

내재적 경계 조건을 이용한 자유표면 유동 수치해석

이 공희¹, 백 제현²

Numerical Simulation on the Free Surface using implicit boundary condition

G. H. Lee, J. H. Baek

This paper describes a numerical method for predicting the incompressible unsteady laminar three-dimensional flows with free-surface. The Navier-Stokes equations governing the flows have been discretized by means of finite-difference approximations, and the resulting equations have been solved via the SIMPLE-C algorithm. The free-surface is defined by the motion of a set of marker particles and the interface behaviour was investigated by means of a "Lagrangian" technique. Using the GALA concept of Spalding, the conventional mass continuity equation is modified to form a volumetric or bulk-continuity equation. The use of this bulk-continuity relation allows the hydrodynamic variables to be computed over the entire flow domain including both liquid and gas regions. Thus, the free-surface boundary conditions are imposed implicitly and the problem formulation is greatly simplified. The numerical procedure is validated by comparing the predicted results of a periodic standing waves problems with analytic solutions. The results show that this numerical method produces accurate and physically realistic predictions of three-dimensional free-surface flows.

Key Words: 자유 표면(Free Surface), 갈라 개념(GALA Concept), 정지파(Standing Wave), 표적 입자(Marker Particle), 비정상 유동(Unsteady Flow)

1. 서 론

자유표면과 같이 움직이는 경계면을 포함한 유동은 많은 공학 분야에서 매우 일반적인 현상으로서, 물성이 다른 두 유체 경계면에서의 상호 작용에 의해서 특성지워진다. 물과 공기와 같이 밀도비가 큰 두개의 상을 가진 유체 유동은 복원

력과 관성력이 중요한 특징으로 나타나며, 이러한 특징은 위치 에너지와 운동 에너지 사이에 복잡한 상호작용의 결과를 낳는다. 이러한 특성을 나타내는 유동을 해석하는 경우 다음과 같은 문제점이 발생하게 된다. 즉, 시간에 대한 자유표면의 진행과 공간상에서의 유동장의 결정이다. 문제의 복잡성은 적합한 경계조건들과 지배방정식을 만족시킴과 동시에 자유표면의 위치에 대한 정보도 알아야 된다는 것이다.

Harlow와 Welch[1]는 점성, 비압축성 유체에 대한 비정상 상태의 Navier-Stokes 방정식을 해

*1 학생회원, 포항공대 대학원 기계공학과

*2 정회원, 포항공대 기계공학과

석하는 explicit finite difference scheme의 MAC(Marker And Cell) 방법을 최초로 개발하였다. MAC 방법은 교차 격자, 보존형태의 운동량 방정식, 그리고 자유표면의 위치를 나타내기 위한 표적입자(marker particle)의 사용으로 특징 지워진다. 그 후 Chan과 Street[2]는 “ragged surface” 개념을 도입하여 자유표면에 주어지는 경계조건을 격자 중앙에 적용시키는 MAC 방법과는 달리 자유표면 자체에 적용시키는 SUMMAC(Stanford University Modified MAC) 방법을 개발하여 수치 계산의 불안정성을 개선하고 정확성을 증가시켰다. 또한 Nichols와 Hirt[3]는 VOF(Fractional Volume of Fluid) 방법을 이용한 SOLA-VOF 코드를 개발하였으며, Tang과 Patel[4]은 solitary wave를 해석하기 위하여 MAC 방법과 FA(Finite Analytic) 방법을 SIMPLER 알고리즘에 적용하여 해석하였으며, Miyata[5]는 TUMMAC(Tokyo University Modified MAC) 방법을 개발하여 전진하는 배 주위의 자유표면 유동을 해석하였다.

일반적으로 위와 같이 과거에 행해졌던 방법들은 주로 액체와 기체의 경계면을 포함한 액체 영역에서만 해석이 이루어졌고, 자유표면에 대한 운동학적, 역학적 조건과 같은 복잡한 경계조건이 자유표면에 직접 주어졌으며, 대부분 2차원 유동에 적용되었다. 그 이유는 3차원 자유표면에 대한 수치해석은 과도한 계산 시간 및 컴퓨터 용량을 필요로 하기 때문이다. 그러나, 본 연구에서는 비압축성, 층류, 비정상 상태에서 복잡한 경계조건을 자유표면에 직접 부과하지 않고 액체와 기체를 포함한 계산 영역 전체에서 모든 변수들을 계산함으로써 자유표면에서 속도장과 압력장은 연속하고, 수치 계산 영역에서 자유표면에 대한 복잡한 경계조건은 내재적으로 부과된다는 Spalding[6]의 GALA(Gas And Liquid Analyser) 개념과 Maxwell[7]의 입자 추적 기법을 이용하여 표적입자를 자유표면에 상에 위치시켜 자유표면의 형상을 표현하고 이때 자유표면 경계면에서는 대류항, 확산항 그리고 생성항에 필요한 점성과 밀도를 부분 평균하여 구하는 방법을 적용하였다. 이 방법은 이미 백 제현, 정 해음[12], [13]

에 의해서 수치해석적으로 다양한 2차원 유동의 경우에 대하여 적용, 입증되었다. 이와 같이 지배 방정식의 변화와 표적입자 추적 기법에 의해서 경계조건이 매우 단순화될 수 있고, 계산 시간 및 컴퓨터 용량을 줄일 수 있다. 그리고 이러한 해석방법의 타당성과 정확성을 3차원 유동에 대해서 검증하기 위해 주기적인 정지파(periodic standing wave) 운동을 해석하였으며, 수치해석 시 각 유체의 물성치들은 각 유체내에서 일정하며 유체 경계면에서의 표면장력이나 물질전달 효과를 무시하였다. 계산 결과는 이론해와 비교하였고, 참고문헌의 실험 결과와 정성적으로 유사한 경향을 나타내었다.

2. 지배 방정식 및 수치해법

2.1 지배 방정식

일반적으로 3차원 비정상 유동의 연속 방정식 및 운동 방정식을 벡터 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\nabla p + \rho \bar{g} - \nabla \times [\mu (\nabla \times \bar{v})] + \nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \bar{v}] + S_{\bar{v}} \quad (2)$$

자유표면 유동은 액체와 기체사이에서 경계면을 이루는 유동이다. 이러한 2개의 상을 갖는 유동을 해석하기 위하여 본 연구에서는 GALA개념을 도입하여 연속방정식을 통상적인 질량연속 방정식(mass continuity equation)에서 체적연속 방정식(bulk continuity equation)으로 수정하였다. 수정된 체적연속방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (3)$$

여기서 ρ 의 substantial derivative 항은 비압축성 유체의 경우 영이고, 공기의 압축성은 표면파(surface wave) 운동의 경우에는 중요치 않으므로 비압축성 유체로 가정하여도 무방하다. 이와 같이 액체와 기체의 경우 전체 유동장에서 $\nabla \cdot \bar{v}$ 는 영이고 기체의 운동량은 액체의 운동량에 비하여 대단히 작으므로 비록 기체가 압축

성이라 할지라도 운동량 방정식에서 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$ 를 포함한 항은 영이 된다. 결과적으로 체적연속방정식을 사용함으로써 액체와 기체를 포함한 전 유동 영역에 걸쳐서 변수를 계산할 수 있고, 자유표면을 포함하는 검사체적면에서 잘못된 밀도 계산으로 야기되는 수치계산 문제를 해결할 수 있다.

2.2 수치 해법

전체 유동장 계산시 비직교 경계면 일치 좌표계와 엇갈림 격자계(staggered grid)를 사용하였다. 대류항은 혼성 차분법(hybrid scheme)을, 확산항과 생성항은 2차 중앙 차분법(second order central differencing scheme)을 사용하여 차분화하였다. 3차원 비정상, 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해를 구하기 위해 속도-압력 보정 알고리즘인 SIMPLE-C를 적용하였다.

2.3 자유표면의 계산

2.3.1 표적입자 운동

자유표면은 질량이 없는 일련의 표적입자들에 의해서 표시된다. 본 연구에서 표적입자가 상하로만 움직인다고 가정(w_p 만을 고려)하였으며, 따라서 표적입자의 위치는 각 시간 간격 동안 아래와 같이 Lagrangian방법에 의해서 움직인다.

$$\begin{aligned} x_p &= x_p^0 \\ y_p &= y_p^0 \\ z_p &= z_p^0 + w_p \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 (x_p, y_p, z_p) 와 (x_p^0, y_p^0, z_p^0) 는 각각 표적입자의 새로운 위치와 이전 시간에서의 위치를 나타내며, w_p 는 각각의 표적입자에 대해서 가장 가까운 8개의 속도값을 선형 보간법을 이용하여 구한 입자들이 갖는 z 방향 속도 성분을 나타낸다.

2.3.2 자유표면 형상

Fig. 1은 자유표면에 위치하는 검사체적면의 형상을 나타낸다. 이러한 형상을 가지는 검사체

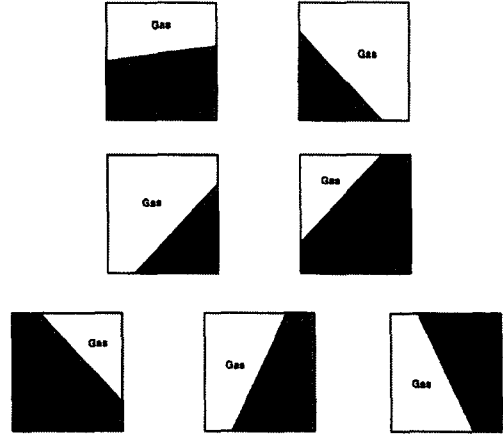


Fig. 1 자유표면에 접하는 검사면의 형태들

적면을 각 방향에 대해서 조합하면 다양한 검사체적 형상을 얻게된다. 문제는 자유표면 형상이 복잡한 유동의 경우 검사체적내에 포함된 유체들의 양을 정확히 계산하는데 어려움이 따른다는 것이다.

2.3.3 Local density와 viscosity의 계산

표적입자들은 자유표면의 형태를 표시하는데 편리할 뿐만 아니라 자유표면에 의해서 나누어지는 검사체적들에 대한 밀도와 점성을 계산하는 수단을 제공한다. 이러한 검사체적의 물성치들은 각 검사체적내의 유체들이 포함된 상대적인 양에 기준한 가중치에 의해서 기체와 액체의 물성치들을 평균하여 구한다. 평균밀도는 각 검사체적과 검사체적면에서 계산되어지며, 전자는 비정상항(unsteady term)과 체적력의 계산에 이용되고 후자는 대류항의 계산에 이용된다. 또한 점성계수 μ 는 전단 응력항을 계산하기 위하여 검사체적면에서 밀도를 구하는 방법과 동일한 방법으로 다음과 같은 식을 이용하여 구한다. 여기서 β 는 검사체적내에서 액체가 차지하는 비율이다.

$$\begin{aligned} \rho_{avg} &= \beta \rho_{liquid} + (1 - \beta) \rho_{gas} \\ \mu_{avg} &= \beta \mu_{liquid} + (1 - \beta) \mu_{gas} \end{aligned} \quad (5)$$

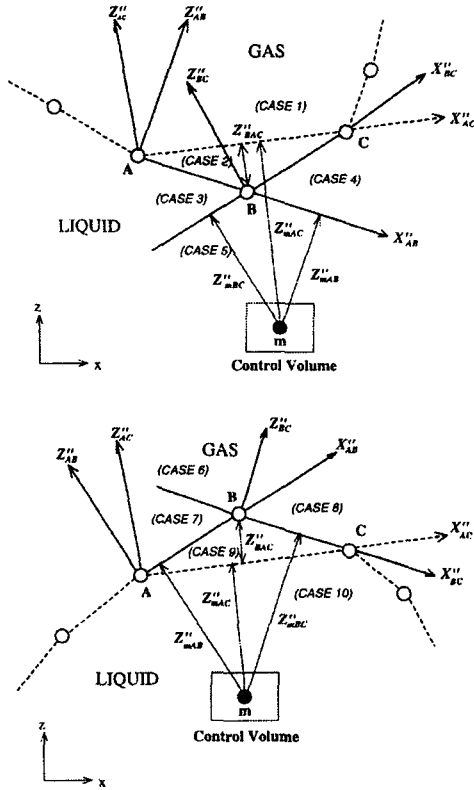


Fig. 2 표적입자를 포함하지 않는 검사체적에서 유체의 종류를 결정하는 좌표계

2.3.4 표적입자 처리

자유표면에 걸쳐 있지 않은, 즉 어떠한 입자도 포함하지 않는 검사체적이 기체 또는 액체로 채워져 있는가를 Fig. 2와 같이 검사체적의 중심 m 에서 가장 가까운 입자를 B , 양 옆의 입자를 A, C 로 하여 $z''_{mAB}, z''_{mBC}, z''_{mAC}, z''_{BAC}$ 의 부호 조합에 의해 판별한다. Table 1에 각각의 경우를 설명하였다.

2.3 계산모델 및 경계조건

정지파는 반대 방향으로 진행하는 2개의 동일한 진행파의 중첩에 의해서 얻어질 수 있으며, 자유표면은 수직방향으로만 움직이게 된다. 이러한 정지파는 Fig. 3과 같은 일정한 크기의 사각수조 내에서도 존재할 수 있다.

Table 1 표적입자를 포함하지 않는 검사체적에서 유체의 종류를 결정하는 경우의 수

	z''_{mAB}	z''_{mBC}	z''_{mAC}	z''_{BAC}	종류
CASE 1	+	+	+	-	GAS
CASE 2	+	+	-	-	GAS
CASE 3	-	+	-	-	LIQUID
CASE 4	+	-	-	-	LIQUID
CASE 5	-	-	-	-	LIQUID
CASE 6	+	+	+	+	GAS
CASE 7	+	-	+	+	GAS
CASE 8	-	+	+	+	GAS
CASE 9	-	-	+	+	LIQUID
CASE 10	-	-	-	+	LIQUID

적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= 0 \text{ at } x=0.0m, 5.0m \\
 v(x, y, z) &= 0 \text{ at } y=0.0m, 0.5m \\
 w(x, y, 0) &= w(x, y, 0)=0
 \end{aligned}$$

파고 (a)가 0.01m, 0.05m인 경우에 대해서 계산을 수행하였다. 시간 간격 (Δt) 및 격자 크기가 계산 결과에 미치는 영향을 살펴보기 위해 시간간격 (Δt)을 0.001, 0.01, 0.02sec, 격자 크기를 $30 \times 5 \times 30, 40 \times 5 \times 30, 50 \times 5 \times 30$ 로 변화시키면서 계산하였다. 수치 해석에 사용된 계산 격자는 자유표면 형상을 보다 정확하게 예측하기 위해서 자유표면 근처에서 조밀한 형태를 취하였고, 수직벽에 대해서는 균일한 격자를 사용하였다.

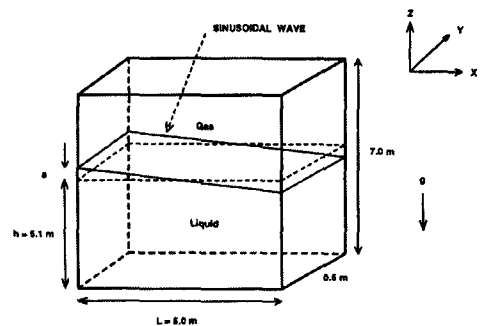


Fig. 3 계산모델 개략도

3. 결과

Fig. 4(a)~(h)는 1주기 동안 속도 벡터의 크기와 방향이 변화하는 것을 나타낸다. Fig. 4(a)~(d)에서는 $x=2.5m, z=5.1m$ 인 지점을 중심으로 유동이 전체적으로 반시계 방향으로, Fig. 4(e)~(h)에서는 시계 방향으로 진행된다. 수직벽 ($x=0.0m, 5.0m$)에서는 수직방향 속도 성분만 나타나고, $x=2.5m$ 에서는 수평방향 속도 성분만 나타난다. 이론적으로 속도 성분이 영이 되어서 모든 에너지가 위치에너지가 되는 시간인 1/2주기, 1주기에서는 속도 벡터의 크기가 매우 작은 것을 볼 수 있다. 바닥면에서 자유표면으로 가까워짐에 따라 속도 벡터의 크기가 커짐을 볼 수 있다.

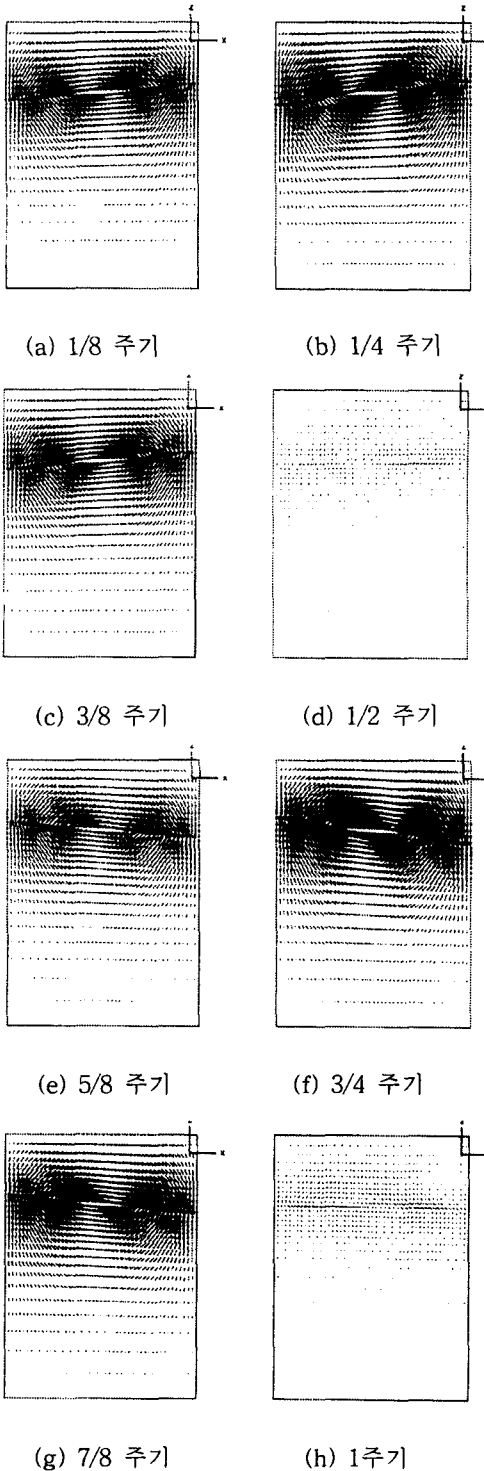
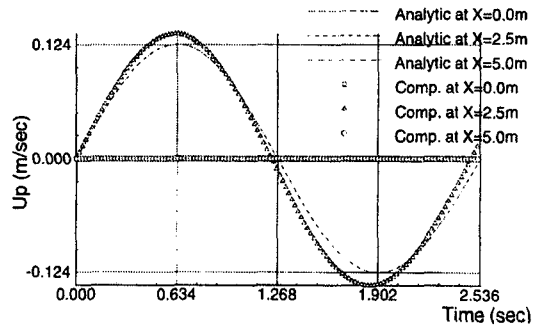
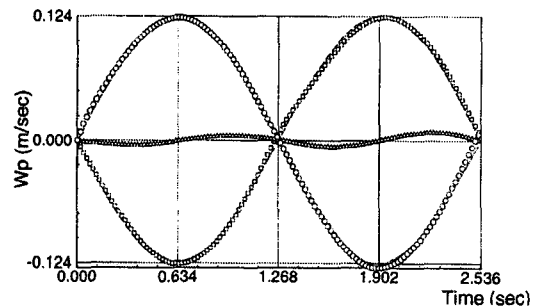


Fig. 4 속도장 ($a=0.01m, \Delta t=0.02sec$)



(a) 수평방향 속도성분 (U_p)



(b) 수직방향 속도성분 (W_p)

Fig. 5 표적입자 속도변화 ($a=0.05m, \Delta t=0.02sec$)

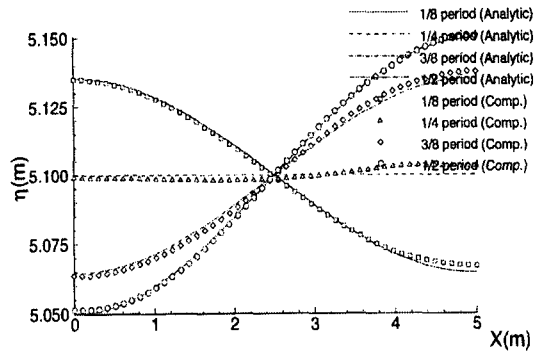
Fig. 5는 1주기 동안에 $x=0.0m, 2.5m, 5.0m$ 에서 표적입자의 수평, 수직방향 속도성분을 표시한 것이다. Fig. 4의 속도장에서 볼 수 있듯이 1/2주기 ($t=1.268 \text{ sec}$)로 전체적인 유동장의 방향이 바뀌는 것을 살펴 볼 수 있다. 수직벽에서 표적입자의 수평방향 속도성분은 항상 영인 반면, 수직방향 속도성분은 자유표면이 수평이 되는 1/4주기 ($t=0.634 \text{ sec}$), 3/4주기 ($t=1.902 \text{ sec}$)에서 선형이론에 의해서 구한 최대값 $0.124m/s$ 와 거의 일치하는 값을 가진다.

$x=2.5m$ 에서는 표적입자의 수평방향 속도성분은 1/4주기, 3/4주기에서 선형이론에 의해서 구한 최대값보다 다소 큰 값을 나타내고, 수직방향 속도성분은 거의 영에 가깝다. 시간이 지남에 따라 주기가 변하게 되어서 선형이론에 의해 구한 속도 성분이 최대, 최소값을 가지는 시간과 다소 일치하지 않음을 볼 수 있다.

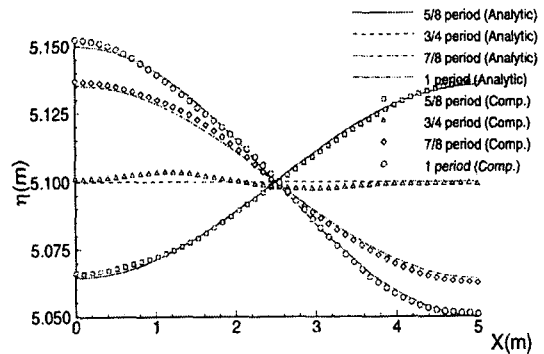
Fig. 6은 1주기를 동안 자유표면의 형상변화를 나타낸다. 유체 입자는 $x=2.5m, z=5.1m$ 인 지점을 중심으로 회전하며, 자유표면 형상들이 회전중심에서 일치하지 않고 다소 어긋나 있다. 이러한 현상은 유한 차분식이 정해진 공간영역에 걸친 평균값과 관계가 있고, 파진폭이 증가함에 따라 자유표면에 약간의 파동이 발생하고 있음에 따라 회전 중심에서 입자의 속도가 영이 되지 않아서 회전 중심이 다소 움직이기 때문이다.

Fig. 7에서 자유표면의 형상 변화를 3차원적으로 나타내었다.

격자 크기 및 시간 간격은 Courant수를 결정하는 변수이며, 이 값이 작아지면 소산 오차(dissipation error)로 인해 파진폭은 감소하게 되고, 파는 주변으로 소산하게 된다. Fig. 8은 정해진 시간 간격에 대해서 격자 크기를 변화시킨 경우 1주기 동안에 사각 수조 수직벽에서 자유표면 변화를 선형 이론해와 비교한 것이다. 그림에서 L 은 왼쪽 벽 ($x=0.0m$), R 은 오른쪽 벽 ($x=5.0m$)을 나타낸다. $\Delta t=0.001 \text{ sec}$ 인 경우 격자수가 적을수록 Courant수가 작아지게 되어 파는 주변으로 소산하게 되고, 주기는 길어지

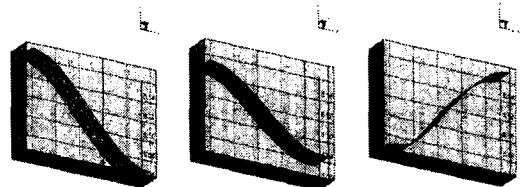


(a) 1/8 주기 ~ 1/2 주기



(b) 5/8 주기 ~ 1 주기

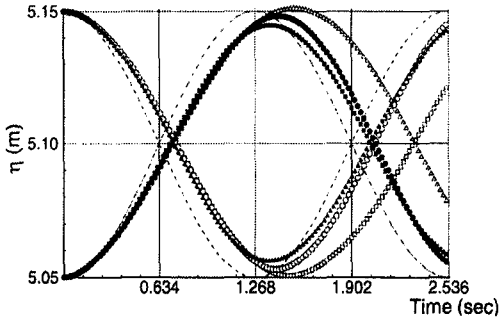
Fig. 6 자유표면 형상변화
($a=0.05m, \Delta t=0.02 \text{ sec}$)



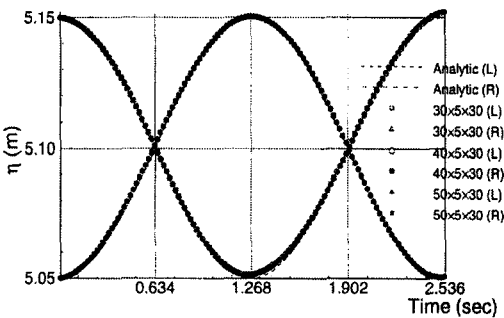
(a) 0 주기 (b) 1/8 주기 (c) 1/2 주기

Fig. 7 자유표면 형상 변화 3차원 도식
($a=0.05m, \Delta t=0.02 \text{ sec}$)

게 된다. $\Delta t=0.01 \text{ sec}$ 인 경우 자유표면의 변화는 격자 크기에 거의 영향을 받지 않음을 알 수 있다. $a=0.01m$ 인 경우에도 동일한 결과를 얻었다.



(a) $\Delta t=0.001\text{sec}$



(b) $\Delta t=0.01\text{sec}$

Fig. 8 다양한 격자수 사용이 수직벽에서 자유 표면 형상에 미치는 영향 ($a=0.05\text{m}$)

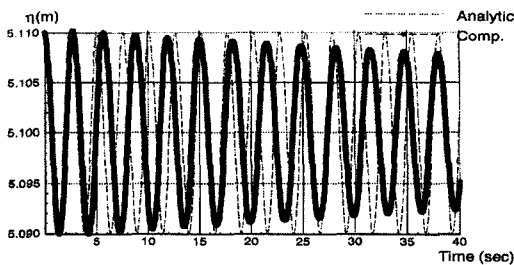


Fig. 9 다주기 동안 수직벽에서 자유표면 형상변화 ($a=0.01\text{m}$, $\Delta t=0.02\text{sec}$)

점성 유체에서 선형과 이론에 의하면, 점성의 영향은 단지 파진폭을 감소시키는 것이며, 파장, 위상(phase)에는 영향을 미치지 않는다. 그러나 비선형해에서는 점성 영향이 모든 것을 변화시킨다[4]. Fig. 9는 $t=40\text{sec}$ 동안 왼쪽 수직벽에서

자유표면의 파진폭 변화를 나타낸다. 선형 이론해와 비교해 볼 때 시간이 진행됨에 따라 파진폭은 조금씩 감소하며, 주기는 조금씩 길어지는 경향을 나타내었다.

4. 결론

본 연구에서는 자유표면을 수반한 3차원 유동을 해석하기 위하여 질량연속방정식을 체적연속방정식으로 변형시켜 자유표면에 복잡한 경계조건을 직접 부여하지 않고 내재적으로 부과하는 방법을 사용하여 해석하였으며, 자유표면 형상을 나타내기 위하여 표적입자를 자유표면에 위치시켜 Lagrangian 방법에 의해서 계산하였다. 이러한 방법을 주기적인 정지파에 대해서 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 파진폭이 증가할수록 자유표면이 불안정한 형상을 나타낸다.
- (2) 유동내에서의 점성손실로 인해 파진폭은 여러번 주기 운동 후 점점 감소하게 된다.
- (3) 수치해석 결과 자유표면에 복잡한 경계조건을 직접 부여하지 않고서도 3차원 자유표면 유동 해석이 가능함을 확인할 수 있었고, 비정상항과 대류항에 대해서 고차 차분 기법을 사용할 경우 더욱 정확한 해석이 이루어질 것으로 판단된다.

참고 문헌

[1] Harlow, F. H. and Welch, J. E., "Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free-surface", *Physics of Fluids*, 8-12 (1965), pp.2182- 2189

[2] Chan, R. K. C and Street, R. L., "A computer study of finite amplitude water waves", *J. of Computational Physics*, 6 (1970), pp.68-94

[3] Nichols, B. D. and Hirt, C. W., "VOF method for the dynamics of free boundaries", *J. of Computational Physics*, 39 (1981), pp. 201-225

- [4] Tang, C. J. and Patel, V. C., "Viscous effects on propagation and reflection of solitary waves in shallow channels" , *J. of Computational Physics*, **88** (1990), pp.86-113
- [5] Miyata, H. and Nishimura, S., "Finite difference simulation of nonlinear ship wave" , *J. Fluid Mechanics*, **157** (1985), pp. 327- 357
- [6] Spalding, D. B., "A method for computing steady and unsteady flows possessing discontinuities of density" , *CHAM Report* 910/2, (1974).
- [7] Maxwell, T. T., "Numerical modelling of free surface flows" , Imperial college, (1977).
- [8] Jun, L., "Computer modelling of flows with a free surface" , Imperial college, (1986).
- [9] Miles, J. W., "Surface-wave damping in closed basins" , *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, **297**, (1967), pp.459-475
- [10] Patankar, S. V., "Numerical heat transfer and fluid flow" , McGraw-Hill, (1982).
- [11] Lamb, H., "Hydrodynamics" , Dover, (1932).
- [12] Baek, J. H. and Jung, H. Y., "Numerical analysis of incompressible viscous fluid flow with free surface" , *Computational Fluid Dynamics J.*, **5**, (1996), pp.71-88
- [13] Baek, J. H. and Jung, H. Y., "Numerical analysis on axis-symmetric draining from a cylindrical tank with a free surface" , *Computational Fluid Dynamics J.*, **6**, (1998), pp.413-425