

고차 정확도의 순수 상류 차분법의 개발

조 지 룡*¹

Development of a High Accuracy Pure Upwind Difference Scheme

Ji Ryong Cho

In devising a numerical approximation for the convective spatial transport of a fluid mechanical quantity, it is noted that the convective motion of a scalar quantity occurs in one-way, or from upstream to downstream. This consideration leads to a new scheme termed a pure upwind difference scheme (PUDS) in which an estimated value for a fluid mechanical quantity at a control surface is not influenced from downstream values. The formal accuracy of the proposed scheme is third order accurate. Two typical benchmark problems of a wall-driven fluid flow in a square cavity and a buoyancy-driven natural convection in a tall cavity are computed to evaluate performance of the proposed method. For comparison, the widely used simple upwind scheme, power-law scheme, and QUICK methods are also considered. Computation results are encouraging: the proposed PUDS sensitized to the convection direction produces the least numerical diffusion among tested convection schemes, and, notable improvements in representing recirculation of fluid stream and spatial change of a scalar. Although the formal accuracy of PUDS and QUICK are the same, the accuracy difference of approximately a single order is observed from the revealed results.

Key Words: 대류향 차분법(Convection Scheme), 수치확산(Numerical Diffusion)
대류방향제한조건(Convection Direction Constraint), 순수상류차분법(Pure Upwind Difference Scheme), 벽구동캐비티(Wall-Driven Cavity), 자연대류(Natural Convection)

1. 서론

전산유체역학은 기법의 발전에 따라 현재 많은 공학문제의 해결에 활용이 되고 있지만 대체로

정량적인 결과의 도출보다는 정성적인 측면에서의 활용에 머물고 있는 것이 현재의 실정이다.

따라서 많은 비용과 시간이 드는 실험적 접근법을 대체하기 위한 신뢰도의 확보를 위해서는 크게 두 종류의 문제를 해결하여야 한다. 먼저 물리적인 현상을 정식화하는데 따른 문제점들로서, 대표적인 예로 난류유동 현상을 묘사하는 난류모형의 개발 등을 들 수 있을 것이다. 또

*¹ 정회원, 인제대학교 기계자동차 공학부

다른 문제는 얻어진 정식을 수치 해석하는데 따르는 하드웨어적인 문제와 소프트웨어적인 문제점들이 있다.

일반적으로 열 및 유체 유동현상은 소위 수송량 방정식으로 기술이 되는데, 이 수송량 방정식은 대류 및 확산에 의한 공간 수송항과 생성 또는 소멸항으로서 구성이 된다. 본 연구에서는 대류항의 수치적 차분법에 대하여 다룬다. 대류현상에 의한 유체역학 변수의 공간수송의 수치적인 근사는 열 및 유체 유동 현상의 엄밀한 묘사와 수치계산의 효율성 등을 좌우하는 매우 중요한 요소로서 간주되고 있다. 차분화 과정에서 자연스러운 선택이라 할 수 있는 중심차분법(Central Difference Scheme, CDS)[1]은 수치계산 과정에서 계산이 불안정하여지는 문제를 내포하고 있어서 계산격자의 크기에 대하여 2차의 정확도를 가짐에도 불구하고 별로 사용이 되지 않고 있다. 반면에 절대적으로 안정한 계산을 보장하는 소위 단순상류도식법(Simple Upwind Difference Scheme, SUDS)[1]은 계산격자의 크기에 대하여 단지 1차의 정확도를 가지므로 너무 큰 수치확산(Numerical Diffusion)을 나타낸다. 이로 인하여 유동장 내에서 어떤 유체역학량이 공간적으로 급격한 변화를 나타내는 경우 이를 제대로 추종하지 못하고 완만한 변화로 나타나게 된다. 상기의 두 차분화 방법은 대류항을 단독으로 차분화 하는데 반하여 Allen 과 Southwell[2]은 대류항과 확산항을 결합하여 동시에 차분화 하는 지수 차분법(Exponential Scheme)을 제시하였고, 지수함수는 계산시간이 많이 걸리므로 이를 단순화하여 Spalding은 하이브리드 차분법(Hybrid Scheme)[3]을, 그리고 Patankar[1]는 멱함수 차분법(Power-Law Difference Scheme, PLDS)을 각기 제안하여 현재까지도 광범위하게 공학문제의 해결에 사용이 되고 있는 상황이다. 그러나 CFD 기법의 적용범위가 넓어지고 보다 높은 정확도의 결과가 요구됨에 따라 많은 문제점이 나타나고 있어서, 현재 CFD 종사자들의 일반적인 견해는 이들 차분법을 실험결과가 알려지지 않은 문제에 대하여 이를 예측 적인 목적으로는 사용하지 않는다는 것이다. 본 연구의 내용에서도 이러한 차분법들은 계산결과의 정량적인 정확도는 물론이고 경우에 따라서는 유동의 정성적인 측면조차도 제대로 재현하지 못함을 보여주기로 한다. 이러한 이유로 최근 들어 주

목을 받고 있는 것이 수치확산이 작은 Leonard의 QUICK(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)[4] 방법이다. 초기에는 상대적으로 복잡한 코딩문제와 물리적으로 타당하지 않는 수치진동의 유발 문제로 인하여 그 장점에도 불구하고 널리 사용이 되지 못하였지만, 수치진동을 제거하는 TVD 제한조건(Total Variation Diminishing Constraint)이 Harten[5] 과 Sweby[6]에 의하여 제시되면서 그 사용빈도가 높아지고 있다. Gaskell 과 Lau[7]의 SMART(Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport), Leonard[8]의 SHARP(Simple High Accuracy Resolution Program) 그리고 Lien 과 Leschziner[9]의 UMIST(Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport) 등이 대표적인데 이들은 계산 격자점 주변의 유동상황에 따라 수치진동이 생기지 않도록 SUDS, CDS, QUICK 등의 대류항 차분법을 적당히 선택하여 이용한다. 이들 고차 정확도의 차분법들은 공통적으로 유동장 내부 제어체적 표면에서의 유동 특성량을 결정하기 위하여 기본적으로 이미 알려진 상류지점과 하류지점에서의 특성량 값을 이용한다. 이에 반하여 Cho[10]는 임의의 스칼라량의 대류에 의한 공간수송은 하류 지점의 특성에 의하여 영향을 받지 않는다는 물리적인 사실에 따라 제어체적 표면에서의 특성량 값이 오로지 상류지점에서의 값들에 의하여만 결정이 되어야 한다는 CDC(Convection Direction Constraint)의 개념을 소개하고 이를 2차 정확도의 상류차분법에 적용한 후 몇 가지 유동에 대하여 시범적으로 수치해석을 수행하여 그 타당성을 확인하였다. 전반적인 정확도는 SUDS 와 PLDS 에 비해서는 월등히 좋은 결과를 보여주지만 QUICK 방법에 비해서는 상대적으로 약간 낮은 정확도를 보였는데, 이는 본질적으로 QUICK 은 3차의 정확도를 지니기 때문이다. 본 연구에서는 CDC를 3차 정확도의 상류차분법에 적용한 대류항 차분법을 제시하고 몇 가지의 대표적 유동들에 대하여 그 성능을 QUICK 방법과 비교 검토 하고자 한다.

2. 대류방향 제한조건과 고차의 순수상류차분법

여기서는 논의의 편의상 비압축성의 1 차원 정상유동에 대하여 생각을 하자. 이 경우 임의의 유체역학량 ϕ 에 대한 수송방정식은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\frac{d}{dx}(u\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S \quad (1)$$

여기서 u , Γ 그리고 S 는 각기 x 방향의 속력, 물리적 확산계수 그리고 원천항을 의미하며, 좌변은 유체의 대류에 의한 공간확산을 나타내고, 우변의 첫째 항은 확산에 의한 공간확산을 의미한다. 위 방정식을 Fig. 1의 1차원 제어체에 대하여 적분을 하면 다음과 같이 차분 방정식이 얻어진다.

$$u_e\phi_e - u_w\phi_w \approx \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta_e} + \frac{\Gamma_w(\phi_W - \phi_P)}{\delta_w} + S\delta_P \quad (2)$$

이 대수방정식은 제어체적 표면에서 u_e , u_w , ϕ_e , ϕ_w , Γ_e 와 Γ_w 의 값을 적절히 근사를 하면 풀려질 수 있으며, 주된 관심은 대류항의 차분화 방법에 있다. 자연스러운 선택은 제어체적 표면에서 상기의 모든 량에 대하여 중심차분을 취하는 것이며, 이 경우 전체 방정식의 각 항은 모두 공간격자의 크기에 대하여 2차의 정확도를 가지게 되어 바람직하다. 그러나 유동의 Reynolds 수가 커지면 불행히도 시스템 매트릭스의 대각선 성분의 절대치가 비 대각선 성분의 절대치보다도 작게되어 수치계산이 불안정하여지게 된다. 따라서 이러한 수치적 불안정성을 유발하지 않는 대류항 차분화 방법이 요구된다. 제어체적 표면에서의 임의의 유체역학량 ϕ_f 를 결정하기 위해서 일반적으로 Taylor 급수를 이용하게 된다. 일례로 Fig. 1 에서 제어체적 동쪽 면 e 에서 유체의 속도가 양의 값을 가지는 경우에 Leonard 의 QUICK 방법에 의한 차분법을 살펴보자. QUICK 에서는 제어체적 표면에서의 값을 결정하기 위하여 제어체적 표면 보다 상류에 위치한 두 격자점에서의 값 ϕ_P 와 ϕ_U 그리고 하류 격자점에서의 값 ϕ_D 를 이용한다. 편의상 격자간격이 δ 로 균일

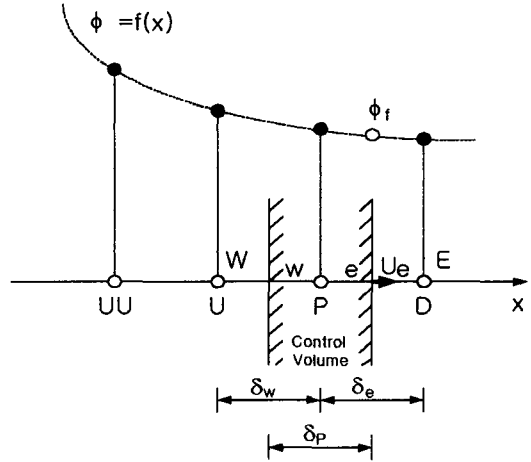


Fig. 1 One dimensional control volume and stencil for estimation of ϕ_f .

하다면 각 격자점에서의 값은 다음과 같이 표현이 된다.

$$\begin{aligned} \phi_D &= \phi_f + \frac{\delta}{2}\phi_f' + \frac{\delta^2}{8}\phi_f'' + O(\delta^3) \\ \phi_P &= \phi_f - \frac{\delta}{2}\phi_f' + \frac{\delta^2}{8}\phi_f'' + O(\delta^3) \\ \phi_U &= \phi_f - \frac{3\delta}{2}\phi_f' + \frac{9\delta^2}{8}\phi_f'' + O(\delta^3) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 3차 이상의 항을 무시하고 1차 및 2차 도함수를 소거하면

$$\phi_f \approx \frac{3\phi_D + 6\phi_P - \phi_U}{8} = \text{ftn}(\phi_D, \phi_P, \phi_U). \quad (4)$$

앞서 언급한 TVD를 고려한 고차 정확도의 SMART, SHARP 그리고 UMIST 등의 대류항 차분법들은 동일한 인자들 (ϕ_D, ϕ_P, ϕ_U)을 사용하고 있으며 단지 어떤 보간법을 사용하는가에 차이가 있다. 그러나 물리 현상론적인 측면에서는 대류에 의한 물리량의 공간수송은 주지하다시피 상류에서 하류 쪽으로 일방적으로 전달이 되며 이 흐름에 거슬러서 역방향으로는 공간수송이 이루어지지 않는다. 이러한 관점에서 상기의 Eq.(4) 는 제어체적 표면에서의 값을 근사함에 있어서 하류의 값을 고려하고 있으므로

부적절하다고 여겨지며 대류항의 차별화에는 대류방향을 제한조건으로서 적극적으로 고려할 필요성이 있다. 이제 하류 점의 값 ϕ_D 을 제외하고 3차의 정확도를 확보하기 위하여 상류 측의 세 격자점에서의 값 ϕ_P, ϕ_U 그리고 ϕ_{UU} 를 이용하며, Eq.(3) 과 유사한 과정을 거쳐서 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\phi_f \approx \frac{15\phi_P - 10\phi_U + 3\phi_{UU}}{8} \quad (5a)$$

이는 다시 다음과 같은 의미 그룹으로 나눠서 쓸 수 있다.

$$\phi_f \approx \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_U}{2} + \frac{3\phi_P - 6\phi_U + 3\phi_{UU}}{8} \quad (5b)$$

여기서 우변의 첫째 항은 상류 값에 의한 1차 정확도의 근사이며, 둘째 항은 함수 ϕ 의 기울기에 의한 보정량으로서 2차의 수치적 정확도를 제공하고, 셋째 항은 함수 ϕ 의 곡률을 고려한 보정량으로 3차의 정확도를 확보하게 한다. 그러나 상기의 대류방향 제한조건 (Convection Direction Constraint, CDC) 개념에 따르면 둘째 항은 U_U 가 양의 값을 가지는 경우에만, 셋째 항은 U_U 와 U_{UU} 가 모두 양의 값을 가지는 경우에만 유효하다. 따라서 CDC를 Eq.(5b)에 적용을 하여 다음과 같은 차분식을 구성할 수 있다.

$$\phi_f \approx \phi_P + SW_U \left(\frac{\phi_P - \phi_U}{2} + SW_{UU} \frac{3\phi_P - 6\phi_U + 3\phi_{UU}}{8} \right) \quad (6a)$$

여기서 SW_U 와 SW_{UU} 는 다음과 같은 절환 함수이다.

$$SW_U = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{sign}(U_f \cdot U_U) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6b)$$

$$SW_{UU} = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{sign}(U_f \cdot U_{UU}) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6c)$$

즉 U_f 와 U_U 의 방향이 다르면 단순한 상류 차분 SUDS가 되며, U_{UU} 만의 방향이 다르면 2차 근사의 순수상류차분법이 되고, 세 속도가 모두 같은 방향이면 3차 정확도의 순수상류차분법이 된다. 그러나 Eq.(6)으로 수행한 예비계산에 따르면 QUICK 방법과 마찬가지로 물리적으로 타당하지 않은 수치진동이 유발되어 적절한 TVD 제한조건을 부가하여야 함이 확인되었다. 따라서 Leonard와 Drummond[11]의 ULTRA 제한조건을 본 연구에서 채택하였으며, 제어체적 표면에서 임의의 물리량 ϕ 값을 결정하는 방법은 다음과 같이 요약된다.

step 1 3차 정확도에 의한 고차 평가치 (Higher Order Estimation, HOE)를 계산한다:

$$\phi_f^{HOE} \approx \phi_P + SW_U \left(\frac{\phi_P - \phi_U}{2} + SW_{UU} \frac{3\phi_P - 6\phi_U + 3\phi_{UU}}{8} \right) \quad (7a)$$

step 2 TVD를 만족시키기 위하여 ULTRA 제한조건을 적용한다:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_U &\leq \tilde{\phi}_f^{HOE} \leq 1 & \text{if } 0 \leq \tilde{\phi}_U \leq 1 \\ \tilde{\phi}_f^{HOE} &\rightarrow 0 & \text{if } \tilde{\phi}_U \rightarrow 0_+ \\ \tilde{\phi}_f^{HOE} &= \tilde{\phi}_U & \text{if } \tilde{\phi}_U < 0 \text{ or } \tilde{\phi}_U > 1 \end{aligned} \quad (7b)$$

여기서

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_{UU}}{\phi_D - \phi_{UU}} \quad (7c)$$

step 3 TVD 수정된 평가치를 구한다:

$$\phi_f^{TVD} = \phi_{UU} + \tilde{\phi}_f^{HOE} (\phi_D - \phi_{UU}) \quad (7d)$$

step 4 지연 수정기법을 적용한다:

$$\phi_f = \phi_U + (\phi_f^{TVD} - \phi_U) \quad (7e)$$

Khosla 와 Rubin[12]의 지연수정기법 (Deferred Correction Technique)에 따른 Eq.(7e)에서 우변의 첫째 항은 결보기 대류로서 처리를 하고 괄호 안의 항은 생성항에 포함시켜서 처리를 한다. 이 경우 차분식의 시스템 매트릭스는 SUDS와 같게 되고 대각선 항이 항상 비 대각선 항보다도 상대적으로 커져서 고 Reynolds 수에서도 안정된 수치계산을 하는 것이 가능하여 진다. 상기의 차분법에서는 제어체적 면에서의 함수 값에 대한 고차 근사는 오로지 상류 값에만 의존하는 특징으로 인하여 본 연구에서 제시된 이 방법을 순수상류차분법 (Pure Upwind Difference Scheme, PUDS)으로 명명하였다. 그런데 운동량은 압력 반사 (Pressure Reflection)에 의하여 하류 상황이 상류 쪽으로 직접 전달이 되기 때문에 CDC 개념은 운동량 방정식에는 부적절하다고 느낄지도 모르겠다. 또한 대체로 CFD 프로그램의 사용자들은 동일한 대류항 차분법을 모든 수송량 방정식에 적용시키기를 원한다. 그러나 여하튼 PUDS 는 3차의 정확도를 가지기 때문에 QUICK 과 비견되는 수치적 결과를 줄 것이고, ULTRA 제한조건에서 부분적으로 하류의 특성을 반영하고 있으므로 별다른 문제는 없다고 판단이 된다.

3. 적용사례 연구

(a) 2차원 벽구동 캐비티 유동

Fig. 2 에 나타난 일정한 속도로 움직이는 상부 벽에 의하여 유발되는 2차원 캐비티 유동은 상세한 실험결과의 부재에도 불구하고 유동장 해석을 위한 수치적 방법의 평가를 위하여 널리 이용이 되고 있다. 그 이유는 먼저 캐비티 내의 중심부에 형성이 되는 주 소용돌이를 포함하여 Reynolds 수 ($Re \equiv U_w H / \nu$) 의 증가에 따라 다수의 재순환 영역이 벽 모서리 근처에서 나타나는 복잡한 유동형태가 되고, 이는 사용된 수치적 방법에 따라 크게 영향을 받기

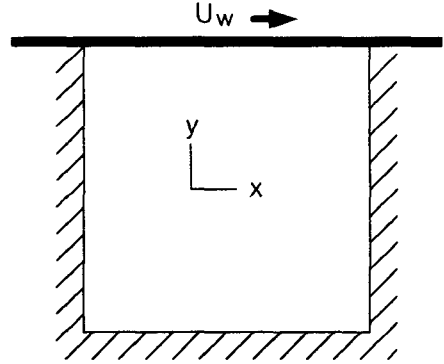


Fig. 2 Configuration of the wall-driven cavity flow.

때문이다. 또한 유동장의 경계는 모두 고체 벽면이어서 경계조건이 매우 잘 정의되므로 수치계산의 결과는 오로지 유동장 내부의 해석에 사용된 수치적 방법에 따라 좌우가 된다. 본 연구에서는 $Re = 10^2 \sim 10^4$ 범위의 유동장을 계산하였으나 편의상 $Re = 10^4$ 인 경우의 결과만 보고를 하며 이때 캐비티내의 유동은 Ghia 등[13]과 같이 층류라고 가정을 하였다. 이 Reynolds 수는 현재까지 다른 연구자에 의하여 상세한 결과가 제시된 가장 큰 값이다.

이차원, 비압축성의 캐비티 유동을 해석하기 위하여 와도(ω)-유량함수(Ψ) 방정식을 사용하여 압력장을 구하지 않는 방법을 채택하였다.

$$\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (9)$$

여기서

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (11)$$

이 방법은 압력장의 결정과 관련한 어떠한 근사도 하지 않으므로 단지 차분법의 효과만 분리하

여 그 결과를 볼 수 있고, 또한 수송량 미분 방정식의 수가 줄어서 계산시간이 단축되는 장점이 있다. 계산에 사용이 된 격자의 수는 x 와 y 방향으로 각기 61 개이며, 이때 다양한 대류향 차분법에 의하여 나타나는 결과를 Ghia 등이 2차 정확도의 중심차분법과 257x257 격자계를 이용하여 얻은 계산격자에 무관한 결과와 서로 비교를 하였다. 비교를 위하여 채택이 된 대류향 차분법은 SUDS[1], PLDS[1], Leonard 와 Drummond 의 ULTRA TVD 조건이 부가된 QUICK-U[11], Cho 의 PUDS-1[10], 그리고 본 연구에서 제시된 방법 (PUDS-2)들 이다. 경계 조건은 모든 차분법에 대하여 동일한 조건을 부여하였는데, 모든 경계에서 $\Psi = 0$ 을 부여하였고 ω 에 대해서는 2차 정확도의 경계조건을 부여하였다.

Fig. 3은 캐비티의 중심을 지나는 수직 축을 따라 x 방향의 속도 u 를 비교한 결과이다. 그림에서 보듯이 1차 정확도의 PLDS, 2차 정확도의 PUDS-1, 3차 정확도의 QUICK-U 은 수치확산 현상에 따라 Ghia 등의 결과와 커다란 차이를 나타냄이 확인이 되고 있다. 여기서 주목할 만한 내용은 PUDS-1 이 QUICK-U 방법보다도 비록 낮은 공칭 정확도를 가지기는 하지만 실제에 있어서는 상부와 하부의 벽면 경계층을 제외하고는 그 차이는 크지 않다는 것과, QUICK-U와 동일한 3차의 공칭 정확도를 지니는 PUDS-2는 QUICK-U에 비하여 Ghia 등의

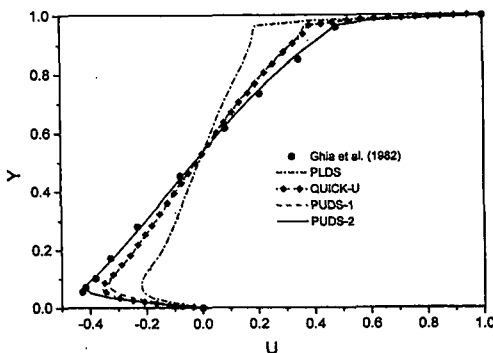


Fig. 3 Comparison of u -velocity along vertical lines through geometric center.

결과에 매우 근접한 결과를 준다는 사실이다. 이는 CDC의 개념을 채택한 다른 대류향차분법의 효용성을 매우 잘 보여주는 사례라고 판단이 된다. 또한 CDC의 개념이 스칼라량의 대류현상에 근거하여 도입이 되었지만 운동량의 대류과정 묘사에도 효과적임을 의미한다. Fig. 4는 캐비티 내에 형성이 되는 유선을 나타내는데 그림의 숫자는 유량함수의 값을 나타내며, 이 값의 크기는 유동장 예측의 정확도에 따라 크게 변화를 한다고 알려져 있다. Ghia 등의 결과에 따르면 $Re = 10,000$ 에서 캐비티 중심 근처에서 유량함수의 최소치는 -0.1197 정도이지만, PLDS는 -0.056, PUDS-1은 -0.095, QUICK-U는 -0.097로 현저히 낮은 값을 주는데 비하여 PUDS-2는 -0.116으로 약 3%정도의 작은 오차를 나타내고 있다. 이는 격자 밀도가 Ghia 등에 비하여 18%에 불과한 점을 감안할 때 매우 좋은 결과이다. 그리고 캐비티의 모서리 근처에서 형성이 되는 반시계 방향의 소용돌이의 세기도 PUDS-2가 가장 강하며 Ghia 등의 의 유동 형태에 가장 근접한 결과를 주고 있다.

(b) 2차원 캐비티내의 자연대류유동

부력에 의하여 야기되는 2차원 캐비티 내의 자연대류 유동 역시 대류향 차분법의 정확도를 검증하기 위하여 많이 사용이 되고 있다. 유동의 개요는 Fig. 5에 나타나 있다. 고온의 벽 근처의 유체는 가열에 의하여 위로 상승을 하며 저온의 벽 근처에서 냉각이 되면서 하강을 한다. 반면에 Vest 와 Arpacı[14]에 따르면 두 벽 사이의 가운데 부분에서는 어떤 유동 조건에서 다수의 2차원의 회전하는 유동구조가 형성이 된다. Leonard 와 Drummond[11]는 이러한 특징적인 유동형태는 대류향 차분법의 정확도에 크게 의존하고, 차분화 과정에서 수치확산이 크게 나타나면 이러한 구조가 예측이 되지 않음을 보였다. 이 경우도 앞서와 마찬가지로 $\Psi - \omega$ 방법을 채택하여 압력장을 구하지 않고 유동장을 전산 해석하며, Boussinesq 근사를 도입하여 다음과 같은 유동 방정식을 얻는다.

$$G_R \left(\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T}{\partial x} \quad (12)$$

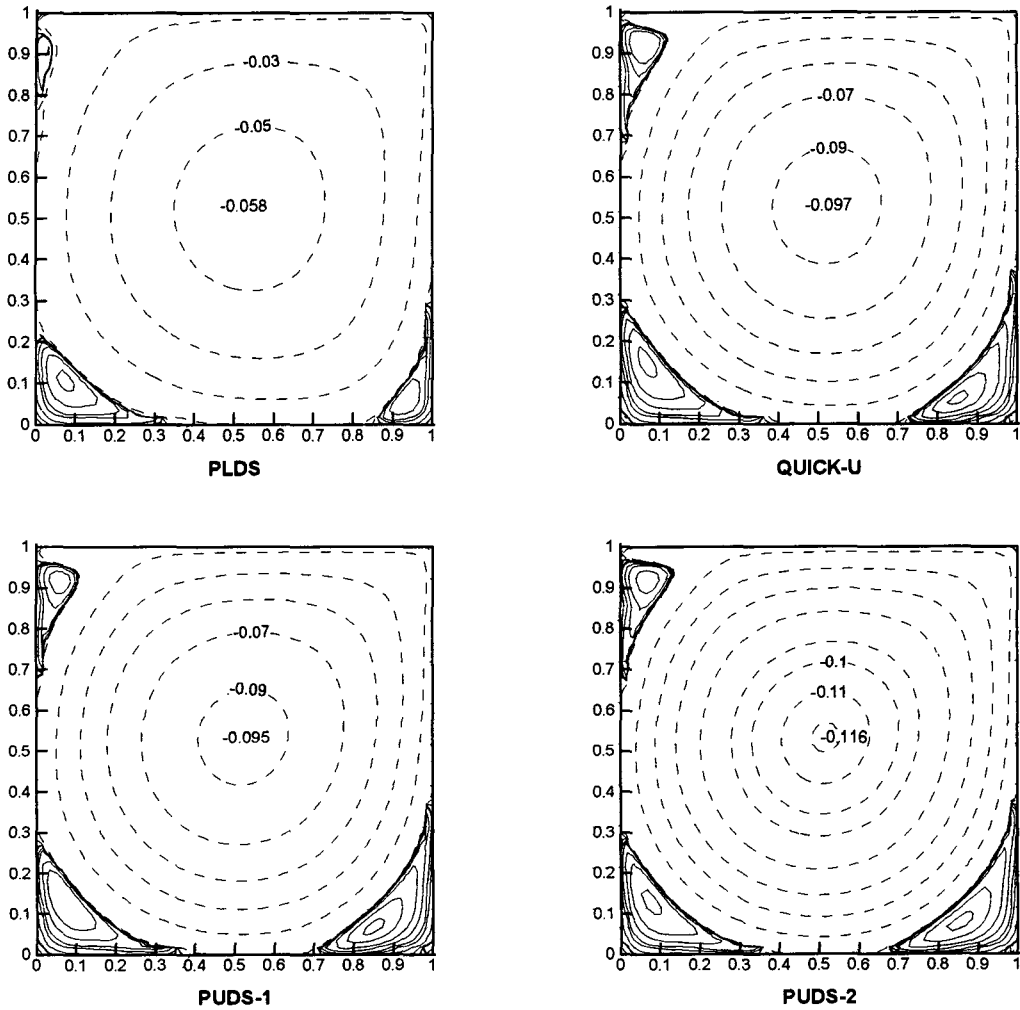


Fig. 4 Streamline patterns for the cavity flow.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (13)$$

$$G_R \left(\frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} \right) = \frac{1}{P_R} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

여기서 Grashof 수 G_R 과 Prandtl 수 P_R 은 각기

$$G_R = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}, \quad P_R = \frac{\nu}{\alpha} \quad (15)$$

위 식들에서 $\beta, \nu, \alpha, g, L, H$ 그리고 ΔT 는 각기 열팽창계수, 점성계수, 열확산계수, 중력가속도, 캐비티의 폭 과 높이, 그리고 고온 벽 과 저온 벽의 온도차이를 의미한다. 본 연구에

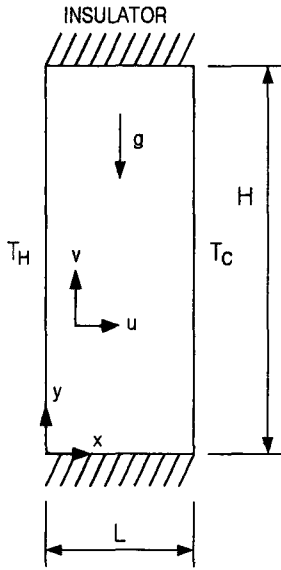


Fig.5 The tall cavity configuration.

서는 $H/L = 33, P_R = 0.71, G_R = 9500$ 인 경우에 대하여 계산을 하였다. 경계조건은 모든 경계면에서 $\psi = 0$ 조건과 ω 에 대해서는 2차 정확도의 경계조건을 부여하였다. 온도는 왼쪽

벽에서는 $T=1$, 오른쪽 벽에서는 $T=0$, 그리고 상부와 하부의 벽에 대해서는 단열조건을 2차 정확도의 차분식으로 부여하였다. 수치계산을 위하여 사용이 된 격자의 수는 x 와 y 방향으로 각기 31 개와 129개이며 균일한 격자계가 사용이 되었다. 여러 가지 대류항 차분법을 이용하여 예측이 된 캐비티 내의 유선의 모양을 Fig. 6 에 나타내었다. 1차 정확도의 SUDS와 PLDS의 경우는 특징적인 세포 유동구조가 전혀 예측이 되지 않는 등 유동의 정성적인 측면조차도 제대로 재현이 되지 않고 있다. 따라서 이들을 실험 정보가 알려지지 않은 경우에 사용하는 것은 매우 위험한 선택이다. 반면에 2차 정확도의 PUDS-1, 3차 정확도의 QUICK-U와 PUDS-2 는 모두 캐비티 내부에 형성이 되는 세포유동을 정성적으로는 재현하고는 있으나 PUDS-2 가 가장 많은 수의 세포유동을 만들어 내고 있으며, 세포내의 소용돌이의 세기 또한 가장 강하다. 이는 앞서의 벽구동 캐비티 유동에서와 마찬가지로 상기의 대류항 차분법들 가운데에서 PUDS-2가 수치확산이 가장 작음을 재확인하고 있다. Fig. 7은 캐비티 내부의 등온선을 나타낸다. 그림에서 인접한 등온선은 0.1의 온도차이를 가진다. 전체적으로 온도장은 유동장의 예측 결과와 내부적으로 일관성을 가지는 결과를 나타내고 있다.

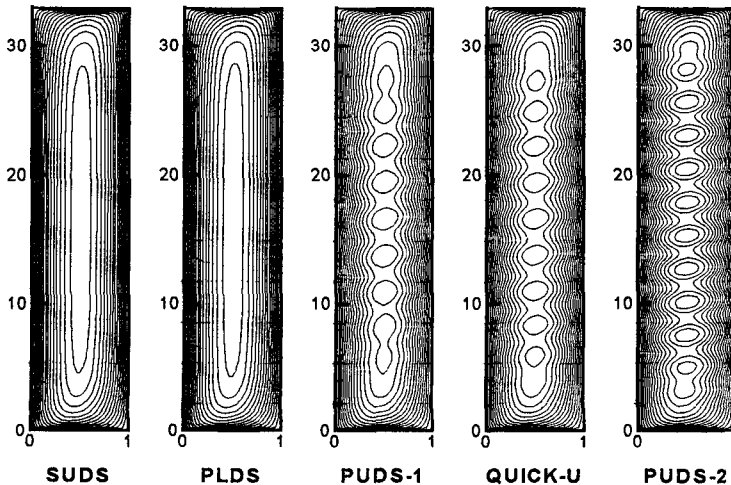


Fig.6 Streamline patterns for the tall cavity.

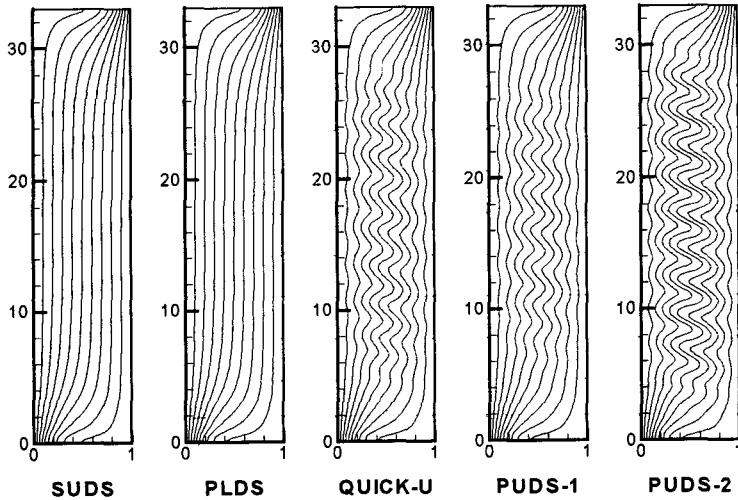


Fig. 7 Isothermal lines for the tall cavity.

즉, SUDS 및 PLDS 를 사용한 경우는 상부 및 하부 벽 근처를 제외한 대부분의 영역에서 온도는 폭 방향으로로는 변화를 하지만 높이 방향으로 거의 변화를 일으키지 않는다. 반면에 PUDS-1, QUICK-U 그리고 PUDS-2는 폭 방향 뿐만이 아니라 높이 방향으로도 변화를 일으키며 마치 주기적으로 주름이 잡힌 모습을 나타내고 있다. PUDS-2가 가장 많은 주름의 수를 만들고 있으며 주름의 폭 역시 가장 많아서 앞서 유선의 예측과 부합한다. Fig. 8은 폭의 중심선을 따른 온도 변화를 나타낸다. 상부와 하부의 벽 근처 경계층 내부에서는 모든 대류항차분법들이 거의 동일한 온도 분포를 가진다. 그러나 SUDS와 PLDS는 모든 영역에서 단조적인 온도 변화를 나타내는데 비하여, PUDS-1, QUICK-U 그리고 PUDS-2는 경계층을 제외한 대부분의 영역에서 정현파의 형태를 나타내며 변화를 하고 있다. 그러나 앞서의 유동장 및 온도장의 예측 결과에서 나타났듯이 PUDS-2가 변화의 주기가 가장 짧으며 또한 가장 큰 온도 변화를 나타내어 약 0.22의 변동을 나타낸다. 이에 비하여 QUICK-U 은 단지 0.15의 변동을 나타내고, PUDS-1은 이보다는 약간 작지만 QUICK-U에 비견되는 예측 정확도를 지닌다. 이와 같은 온도 변화는 TVD 제한 조건이 사용

이 되어 수치적인 진동이 아니라 물리적인 실제의 변화라는 점에서 본 연구에서 제시된 CDC에 근거한 PUDS-2가 가장 정확한 수치 계산결과를 준다고 판단이 된다. 또한 앞서의 벽구동 캐비티 유동에서와 마찬가지로 CDC의 개념이 적용이 될 경우 사실상 공칭 정확도를 한 단계 뛰어넘는 정확도의 전산해석 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

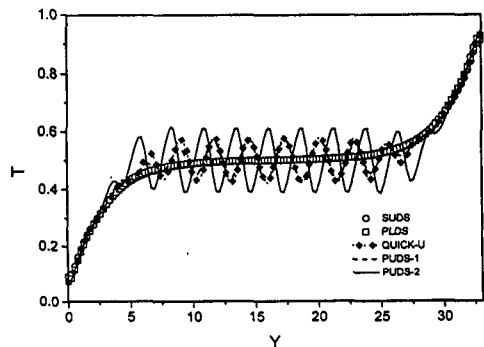


Fig. 8 Comparison of temperature along vertical lines through geometric center.

4. 결과의 요약

본 연구에서는 3차의 정확도를 가지는 상류차분법에 어떤 물리량의 대류가 상류의 조건에 의해서만 영향을 받고 하류의 조건에 의해서는 영향을 받지 않는다는 대류 방향 제한조건 (CDC)을 부가하는 소위 순수 상류 차분법 (Pure Upwind Difference Scheme) PUDS-2를 제시하였다. 여기에는 수치적인 진동을 제거하기 위하여 TVD 제한 조건 또한 도입하였으며, 수치 계산의 안정화를 위하여 지연수정기법이 사용되어 졌다. 이렇게 얻어진 대류항 차분법을 벽면 구동 캐비티 유동과 캐비티 내의 자연 대류 유동에 대하여 적용을 시켜 기존의 차분법들과 비교를 하였다. 그 결과 3차의 정확도를 가지는 PUDS-2는 1차의 정확도를 지니는 SUDS 및 PLDS 뿐만이 아니라 3차의 동일한 공칭 정확도를 지니는 QUICK-U에 비하여 월등히 적은 수치 확산을 나타내어 유동장 내의 재순환 흐름과 온도 변화를 가장 잘 묘사하는 것이 확인이 되었다. 유체의 운동량 방정식에서 대류항은 압력의 반환 현상에 의하여 하류의 영향을 직접 받으므로 CDC 개념 적용의 타당성에 의문을 지닐 수도 있다. 그러나 실제에 있어서는 벽구동 캐비티 유동 결과에서 보듯이 CDC를 채택한 PUDS-2가 QUICK-U에 비하여 월등히 좋은 결과를 주고 있다. 따라서 하류의 유동특성량 정보는 단지 수치진동을 막기 위하여 제한적으로 사용을 하는 것이 보다 타당한 선택으로 판단이 된다. 본 연구에서 제시된 차분법 PUDS-2는 압력장의 결정 방법에 따르는 오차를 줄이기 위하여 $\omega-\psi$ 방법을 채택하고 또한 균일한 격자계를 채택하여 그 효과를 검증하였다. 그러나 이와 유사한 PUDS-1 차분법은 현재 보다 널리 쓰이고 있는 SIMPLE 방법[1] 및 물체표면 부착좌표계 (Body-Fitted Coordinate)를 채택한 프로그램에 이식이 되어 활용이 되고 있다 [15]. 따라서 PUDS-2 차분법도 SIMPLE 방법을 포함한 다양한 원시변수 방법 (Primitive Variable Method)과 함께 실제 공학적 문제의 해결을 위하여 활용이 가능하다.

후기

본 연구는 1996년도 인제대학교 학술연구조성비 지원으로 수행이 되었습니다.

REFERENCES

- [1] Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York (1980).
- [2] Allen, D. and Southwell, R. V., "Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 8 (1955), p.129.
- [3] Spalding, D. B., "A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 4 (1972), p.551.
- [4] Leonard, B. P., "A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19 (1979), p.59.
- [5] Harten, A., "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws," *J. Comput. Phys.*, Vol. 49 (1983), p.357.
- [6] Sweby, P. K., "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21 (1984), p.995.
- [7] Gaskell, P. H., and Lau, A. K. C., "Curvature-compensated convective transport: SMART, A new boundedness-preserving transport algorithm," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 8 (1988), p.617.
- [8] Leonard, B. P., "Simple high accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 8 (1988), p.1291.
- [9] Lien, F. S., and Leschziner, M. A., "Upstream monotonic approximations for turbulent flows," *Proc. of 6th Biennial Colloquium on Computational Fluid Dynamics*, paper 2.5, Manchester (1994).
- [10] Cho, J. R., "A convection scheme sensitized to the convection direction of a scalar quantity," *KSME Int. J.*, Vol. 11 (1997), p.106.
- [11] Leonard, B. P., and Drummond, J. E., "Why you should not use 'Hybrid', 'Power-Law' or related exponential schemes for

convective modelling-There are much better alternatives," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 20 (1995), p.421-442.

[12] Khosla, P. K., and Rubin, S. G., "A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme," *Comput. Fluids*, Vol. 2 (1974), p.207.

[13] Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48 (1982), p.387.

[14] Vest, C. M. and Arpaci, V., "Stability of natural convection in a vertical slot," *J. Fluid Mech.*, Vol. 36 (1969), p.1.

[15] 조 지룡, 외 2인, "전산유체 기법을 이용한 연속주조 Tundish 의 형상설계," 한국전산유체공학회지, 제2권, 제1호 (1997), p.117.