프로그램의 현실화에는 많은 실수가 있다는 것은 사실이다. 어떤 제안에 대한 너무 문자적 해석, 초보적 방법으로 가르쳐지도록 제안된 것을

공식화시키는 것 같은. 그러나 가장 큰 실수는 이해에 있어서 종합의 역할에 대한 해석이다. 일반화처럼 종합은 주제 자체를 이해함으로 만들어진다. 선생님에 의한 것이 아니라, 이해의 행위로서 종합은 자기 자신의 지식의 행동이다. 통합하고 줄이고, 일반화하고 종합하기 위해 사람이 통합할 수 있고, 줄이고 일반화하고 통합할 수 있는 자신의 마음 속의 어떤 것임이 틀림없다.

3. 이해 행위의 심리적 조건

여기서의 문제는 내부적인 정신적, 심리적 상태에 관한 것이다. 일어나는 이해 행위를 위한 충분한 상태가 무엇인지 말하기 어렵지만 필요한 상태가 있는 것 같다. 여기서는 주의와 의도, 질문에 대해서 이야기하려 한다.

주의는 이해의 필요한 상태인 것 같다. 주의가 없다면, 이해하는 무엇이 있다는 것을 주목하지 않는다면 이해 행위는 있을 수 없다. 수학 교육에 있어 이해하는 데 있어 주의를 어디에 두는가는 매우 중요한 것이다. 그것은 Mason(1982)에 의해 증명되었다. 참으로 수학의 이해는 주의, 일련의 정교한 변화를 요구한다. Mason과 Davis는 때때로 그 생각은 상징적 표현과 관계가 없는 세부 사항에 중요성을 둔 것에서 어렵게 느낀다. 수학은 주로 관계를 다루고 이것들은 일반적으로 지적하기가 어렵다. 주의는 이해하려는 의도, 그 의미를 알아내고 이해하는 쪽으로 방향이 있음을 암시한다. 이해하려는 의도 없이는 이해의 행위가 있을 수 없다. 한편 이해의 의도는 우리가 이해의 행위가 있다는 것을 말하기에 충분한 상태인가? 때때로 우리가 매우 강하게 무엇을 이해할 의도가 있으나 그 의미를 아는 데 어려움이 생긴다. 우리는 우리 정신 속에 비어 있음을 느낀다. 어떤 것도 이해의 기초가 어디서 매우 쉽게 튀는지 보이지 않는다.

모든 이해 행위가 질문을 통해서 일어지는 것은 아니다. 우리는 모국어의 익숙한 부분에 있어 그것들이 가질 수 있는 또 다른 질문을 않고도 이해한다. 지각이 있고 흥미로운 질문은 주의와 긴장을 유지하는 데 절대적으로 필요하다. 그 주의는 우리가 이해할 어떤 대상이 있다는 것을 주목하게 해 주고 그 긴장은 이해를 가능하게 하는 긴 추론을 하는 데 있어 필요한 것이다. 그리고 오직 우리가 어떤 것을 모르기 때문에 의문을 갖게 되는 그러한 대상들만이 의미 있고 이해의 대상이 될 수 있다. 의식적인 큰 질문을 통하지 않는 일상적인 이해 행위는 듀이에 의해서 직관력이라고 불리어진다. 이와는 반대로 이해력은 더 많은 숙고를 필요로 한다. 듀이는 인지 과정에 있어서 의문 없이 이루어지는 이해들과 질문에 의해 이루어지는 이해들 사이의 상호 보완적인 기능에 관하여 언급하고 있다. 피아제의 균형 이론에 있어서 동화나 수용의 두 가지 보완적 메커니즘들은 직관과 이해의 행위에 포함된 메커니즘들과 각각 유사하나, 수용의 메커니즘은 정신적 갈등에 의해 야기된다. 그 갈등은 주위로부터 오는 정보와 이미 존재하는 정신 구조간의 불일치에 의해 생겨나는 것이다. 이 갈등이 질문을 하게 되고, 예견하고, 근거를 마련한다. 과학적 이해에 있어서 질문의 역할은 근본적이라 사료된다.

4. 이해 행위의 사회적 조건

교사와 이보다 더 실용적인 성향을 지니는 수학 교육자들에게는 이해의 실제적 조건, 이해의 여러 가지 목적, 학생들의 수학적 이해를 돕는 요인들이 학생들의 이해가 일어나도록 하는 행위의 심리적 조건에 대한 추측보다도 중요하다. 학생들은 이해의 대상에 집중해야 하며 그것은 흥미 있고, 의미 있는 질문에 대한 동기화로써만이 가능함을 알고 있다. 그러나 이해 행위를 이끌어내고 학생들을 참여시키기 위한 동기 유발을 위해서 교사들이 무엇을 할 것인가 하는 것은 다소 덜 분명하다. 이것은 심각한 문제

이고 수학 교육의 연구의 많은 부분이 그것에 논의된다.

그러나 이러한 문제에 대한 어느 해답이라도 수학 수업에서는 이해가 매우 다른 구성 요소나 특성을 가지는 사회 현상에서 일어나는 것을 고려해야만 한다. 우리가 학생들에게 원하는 행위를 그들에게 전가시켜 그들이 스스로 변해가길 바라고 그들은 그것으로 평가받길 기대하는 것이다. 학생들의 발달에 대한 이해는 주어진 교실 환경 내에서 교사와 학생들 사이에서 저절로 성립되는 일종의 교훈적 약정을 바탕으로 한다. 이런 교훈적 약정의 심리 과정을 앎으로써 우리는 제도화된 교수법에 포함된 약간의 변수를 다루고 학생들이 학습에서 수학자들에 의해 전해온 이해의 행위를 더 경험하도록 하는 교훈적 약정을 세울 수 있다. 학생들의 이해력을 높이는 수학 수업에서의 대화의 다양한 역할, 수단, 형식과 역할 수행에 대하여 이루어져온 아래의 몇몇 연구를 보자.

가. 이해에 있어서 의사소통 행위의 역할

의사소통 행위가 학생들의 이해력을 증진시킨다는 것이 일반적인 통념이다. 학생들은 만일 그들이 이해하는 것을 말로 표현해야 하고, 그들의 지식과 다른 학생들의 지식이 대변해야 하며, 그들의 관점에만 오직 의존하고, 그들의 지식이 일관되고 상식에 맞든 안 맞든 확인되고 정당화됨을 보이도록 해야 하는 그룹별 과제와 토론에의 참여가 이루어질 때 더 잘 이해하는 것처럼 보인다. 심리학에서 동료 간의 협력의 가치는 Piaget에 의해 발견되었고, 다른 이들에 의해 발전되어 왔다. 반면에 Vygotski와 Luria는 아동과 성인의 상호작용과 얼마만큼의 교육적 간섭이 아동의 자생적 개념 발달을 실질적으로 증가시키는가에 관해 중점을 두었다.

많은 연구자들은 교실에 일어나는 일상적인 대화에 초점을 맞추고 그것의 다른 양식, 의미 형태의 이해와 가치를 연구에 반영한다. 어떤 이들은 교실에서의 의사소통이 왜 잘 되지 않는지를 알려고 하고, 적어도 개념 수준에서는 배우고 이해하는 것이 전혀 없는 의사소통만이 있는 의사소통의 형태를 찾으려고 노력한다. 전통 학급에서 일어나는 의사소통은 교사가 원하는 해결책뿐만 아니라 학생들이 이해하고 배울 수 있었다고 교사가 보는 용어로 분류되는 언어로만 표현되는 천편일률적인 질문이 잦다.

Atweh와 Cooper는 실제로 학생들이 교실에서 의사소통이 무의미한 관례로 규정되어 버린 학습과 이해를 거부할 수 있고 교사에게 저항할 수 있어야 한다고 말하고 있다.

나. 교실 대화의 방법

교사와 학생 사이의 교실에서 의사소통 방법은 여러 가지 형태가 있다. 한 가지 중요한 구분은 가르치는 방법에서 행동주의와 구성주의라 불리는 것이다. 행동주의는 권위주의이고 학생들의 자유롭고 창의적인 활동의 여지가 별로 없게 한다. 학생에게는 그들의 지식을 만드는 것보다 지식을 재생산하는 것이 요구된다. 그 날 배울 것과 어떻게 이해하는지를 학생들에게 말로서 지식을 전달할 수 있다고 믿는다. 구성주의의 방법은 이와 대조적이다. 교사는 학생들의 새로운 문제를 그들 스스로 이해하고 푸는 것을 허락한다. 그리고 학생들에게 그 의미들을 강요하는 것보다 협상하게 한다. 이것은 행동주의적 방법보다 구성주의 방법이 배우고 이해하기에 좋다는 것을 나타낸다. 그러나 일상의 제도화된 교수 방법의 실행에 있어서 그전의 형태를 유지하는 실제적 가능성과 구체적 교과 문제를 가르치는 데 이러한 형태의 구체성에 관한 토의가 계속 진행되고 있다. 일반적으로 수학에서 학생들이 말하는 것에 의해 느껴진다. 수학에서 학생들이 보다 진보된 개념을 재구성하는 것은 방법이 없다. 이 논의와 협상의 의미는 단지 meta 수준, 해결 가능성의 단계, 주어진 수학 문제의 다른 성취 등을 가능하게 한다.

IV. 이해의 과정

이 장은 우리 자신의 이해의 과정과 실제적이고 지적인 활동을 이해하는 역할을 하는 것에 관계된 내용이다. 이해의 한 과정에서 이해의 대상들은 서로 밀접하게 연결되고 이해의 바탕은 매우 다양할 수 있다. 누군가는 심지어 이해의 과정은 어떤 이해의 일련의 변형으로 구성된다고 말할 수 있다. 설명과 이해 그리고 이해에서의 행동의 역할에 대하여 알아본다.

1. 설명과 이해

가. 수학을 이해하는 데 있어서 설명의 역할

증명과 설명의 뚜렷한 구분을 위해 Ajdukiewicz는 '증명된 것은 진술이고 설명된 것은 어떤 사실의 상태인 것이다'라고 말한다. 그러므로 우리가 그의 스타일대로 수학에 있어서 설명에 대해 말하기를 원한다면 수학에 있어 '어떤 사실의 상태'에 관해 분명히 해야 할 것이다. 경험주의 과학에서도 '어떤 사실의 상태'는 관찰과 경험에 의해 의심할 여지없이 확신되는 것이다. 수학에서 수학적 이론과 이 이론 내에서 증명 없이 받아들일 수 있거나 또는 증명되어진 어떤 것이 존재할 수가 있을 것이다. 수학에서 설명이 추구하는 것이 증명을 위한 추구는 아니다. 그러나 이론 실험의 방법, 정의, 선택 공리에 이론적 근거를 찾는 것을 시도할지 모른다. 이론적 근거는 논리적 전제를 연역하지 않는다. 수학에서의 설명은 역사적, 철학적, 실용주의의 논점까지 도달될 수도 있다. 수학의 어떤 것을 설명하는 것은 수학에 대해 이야기한다: 우리의 논문은 수학적인 것보다 더욱 메타 수학적이어야 된다. 이것은 논리적 실증적 입장을 폐지하려고 노력하는 것이다: 모두 비, 형식적 논문은 수학으로부터 소거되어야 한다. 수학자들은 수학의 모든 분야를 완벽히 공식화하려는 노력을 해야 한다.

나. 과학적 설교적 설명

설명의 목적은 새로운 기초 위에 이해를 찾기 위한 것이다. 설명은 이러한 기초 위에 놓여지는 요구의 종류에 따라 분류되어질 수 있다. 이해의 개념적 기초에 목적을 둔 설명은 대부분 과학적이게 되고 이것이 우리가 그들을 과학적이라고 부르는 이유인 것이다. 이해의 바탕에 목적을 둔 설명은 가르치는 상황에서 빈번하게 일어나고 그래서 우리는 그들을 '설교적'이라고 부른다. 그러므로 과학적 설명은 설교적 설명에 대립된다. 잘 알고 있는 지식에 새로운 지식을 축소시키기는커녕 그것은 종종 의심할 여지없이 확실한 것이 어떻게 불분명할 수 있는지를 보여주는 것을 목적으로 한다. 예를 들어 수업 상황에서 실수의 순서 집합의 연속성은 때때로 직선상의 '가장 작은 부분에서의 연속성'의 직관적으로 설명되어진다. 그리고 수직선은 집합을 나타내곤 한다.

다. 모델을 통한 이론의 설교적 설명

정수 개념의 예로서 이러한 종류의 설명을 논의해 보자. 언제나 정수의 계산은 기초 단계의 수업에서 소개되어진다. 수학 교육자들은 학생들의 어려움을 잘 처리한다. (2, +, ·) 구조의 추상적이고 형식적인 특성에서의 이러한 어려움들의 원인을 지각하는 교육자들은 여러 가지 모형을 제시한다. 이러한 모형들에서 음수와 그들에서의 연산은 물체의 좀 더 구체적인 조작의 조건에서 해석되어진다. 이러한 모

형을 이용하면 곧 학생들이 정수에서 연산의 법칙에서의 정확한 적용을 덜 어렵게 만들 것이라고 기대된다. 이러한 정수의 이해는 변하기 쉬우며 대수학 구조로서 수의 개념을 가질 때만이 가능해진다. 그래서 구체적 음수에 대해 이야기할 수 있다.

초등학교에서 자연수에 의미를 부여하는 것처럼 정수에서도 의미를 부여한다. 그러나 문제는 이러한 수와 연산의 의미는 음의 정수로 확장할 때 그대로 보존이 되지 않는다는 것이다. 정수의 집합에서 덧셈은 항상 양이 늘어나는 것은 아니고, 뺄셈은 항상 줄어드는 것이 아니다. 두 음의 정수의 곱이 양의 정수가 된다는 것은 전혀 분명하지 않다. 모델을 만드는 사람은 이 어려움에 극복하려고 한다. 어떤 이는 12, 13 세 아동에게 음수를 가르쳐서 온도계 눈금을 읽게 하는 것이 더 좋지 않는 것이 아닌가 하는 사람도 있다. 그리고 학생들이 부딪히는 모든 것에 구체적 의미를 부여하지 않고 연산을 할 수 있을 때까지 연산 공부를 하게 그냥 두는 것이 어떤가 생각한다. 물론 어떤 이는 정수에서 연산이 왜 그렇게 정의되었는가 하는 질문에 대답하지 않고 정수의 연산을 수행할 수 있다고 본다.

수직선을 이용하여 정수를 소개하는 것은 연산 규칙이 왜 그렇게 정의되었는가 하는 질문에 대한 대답은 아닐 것이다. 유일한 이로운 점은 모형이 배우는 사람에게 연산과 관련된 약간의 구체적 이미지를 제공할 뿐이다.

2. 이해에서 행동의 역할

가. 이해에서 마음의 수동적 행동

만약 우리가 이해를 말하고자 한다면 오히려 수동적 경험보다는 능동적 경험이라고 하는 것이 거의 가깝다. 이해의 행위는 대상을 동일시하고 그들 사이를 구별하고 특수한 데서 일반성을 일반적인 것에서 특수성을 인지하고 사고와 경험의 거대한 영역을 기꺼이 분석하는 주의 깊은 마음에서만 일어난다.

우리의 정신은 수동적으로 외부에 있는 사물의 사고로 새겨진 것이 아니다. 이해는 특정한 경우에 일어나도록 우리에게 질서 정연하게 다가오는 것이 아니다. 그것은 누구나 수월하고 자연스런 방법으로 보는 것처럼 보이는 것인지 알기 위해서는 능동적인 해석이 필요하다. 태어날 때부터 눈이 먼 사람은 시력이 회복되어도 삼각형과 사각형을 구별하는 데 큰 어려움이 있다는 것이 보고되었다. 그것들을 보면서 달걀, 감자, 정육면체의 설탕이라는 이름을 배웠던 사람은 그것들이 노란 불빛 놓여 있을 때는 알지 못했다. 설탕 덩어리를 실로 매달았을 때가 아닌 테이블에 있을 때 명명했다. 그러나 사람들은 차츰 배우게 되었다. 충분히 격려 받는다면 몇 년 후에는 눈에 보이는 삶을 읽을 수 있도록 성장할지 모른다.

나. 그것을 이해하기 위해 대상에 작용함

소위 행동 이론이라고 하는 심리학자들에 따르면 어떤 것을 이해한다는 것은 그것에 작용하고 그것을 변형하여 자기 표현으로 나타낼 때라고 한다. 이해 주체는 자신의 행동으로 대상에 대한 관계를 나타낸다. 그 대상에 대한 행동의 결과로 새로운 대상이 생긴다. 이해의 행위에 대한 이러한 접근에서 이해 주체의 행위의 결과로써 대상들을 변형시키고 만들어내는 데 주의가 집중된다.

만약 우리가 이해의 대상의 연관이 대상을 변형시키는 행위라고 본다면 이해의 행위의 정의는 이러한 관점에서 꽤 적합하다고 본다. 물론 우리의 어떤 이해 행위는 우리가 살고 있는 세상을 우리를 위하여 바꾸기도 한다. 우리는 같은 사물을 완전히 다른 방법으로 보기 시작한다. 그러나 우리는 의도하지 않

고 그저 이해하려고 노력한다.

반면 우리가 일반적 이해가 아니라 훌륭한 혹은 깊은 이해를 (예를 들어 수학에서) 이야기할 때 이해의 대상에 대해서 학생이 어떤 행동을 할 수 있는 가능한 행동을 생각한다. 우리는 학생이 이 대상을 변형시키기를 제의한다. 사실 학생들은 책에 없는 어떤 형의 문제가 주어졌을 때, 이해하고 사물을 인지하고 문제를 해결하는 과정에서 매우 수동적인 경향이 있다. 하지만 수학은 적극적인 방법으로 이해되어야 한다. 왜냐하면 물리적 접근은 다양한 종류의 표현, 상징에 불과하기 때문이다. 이면에 숨어진 개념을 얻기 위해 그것을 통해 조금이라도 찾아내는 것이 필요하다. 수학을 이해하는 데서 일반화는 어떤 수준에서 시행이 보다 높은 수준의 대상이 되는 것처럼 위계를 형성한다. 이해 대상의 변형에서 이 종류는 결정적인 역할을 한다.

V. 이해의 향상과 문제 해결

1. 문제 해결 수업을 위한 접근들

문제 해결을 위한 가장 중요한 역할은 수학에 대한 아동의 이해를 향상시키는 데 있다. 오늘날 문제 해결이 교육과정에서 중요한 역할을 한다는 개념은 광범위하게 받아들여지고 있다. 지난 10 년 동안 꽤 많은 문제 해결을 위한 자료들은 교사가 문제를 해결하는 것을 그들의 지도의 초점으로 도와주는 데 매우 유용하다. 그러나 그것은 이 목표가 어떻게 도달되는가에 오늘날까지 일치점에 거의 도달하지 못했기 때문에 기본적으로 필요한 다소간의 일관성과 명확한 방향을 제시하지 못한다. 학교 수학의 초점에서 문제 해결을 위한 것을 의미하는 것의 개인과 집단의 개념들 사이에서 아마도 최대한의 차이점이 생기게 한다. 이러한 차이점들을 이해하는 가장 좋은 방법 중의 하나가 문제 해결 지도를 위한 3 가지 접근들 사이에서 구별된다.

가. 문제 해결에 관한 수업

문제 해결에 관해 수업하는 교사는 Polya의 문제 해결 모델에 관심을 집중시킨다. 간단히 말해서 이 모델은 수학 문제 해결을 위한 과정을 네 개의 서로 독립적인 4 단계로 규정한다. 문제를 이해하기, 계획 수립, 계획의 실행, 그리고 검토하는 단계를 학생들은 온전하게 배워서 그들이 문제 풀 때 이 단계를 통해서 자신이 발전했음을 알게 된다. 가장 좋은 상태에서 문제 해결에 관한 교수법은 실제로 문제를 푸는 경험을 또한 포함한다. 그러나 그것은 언제나 문제를 해결하는 방법에 있어서 많은 명쾌한 토의와 어떻게 가르치고 문제를 푸는가 하는 경험이 포함되어 있다.

나. 문제 해결을 위한 수업

문제 해결을 위한 수업에서 교사는 가르치는 수학적 내용이 정형적이건 비정형적이건 모두 문제 해결에 적용될 수 있도록 초점을 맞춘다. 비록 수학적 지식의 습득이 가장 중요하지만 수학 학습의 본질적인 목표는 그것을 사용하는 것으로 보는 관점이다. 더 나아가 문제 해결을 가르치는 교사는 그들이 한 문제에서 상황 학습한 것을 다른 문제 상황까지 전이할 수 있는 능력을 중요하게 생각하여 주된 관심이 대상이 된다. 이러한 학습의 접근에서 강조되고 있는 점은 수학 학습의 주된 목표 내지 이유는 수학 학

습을 통해서 획득한 지식을 문제를 해결하는 데 사용할 수 있어야 한다는 점이다.

다. 문제 해결을 통한 수업

문제 해결을 통한 수업에서 문제들은 수학 학습을 위한 목표뿐만 아니라 수학 수업의 중요한 수단이다. 즉 이러한 수업에서는 학습시키고자 하는 주제의 주요한 측면을 잘 구현하고 있는 문제로부터 출발하여, 문제를 해결하는 과정에서 수학적 아이디어나 수학적 개념을 학습하며 그에 따라서 수학적 기법이 개발된다. 즉 수학의 학습은 구체적인 것(수학적 개념이나 기법의 예로서 제공된 실생활 문제)로부터 추상적인 것(기호를 조작하기 위한 기호적 표현이나 기법)으로의 전환이라고도 볼 수 있다. 따라서 이 수업에서는 수학 수업에서 학습한 수학적 개념이나 원리를 실생활 문제에 적용하는 것보다는 실생활에서 문제를 정의하고 구현하는 과정이 우선된다.

라. 세 가지 접근에 관한 다른 관찰

비록 수학에서 문제 해결 수업의 이러한 세 가지 개념들은 이론적으로 분리될 수 있으나 사실 그것들은 겹쳐지고 여러 가지 조합과 배열에서 일어난다. 그러므로 그것은 이러한 수업의 형태를 하나 이상 지지하거나 아니면 나머지 다른 것들에 반대하는 것은 아마도 비생산적 결과를 초래할 수 있다.

다른 결점은 문제 해결을 위한 수업으로부터 나온다. 이 접근은 좁게 해석할 때, 문제 해결은 활동적인 학생에게 새로운 개념의 소개 뒤나 계산의 기술이나 알고리즘에 작동하는 다음에만 집중해서 보여질 수 있다. 그 목적은 학생들에게 실제 문제를 해결하는 데 최근에 배운 개념과 기술을 적용하는 기회를 주는 것이다.

다른 두 개의 접근법과는 다르게, 문제 해결을 통한 수업은 많은 교사들과 교과서 집필자, 교육과정 개발자에 의해서 맹목적으로도 명백하게 쓰지 않는 개념이다. 그러나 그것은 고려해 보고 향상되고 노력하고 향상하게 되는 가치가 있는 수학을 가르치기 위한 접근 방법이다. 정말로 문제 해결에 의한 수업은 NCTM의 권고(① 수학적 개념과 기능은 문제 해결을 통해서 학습되어야 한다; ② 높은 수준의 사고 과정의 발달은 문제 해결 경험을 통해서 기를 수 있다; ③ 수학적 지도는 연구 지향적인 문제 해결 분위기에서 일어난다. NCTM 1987)와 가장 일관된(모순되지 않는) 접근이다.

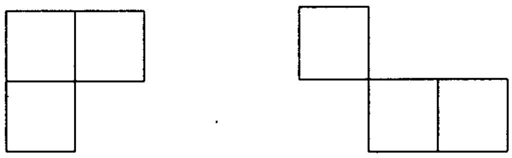
2. 문제 해결을 통한 이해의 향상

우리는 수학 교수(지도), 교사들, 교과서 편찬위원들, 교육과정 개발자들과 평가자들이 주목하는 대상인 문제 해결에만 급급해 하는 대신 그들의 주안점과 목적이 이해가 되어야 한다고 믿는다. 그렇게 함으로써 그들은 수학을 문제 해결의 도구로서 보는 좁은 견해에서 수학은 자신의 경험들을 조직하고 생각하는 방법으로서의 넓은 의미로 이동시킬 것이다. 이와 같은 결과로서 문제 해결은 덜 강조되는 것이 아니라 교육과정에서 문제 해결의 법칙은 그들이 어떠한 개념과 기능을 습득한 후 학생들이 적용 활동을 하는 것에서 새로운 수학 지식을 습득하기 위한 수단과 전에 배운 것을 적용하는 과정으로 바뀔 것이다. 이해는 교수법의 제 일 목표가 되어야 한다는 견해의 기본 원리로 교사나 교과서에 의해 부과되었을 때라기보다는 자연발생적일 때 (스스로 터득했을 때) 수학에서 아동들의 학습이 가장 풍부하다는 것으로 믿어 왔다. 자연스럽게 축적된 지식의 이점은 학습자가 이미 알고 있는 것에 연결시킨다는 것이다. 더욱이 아동들이 혼자 힘으로 새로운 수학 지식을 축적할 때 그들은 개념, 사실, 기술들뿐만 아니라

이 새로운 지식의 적용을 조절하고 다루는 방법을 배운다. 그것은 그들이 이 지식을 담당하고 있는 새로운 개념들과 기술을 학습하고 문제 해결에 있어서 그들에게 더 유용하게 한다. 이 방법에서 수학 지식을 습득하는 이점은 문제 해결 노력들에서 실수할 가능성이 거의 없다는 것이다. 우리는 문제 해결을 통한 수업과 이해를 위한 수업은 양립할 수 있을 뿐 아니라 실제적으로 상호간에 도움이 된다.

가. 문제해 결은 이해를 강화시킨다.

Beatriz D'Ambrosio는 문제 해결이 수학 문제에 대한 학생들의 이해를 깊게 할 수 있다는 사실을 다음과 같은 예를 들어 제안하였다. 1 cm 그래프 용지에서 모든 도형은 넓이가 14 cm^2, 둘레가 24 cm이고, 각 정사각형은 다른 정사각형과 적어도 한 변을 공유해야 한다. 다음은 그 예이다.



(○) (×)

물론 문제가 주어진 학생들은 이미 직사각형의 넓이와 길이의 개념에 대한 기초 지식을 알고 있다고 가정한다. 이 의도는 학생들이 이 두 가지 개념에 대한 지식을 적용할 수 있는 기회를 단지 제공하는 것은 아니다. 오히려 학생들의 넓이와 길이의 관계에 대한 이해를 강화시킨다. 학생들은 많은 결정을 하고 그들 중에서 가능한 모든 경우와 중복되지 않게 만들어지게 되는 조직적 모양을 만드는 방법을 통해서 이 문제를 해결할 수 있다. 그것들을 수행하는 데 필요한 그러한 결정과 관련된 기능들은 어떻게 문제를 성공적이고 능률적으로 푸는가를 배우는 중요한 부분이다. 그러나 어떤 결정을 언제 내려야 할지를 배우는 것은 오직 이 학습의 이점만은 아니다. 게다가 문제의 조건에 맞게 수정한 형태로 할 때 학생들은 만약 주시하면 두 개념을 더 풍부한 이해를 쉽게 할 수 있는 넓이와 둘레 사이의 관계를 접하게 된다. 그래서 이 연구와 실험을 통해서 학생들은 유용한 문제 해결 능력을 배울 뿐만 아니라 두 가지 중요한 측도 개념에 대한 이해를 깊이 있게 해 준다.

나. 이해는 문제 해결을 돕는다.

물론 문제 해결의 성공은 학생들이 문제 속에 있는 정보를 잘 이해하는 데 의존한다. 그러나 성공적인 문제 해결에 있어서 이해력의 가치는 이해력 자체를 넘어선다. 특히 우리가 논의해 왔던 방법에서 이해를 비추어 볼 때 그것은 적어도 4 가지 다른 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 도와준다.

(1) 이해는 문제 해결자의 표현 형태를 풍부하게 한다. 문제를 푸는 동안 문제 해결자는 문제의 정보를 인지하는 것이 필요하다. 즉 문제 해결자는 그 정보의 표현을 개발해야 한다. 정보의 묘사와 그들 사이의 연관성을 더욱 정확하게 표현하면 할수록 문제는 더욱 정확하게 풀릴 것처럼 보인다.

(2) 이해는 문제 해결자가 절차를 선택하고 실행을 체크하는 데 도움을 준다. 성공적인 문제 해결을 위해서 절차의 선택과 다음에 일어나는 실행을 체크하는 능력, 목적을 달성하기 위한 지엽적인 행위의 정도를 평가하는 능력과 여러 가지 취사 선택 결정을 할 수 있는 능력이 요구된다. 문제에 있는 조건들과 변수들 사이의 관계를 이해하고 의미 있는 문맥에 문제를 놓을 수 있는 문제 해결자는 여러 가지 결정과 행동의 결과를 예상하고 해답 쪽으로 이끌어 가는 과정을 평가할 수 있도록 되어 있다.

(3) 이해는 문제 해결자들이 결과들의 원인을 판단하는 데 도움을 준다. 문제의 정보에 대한 의미 있고

적절한 내부 표현을 만들어내는 능력은 문제 해결자가 해답이 의미 있는지를 결정하는 능력을 강화시킨다.

(4) 이해는 문제와 관련된 지식의 전이와 다른 상황에서의 지식의 일반화를 촉진시켜준다. Brownell은 잘 이해되어진(의미 있는) 문제의 해결은 비록 문제들이 문맥상 다르다 할지라도 구조상 비슷한 문제로 즉시 전이된다는 것을 지적해왔다. 그것은 이해력이 특별한 개념, 기능 또는 다른 상황에 대한 대비에 적용할 수 있는 능력을 포함하기 때문에 어떤 수학적인 사고와 기술에 대해 좋은 이해력을 가진 사람은 기본적으로 수학을 배우는 상황에서부터 아주 다른 상황에까지 적용할 수 있는 능력을 가지게 된다.

VI. 결 론

본 논문에서는 먼저 수학을 이해한다는 것은 무엇을 의미하며 이해의 행위와 조건들, 그리고 이해의 과정을 통하여 이해 활동에 대하여 언급하였고, 문제 해결 지도를 위한 3 가지 접근을 생각해 보고 문제 해결을 통한 이해의 향상에서 이해와 문제 해결 사이의 상호관계를 찾아보았다. 그러므로 수학 수업에 있어서 문제 해결을 강조하는 것과 이해를 강조하는 것 사이에 상호 버팀이 되는 관계가 될 수 있다고 우리는 믿는다. 교사들이 문제 해결을 통해서 수업할 때, 문제 해결에 대하여 뿐만 아니라 그들은 그들의 학생들에게 그들 자신의 이해를 계발시키기 위한 강력하고 중요한 도구를 제시한다. 학생들이 수학을 깊게 그리고 풍부하게 이해하게 됨에 따라 수학 문제를 푸는 데의 이용하는 능력은 더 증가된다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤 (1998). *초등 수학 교육론.* 서울: 동명사.

박성선 (1995). 문제 해결을 통한 수학 수업. *청람 수학 교육 5(1)*, 67-77. 한국 교원 대학교.

전평국 (1997). 문제 설정 방법이 문제 해결력과 창의력에 미치는 효과 분석. *수학 교육 프로시딩 5(5)*, 355-386.

Ajdukiewicz, K. (1974). *Pragmatic Logic.* Dortrecht: D. Reidel.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing.* Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

Brownell, William A. (March 1945). When is arithmetic meaningful? *Journal of Educational Research 38.*

Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: Critical after thoughts. *Educational Studies in Mathematics 21*, 3-27

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de didactique: Perspective apportees par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique Math 12*, 73-112.

Croft, Monica (1987). *A Problem-Solving Interview.* Unpublished paper. University of Calgary.

Czezowski, T. (1959). *Clowne Zasady Nauk Filozoficznych.* Wroclaw, Poland.

David, Robert B. (1984). *Learning Math: The Cognitive Science Approach.* Norwood, NJ: Ablex Publishing Corp.

Durkin, & Shire. (1991). *Language in Mathematics Education - Research and Practice.* Milton Keynes, PA: Open University Press.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal of Research in Mathematics Education 22*(3), 170-218.

Lenchner (1983). *Creative Problem Solving in School Math.* Boston, MA: Houghton Mifflin Co.

Lock, J. (1690). *An Essay Concerning Human Understanding.* Oxford: Clarendon Press.

Lubomirski, A. (1983). *O Uogolnianiu w Matematyce.* Wroclaw, Poland: Narodowy im Ossolinskich.

Mason, J. (1982). Attention. *For the Learning of Mathematics 2*(3), 21-23.

Peirce, C. S. (1984). *Notes for Lectures on Logic to Given 1st Term 1870-71, MS171, Spring 1870.*

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in math via problem solving. In P. R. Lester & A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Math.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, Richard R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching 97,* 1-7.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning and Action.* New York: John Willey & Sons.

<Abstract>

A Note on Understanding and Problem Solving in Mathematics

Kang, Shin Po[3)]

We believe that there can be a mutually supportive relationship between emphasizing problem solving and emphasizing understanding in mathematics instruction, when teachers teach via problem solving, as well as about it and for it they provide their student with a powerful and important means of developing their own understanding. As students' understanding of mathematics becomes deeper and richer, their ability to use mathematics to solve problem increases.

3) Pusan National University of Education (263 Keoje-1-Dong, Yeonje-Gu, Pusan, 611-736 Korea: Tel: 051-500-7234; Fax: 051-505-4908)