

피스톤에 의해 유입되는 유동에 대한 유한요소법을 이용한 수치해석

최종욱¹, 박찬국²

Numerical Analysis for the Piston-Driven Intake Flows using the Finite Element Method

J. W. Choi and C. K. Park

The FVM(Finite Volume Method) have been used mainly for the flow analyses in the piston-cylinder. The objective of the present study is to analyze numerically the piston-driven intake flows using the FEM(Finite Element Method). The FEM algorithm used in this study is 4-step time-splitting method which requires much less execution time and computer storage than the velocity-pressure integrated method and the penalty method. And the explicit Lax-Wendroff scheme is applied to nonlinear convective term in the momentum equations to prevent checkerboard pressure oscillations. Also, the ALE(arbitrary Lagrangian Eulerian) method is adopted for the moving grids. The calculated results show good agreement in comparison with those by the FVM and the experimental results by the LDA.

Key Words: 유한요소법(Finite Element Method), 4-단계 시간-분할 방법(4-Step Time-Splitting Method), Lax-Wendroff 기법(Lax-Wendroff Scheme), ALE 방법(Arbitrary Lagrangian Eulerian Method), 이동격자(Moving Grids)

1. 서론

피스톤-실린더 문제에서 피스톤에 의해 유입되는 층류유동에 대하여 Pereira[1]는 고정된 격자를 갖는 입구 파이프(inlet pipe) 영역과 움직이는 격자를 갖는 실린더영역으로 각각 나누어서 수치해석을 수행하였다. 이러한 방법은 급확장된 부분(sudden expansion)에서 압력의 뒤쪽(backward) 영향이 무시되는 단점이 있다. 이에

대해 Ströll[2]은 유한체적법을 이용하여 전체영역에 대하여 동시에 수치해석을 수행하였다. 그리고 실험결과와 거의 일치하는 수치해석 결과를 얻었다. 본 연구에서는 3차원, 층류, 비정상, 비압축성 유동을 갖는 피스톤-실린더 문제에 대하여 유한요소법에 의한 수치해석을 수행하였다.

유한요소법을 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해를 구하는 방법은 크게 속도-압력 통합방법(velocity-pressure integrated method), penalty 함수법(penalty method), 속도-압력분리 방법(segreated velocity-pressure method)으로

¹ 학생회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

² 전남대학교 기계공학과

나누어 진다. 속도-압력 통합방법[3]은 속도와 압력에 대하여 동시에 해를 구하기 때문에 계산 시간과 컴퓨터 저장공간을 많이 필요로 한다. 이러한 단점을 보완한 방법으로 penalty 함수법[4]이 있다. 이 방법은 속도에 대하여 해를 구한 후 압력에 대해서 연속방정식을 이용한 penalty 함수공식이 적용된다. 계산시간과 컴퓨터 저장공간은 속도-압력 통합방법 보다는 적게 소요되지만 연속방정식을 대략적으로 만족하는 단점을 가지고 있다. 이에 대해 속도-압력 분리방법[5]은 속도와 압력에 대하여 순차적으로 해를 구하기 때문에 계산시간과 컴퓨터 저장공간이 앞에서 기술한 2가지 방법에 비하여 적게 소요되는 장점을 가지고 있다. 한편, 이 방법은 SIMPLE 알고리즘에 의한 방법과 unsteady 알고리즘에 의한 방법으로 나누어지는데, unsteady 알고리즘에 의한 4단계 시간분할방법은 연속방정식을 정확히 만족하는 장점을 가지고 있다.

유한요소법에서는 격자점과 격자점사이에 보간함수(interpolation function) 혹은 형상함수(shape function)가 사용된다. 일반적으로 유동해석에서는 속도에 대해서 2차, 압력에 대해서 1차 보간함수가 사용되어지며, 이를 혼합보간함수(mixed order interpolation function)라고 한다. 하지만 이러한 혼합 보간함수의 사용은 코딩(coding) 및 경계조건처리를 복잡하게 한다. 이러한 이유로 최근에는 대부분 동차 보간함수(equal order interpolation function)가 사용되고 있으며, 압력장의 변화가 큰 문제에 대해서는 혼합 보간함수가 사용될 때 보다 정확한 해가 구해진다[6].

그러나 동차 보간함수가 사용된 경우 checker-board 현상이 발생하기 쉽다. 이러한 현상을 방지하기 위해 운동량방정식의 비선형 대류항에 대하여 explicit Lax-Wendroff scheme이 사용된다. 이 방법은 시간에 대한 2차 정확도를 갖는 알고리즘으로 upwind scheme을 적용하지 않고도 유선특성(streamline character)을 갖는다[7].

한편, 움직이는 격자를 고려한 유동해석방법에 대하여 Ikegawa[8]는 FEM/FDM composite scheme을 기차가 터널을 통과할 때 터널내의

유동해석에 적용하였고, Oogane[9]는 형상변환법을 이용하여 원주의 진동과 칼만 와류출의 동기현상을 연구하였다. 그리고 Soulaïmani[10]는 ALE(arbitrary Lagrangian Eulerian)방법을 이용하여 자유표면의 유동해석을 수행하였다.

본 연구에서는 피스톤-실린더내의 유동해석에 대하여 4단계 시간분할방법, explicit Lax-Wendroff scheme, ALE 방법을 이용한다.

2. 본 론

본 장에서는 ALE 방법이 적용된 운동량방정식에 대하여 4단계 시간분할방법을 적용하고, 이산화된 유한요소식을 유도한다. 그리고 피스톤-실린더내의 유동해석을 수행한다.

2.1 지배방정식

비정상, 비압축성 유동에 대한 ALE 방법이 적용된 연속방정식과 운동량방정식은 식(1)-식(2)와 같다.

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \tilde{u}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \quad (2)$$

이 때, $\tilde{u}_k = u_k - u_{kg}$ 는 움직이는 격자에 대한 유체의 상대속도이고, ρ 는 밀도, p 는 압력, μ 는 점성계수이다. ALE 방법은 대류항에 대하여 격자의 이동속도를 고려한 것이다.

피스톤-실린더 문제의 경우 피스톤 표면에 대해서 관찰해 보면, 피스톤 벽면에서 유체의 속도 u_k 는 움직이는 피스톤 벽면의 속도 u_{kg} 와 같으므로, 움직이는 피스톤 벽면에 대한 유체의 상대속도 \tilde{u}_k 는 0이 된다. 즉, 대류에 의한 유동은 발생하지 않는다. 반면, 피스톤 벽면이 움직이지 않는 경우, 피스톤 벽면의 속도 u_{kg} 가 0이므로 고정된 피스톤 벽면에 대한 유체의 상대속도 \tilde{u}_k 는 유체의 속도 u_k 로 표현된다.

2.2 유한요소법을 이용한 수치해석

운동량방정식에 대하여 대류항, 확산항, 압력항, 속도보정 단계로 나누어서 계산하는 4단계 시간분할방법이 사용된다[7].

2.2.1 대류항

운동량방정식에서 대류항만 고려하면 식(3)과 같다.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \tilde{u}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \quad (3)$$

대류항식인 식(3)에 Galerkin 방법을 적용하여 다시 정리하면 식(4)와 같다. 여기서 비선형 대류항에 explicit Lax-Wendroff scheme을 적용하기 위해 2차 미분항까지 고려한 Taylor 급수전개가 이용된다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j u_i^c d\Omega &= \int_{\Omega} N_j u_i^0 d\Omega \\ &- \Delta t \int_{\Omega} N_j \tilde{u}_k^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} d\Omega \\ &- \frac{\Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} N_j \tilde{u}_i^0 \frac{\partial \tilde{u}_k^0}{\partial x_k} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} d\Omega \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \tilde{u}_k^0 \tilde{u}_i^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} d\Omega \right) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma} N_j \tilde{u}_k^0 \tilde{u}_i^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

이 때, N 은 보간함수이고, 속도와 압력에 대하여 1차 선형함수가 사용된다. 첨자 c 는 대류항에서 계산된 값을 나타내고, 첨자 0 는 초기값을 나타낸다.

2.2.2 확산항

운동량방정식에서 확산항만 고려하면 식(5)와 같다.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad (5)$$

확산항식에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j u_i^c d\Omega &= \int_{\Omega} N_j u_i^c d\Omega \\ &- \Delta t \nu \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^c}{\partial x_i} d\Omega \\ &+ \Delta t \nu \int_{\Gamma} N_j \frac{\partial u_j^c}{\partial x_i} n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

이 때, ν 는 동점성계수이고, 첨자 ν 는 확산항에서 계산된 값을 나타낸다.

2.2.3 압력항

운동량방정식에서 압력항만 고려하면 식(7)과 같다.

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (7)$$

식(7)의 양변에 gradient를 취한 후 연속방정식을 적용하면 식(8)과 같다.

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_j^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_j^{\nu}}{\partial x_j} \quad (8)$$

이 때, 첨자 n 은 다음 단계의 값을 나타낸다. 그리고 식(8)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N \frac{\partial p^n}{\partial x_j} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_j} \frac{\partial p^n}{\partial x_j} d\Omega \\ = \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} N \frac{\partial u_j^{\nu}}{\partial x_j} d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

이 때, $\partial p / \partial n = 0$ 이므로 식(9)의 첫 번째항은 0이 된다.

2.2.4 속도보정

식(9)에서 구한 압력 p^n 은 연속방정식을 만족한다. 그러나 확산항에서 구한 속도값 u^{ν} 는 연속방

정식을 만족하지 못하기 때문에 이에 대한 속도보정 과정이 필요하다. 연속방정식을 만족하는 속도는 압력항식인 식(8)을 이용하여 구해진다. 식(8)을 속도 u_j^n 에 대하여 전개하면 식(10)과 같다.

$$u_j^n = u_j^v - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \quad (10)$$

식(10)에서 속도 u_j^n 은 확산항에서 구한 속도 u_j^v 값과 압력항에서 구한 압력 p^n 값을 이용하여 구한다. 식(10)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(11)과 같다.

$$\int_{\Omega} Nu_j^n d\Omega = \int_{\Omega} Nu_j^v d\Omega - \frac{\Delta t}{\rho} \int_{\Omega} N \frac{\partial p^n}{\partial x_j} d\Omega \quad (11)$$

여기서 사용된 요소는 Fig. 1과 같이 8개의 격자점을 갖는 육면체 격자이고, 수치적분은 각각의 요소에 대하여 국소좌표로 좌표변환 시킨 후 Gauss 적분법이 이용된다.

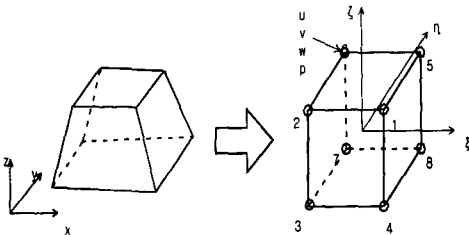


Fig. 1 Coordinate transformation of the each element in local coordinate

한편, 대류항, 확산항, 속도보정 단계에서 해를 구하기 위해서는 질량행렬(mass matrix)에 대하여 역행렬을 구해야 하는 어려운 점이 있다. 보통 유한차분법에서는 대각선 행렬의 형태로 나타나는 반면, 유한요소법에서는 대각선 행렬의 형태로 나

타나지 않는다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 일반적으로 질량행렬은 대각선 행렬의 형태로 바꾸어서 계산된다. 그렇지 않으면, 계산시간 및 컴퓨터 저장공간이 많이 소요될 뿐 아니라 프로그램의 코딩이 복잡하다. 질량행렬을 대각선 행렬의 형태로 만드는 방법은 크게 두 가지가 있다. 첫 번째는 집중질량행렬(lumped mass matrix)로 만드는 방법이고, 두 번째는 대각선화된 질량행렬(diagonalized mass matrix)로 만드는 방법이다. 이 두 가지 방법 중 대각선화된 질량행렬을 사용하여 얻은 해는 집중질량행렬을 이용하여 얻은 해보다 정확도가 높다[7]. 본 유동해석에서는 식(12)를 이용하여 질량행렬을 대각선화된 질량행렬로 변환한 후 해를 구한다.

$$M_{Dij}^e = 0 \text{ if } i \neq j,$$

$$M_{Dii}^e = M_{ii}^e \left(\sum_j M_{ij}^e / \sum_j M_{ii}^e \right) \quad (12)$$

2.3 피스톤-실린더내의 유동해석

본 절에서는 피스톤-실린더내의 유동해석에 대하여 유한체적법을 이용한 결과[2]와 유한요소법을 이용한 결과를 비교한다. 유한체적법을 이용한 결과는 2차원 축대칭좌표계가 이용되었으나, 본 연구의 유한요소법을 이용한 결과는 비 축대칭 문제에 대한 확장성을 고려하여 3차원 직교좌표계가 이용된다. 그리고 이러한 계산 결과를 LDA를 이용한 실험결과[2]와 비교하였다.

2.3.1 격자생성

피스톤과 실린더로 구성된 형상은 Fig. 2와 같다. 이 때 입구 파이프의 직경은 0.019(m), 실린더의 직경은 0.045(m), 입구 파이프의 길이는 0.1(m), 그리고 실린더의 길이는 0.04~0.0643(m)이다. 그리고 피스톤의 속도는 실린더가 팽창하는 방향으로 0.0119(m/s)이다.

Fig. 2의 형상에 대해 3차원 격자를 생성하면 Fig. 3과 같다. 이때 요소의 수는 6,080개이고 격자점의 수는 6,681개이다. 시간에 따른 격자의 움직임은 실린더부분에서 격자의 크기를 변화시키면서 고려된다.

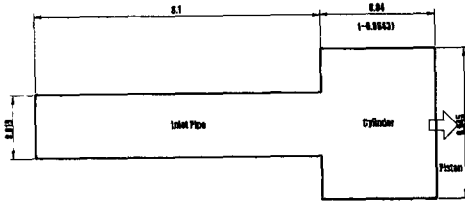


Fig. 2 Piston-cylinder configuration

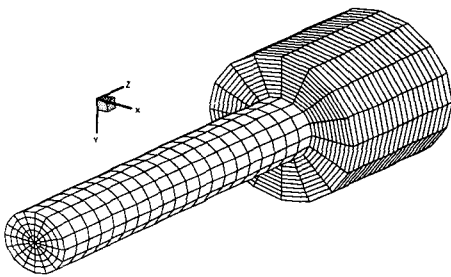


Fig. 3 Mesh shape in piston-cylinder combination

2.3.2 경계조건 및 계산조건

속도에 대한 경계조건은 피스톤을 제외한 벽면에 대해서 $u = v = w = 0$ (m/s)이고, 움직이는 피스톤 벽면에 대해서는 피스톤의 속도인 0.0119 (m/s)이다. 그리고 파이프 입구에서의 속도는 연속방정식을 만족시키기 위해 주어지지 않고, 압력에 대해서만 $p = 0$ (Pa)으로 주어진다. 한편, 초기 값은 전 구간에 대하여 $u = v = w = 0$ (m/s), $p = 0$ (Pa)이다. 계산조건으로 Reynolds 수는 98이고, 시간간격은 0.01초이다.

2.3.3 결과

시간이 0.5초, 1.0초, 1.5초, 2.0초일 때의 속도분포는 Fig. 4와 같다. 피스톤이 z축 방향으로 움직임에 따라 유체는 입구 파이프를 통과하여 실린더

안으로 흡입된다. 그리고 확장된 부근에서 와동이 발생하며, 이러한 와동은 시간이 지남에 따라 z축 방향으로 길게 늘어난다.

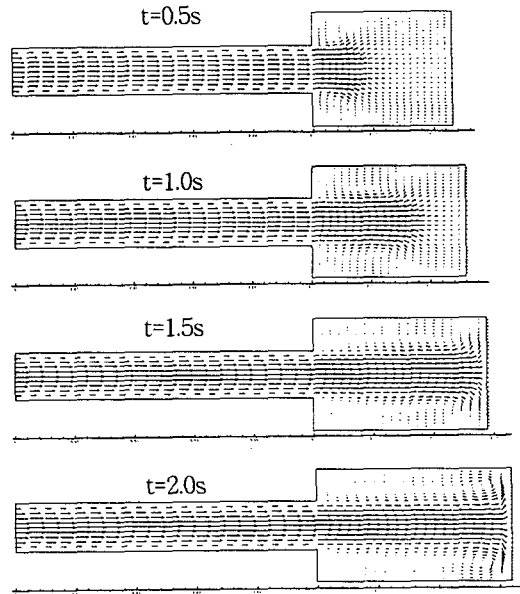


Fig. 4 Velocity vector plots at $t=0.5s, 1.0s, 1.5s, 2.0s$

한편, 2.04초 후의 유선은 각각 Fig. 5, Fig. 6과 같다. Fig. 5는 2차원 유한체적법에 의한 결과[2]이고, Fig. 6은 3차원 유한요소법에 의한 결과이다. 두 결과가 잘 일치하고 있다.

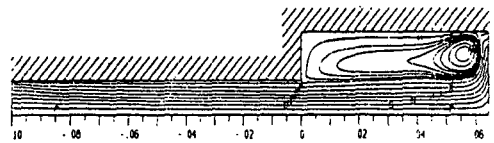


Fig. 5 Streamlines obtained by 2-D FVM

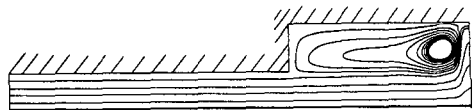


Fig. 6 Streamlines obtained by 3-D FEM

Fig. 7은 2차원 유한체적법에 의한 압력분포 [2]이고, Fig. 8은 3차원 유한요소법에 의한 압력분포이다. 압력분포의 경향도 속도분포와 마찬가지로 잘 일치하고 있다. 그러나 Ströhl의 논문에서 유체의 밀도와 점성계수가 동시에 주어지지 않는 관계로 임의의 밀도값에 대한 상대적인 압력분포값만이 구해진다. 그리고 Fig. 8의 격자수가 Fig. 7의 격자수보다 적은 관계로 Fig. 8의 등압선이 거칠게 나타났다.

피스톤-실린더내의 유동현상을 전반적으로 관찰하여 보면, 초기에는 움직이는 피스톤의 영향으로 피스톤 벽면에서의 압력은 낮게 나타나지만, 시간이 지남에 따라 유입되는 유체의 관성력에 의하여 피스톤벽면의 대칭축 부근에서의 압력은 상대적으로 증가한다. 이 때 소요된 계산시간은 4,050분이고, 사용된 컴퓨터 기종은 Workstation IBM RS/6000 43P-140이다.

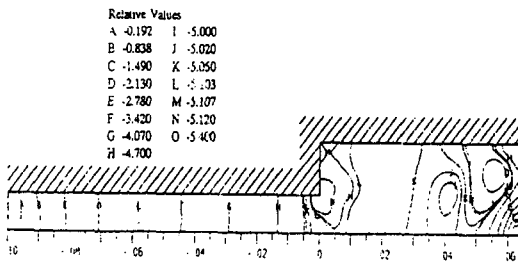


Fig. 7 Pressure distribution by 2D-FVM

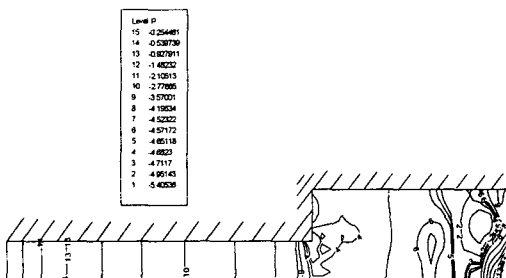


Fig. 8 Pressure distribution by 3D-FEM

앞에서 비교한 수치해석 결과의 검증을 정확히 하기 위하여 유한요소법에 의한 계산결과를 LDA를 이용한 실험결과[2]와 비교한다. Fig. 9는 실험결과와 비교할 z단면의 위치이다. 실린더부분을 크게 세부분으로 나누어서 실험결과와 비교한다. Fig. 10은 z가 0.107086(m)에서의 속도분포이고, Fig. 11은 z가 0.127890 (m)에서의 속도분포이며, Fig. 12는 z가 0.151320(m)에서의 속도분포이다. 세부분의 z단면에서 속도분포가 실험결과와 거의 일치하고 있다.

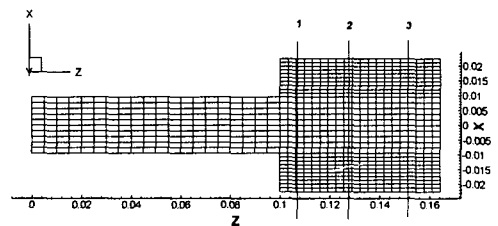


Fig. 9 Positions of the z cross-section

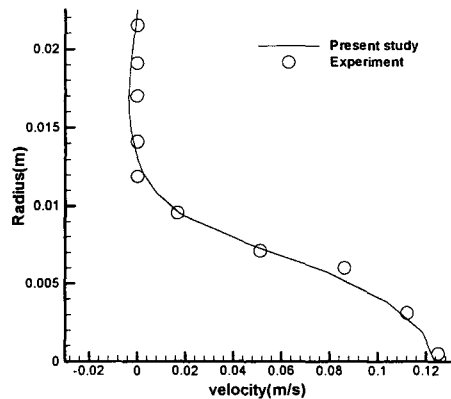


Fig. 10 Predicted and measured w-velocity profiles for z=0.107086(m)

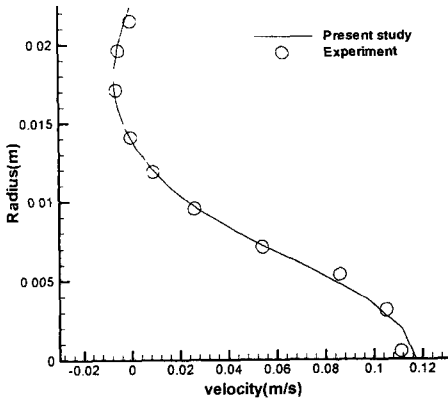


Fig. 11 Predicted and measured w-velocity profiles for $z=0.127890(m)$

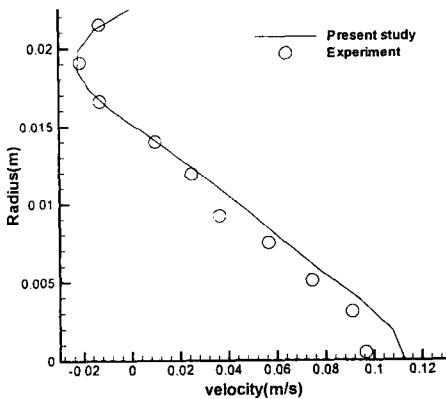


Fig. 12 Predicted and measured w-velocity profiles for $z=0.151320(m)$

3. 결론

피스톤-실린더내의 유동해석에 대하여 유한 요소법 중 계산시간과 컴퓨터 저장공간이 적게 소요되는 4단계 시간분할방법이 이용되었다. 그리고 checkerboard 현상을 막기 위해 비선형 대류항에 대하여 explicit Lax-Wendroff scheme 이 사용되었으며, 움직이는 경계조건에 대해서

는 ALE 방법이 적용되었다. 유한요소법을 이용한 계산결과는 유한체적법에 의한 계산결과 및 LDA에 의한 실험결과와 비교하여 거의 일치하였다.

한편 유한요소법에 의한 유동해석은 복잡한 형상, 여러개로 연결된 영역, 복잡한 경계조건을 갖는 경우에 대하여 쉽게 적용이 가능하지만 아직도 계산시간이 많이 걸린다는 문제점을 갖고 있다. 앞으로 본 연구결과를 기초로 유한요소법의 장점을 최대한 이용한다면 복잡한 형상을 갖는 3차원 문제에 대한 유동해석이 용이하게 이루어 질 것으로 생각된다.

참고문헌

- [1] Pereira, J. C. F., "Experimentelle und numerische Untersuchungen stationärer and instationärer laminarer Strömungen mit Ablösung," Dr.-Ing.-Dissertation, University of Erlangen-Nürnberg, Germany (1986).
- [2] Ströll, H. et al., "Study of Laminar, Unsteady Piston-Cylinder Flows," ASME Journal of Fluids Engineering, Vol.115 (1993), p.687-693.
- [3] Schneider, G. E. et al., "Finite-Element Solution Procedures for Solving the Incompressible, Navier-Stokes Equations using Equal Order Variable Interpolation," Numerical Heat Transfer, Vol.1 (1978), p.433-451.
- [4] Hughes, T. J. R. et al., "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," J. Comput. Phys., Vol.30, No.1 (1979), p.1-60.
- [5] Ramaswamy, B., "Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flow," Comput. Fluids, Vol.16 (1988), p.349-388.
- [6] 최형권, "분리유한요소법을 이용한 Navier-Stokes 방정식의 해법에 대한 연구," 박사 학위논문, 서울 대학교, 서울 (1996).

-
- [7] J. E. Akin, *Finite Elements for Analysis and Design*, Academic Press Limited, (1994).
- [8] Ikegawa, M. et al., "FEM/FDM Composite Scheme for Viscous Incompressible Flow Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.112 (1994), p.149-163.
- [9] Oogane, K. et al., "Numerical Analysis for Lock-In Phenomenon of Vibrating Cylinder in Uniform Flow(Investigation of Analyzing Technique for Moving Boundary Problem)," *JSME, Part B*, Vol.57, No.544 (1991), p.4058-4063.
- [10] Soulaimani, A. and Saad, Y., "An arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Solving Three-Dimensional Free Flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.162 (1998), p.79-106.