

# 기어이의 변동물림강성을 고려한 비틀림진동해석

류재완\*, 한동철\*\*, 최상현\*\*\*

## Torsional Vibration Analysis of a Spur Gear Pair with the Variable Mesh Stiffness

Jae-Wan Ryu\*, Dong-Chul Han\*\* and Sang-Hyun Choi\*\*\*

### ABSTRACT

A four-degree-of-freedom non-linear model with time varying mesh stiffness has been developed for the dynamic analysis of spur gear trains. The model includes a spur gear pair, two shafts, two inertias representing load and prime mover. In the model, developed several factors such as time varying mesh stiffness and damping, separation of teeth, teeth collision, various gear errors and profile modifications have been considered. Two computer programs are developed to calculate stiffness of a gear pair and transmission error and the dynamic analysis of modeled system using time integration method. Dynamic tooth and mesh forces, dynamic factors are calculated. Numerical examples have been given, which shows the time varying mesh stiffness has a significant effect upon the dynamic tooth force and torsional vibrations.

**Key Words** : Mesh stiffness (물림강성), Gear error (기어오차), Transmission error (전달오차), Profile modification (치형수정), Torsional vibration (비틀림진동), Dynamic force (동하중)

### 1. 서론

기어구동계 설계시 동하중과 소음예측이 주된 관심사다. 또한 고속, 고하중 그리고 경량화 설계 요구에 의하여 피로손상해석의 필요성이 증가되었다. 이것은 정확한 동적 기어 힘과 응력에 대한 연구가 필요하다. 따라서 기어 운동현상을 이해하기 위한 수많은 연구가 진행되었다. 그러나 기어 동역학의 다양한 측면이 아직도 만족할 만큼 이해되지는 않았다.

대부분의 기어시스템은 정적해석에 기초해서 설계된다. 그러나 기어가 고속에서 운전될 경우 성

능에 영향을 미치는 여러 가지 요인이 존재한다. 여기에는 축의 비틀림강성, 기어이 작용하중 및 변형, 피치 및 치형오차, 회전속도, 설치오차, 회전체의 동적균형, 기어와 축의 질량과 관성, 원동기와 부하 축의 질량 및 관성 등이 포함된다.

기어동역학 관련 기존의 연구는 Özgüven과 Houser<sup>(1)</sup>에 의하여 광범위한 분야에 걸쳐 조사, 분류되었다. 이에 따른 기어 시스템의 동역학적 모델을 Kahraman<sup>(2)</sup>은 크게 4개의 범주로 분류한다.

첫 번째는 선형적이고 시간에 따른 변화가 없는 모델(Linear Time-Invariant). 두 번째는 선형적이고 시간에 따라 변하는 물림강성을 포함한 해석

\* 대우중공업 중앙연구소

\*\* 서울대학교 기계설계학과

\*\*\* 서울대학교 터보동력기계연구센터

(Linear Time-Variant), 세 번째는 기어 백래시 영향을 포함하되 강성은 시간에 따라 불변인 평균강성을 사용하는 방법, 네 번째는 백래시와 변동물림강성을 동시에 고려하는 모델로 나눌 수 있다

기어쌍으로 구성되는 대부분의 시스템의 고유진동수는 운전 영역에 비하여 높은 값을 가지며 물림강성에 의하여 발생하는 비틀림진동과 다른 진동 모드, 특히 횡진동 사이의 연성(coupling)은 약한 편이다. 따라서 대부분의 문제에 있어서는 단순한 1자유도계의 비틀림진동 문제 또는 원동기와 부하관성, 연결축을 포함한 모델로서 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있다<sup>(3)</sup>.

기어 백래시는 기어 운동에서 한 쪽 치면에서 반대 쪽 치면에 접촉하는 사이에서 작용되는 힘이 0이 되는 순간이 존재하는 구간을 만든다. 따라서 백래시를 포함하고 있는 비선형계는 필수적으로 불연속적이고 미분 불가능한 함수에 속한다. 따라서 지배 미분방정식은 강한 비선형성을 가지므로 선형 시스템에서 사용하는 해석방법을 바로 적용할 수는 없다<sup>(4)</sup>.

본 연구에서는 기어쌍, 기어와 동력원을 연결하는 축, 기어와 부하를 연결하는 축으로 해석모델을 구성한다. 해석모델에서 기어쌍에 대하여 접촉이 진행됨에 따라 주기적으로 변하는 물림강성을 계산할 수 있도록 한다. 또한 물림강성 변동을 계산하는 과정에서 기어 제작시 발생하는 치형오차와 기어진동, 소음특성 향상을 위해 실시하는 치형수정이 포함될 수 있게 하였다. 변동물림강성과 기어쌍의 백래시에 의한 비선형 성분이 포함된 운동방정식을 유도하며 구해진 운동방정식은 컴퓨터를 이용한 직접수치적분 방법으로 해석을 수행하도록 하였다.

축을 포함한 4자유도계 모델 기어열에 대한 해석을 수행하여 치형수정, 축강성 등의 요인이 해석 모델에 미치는 영향을 비교 분석하였다.

## 2. 기어열 모델링

해석모델은 기어쌍, 기어와 동력원을 연결하는 축, 기어와 부하를 연결하는 축으로 모델을 구성한다.

### 2.1 해석모델 구성

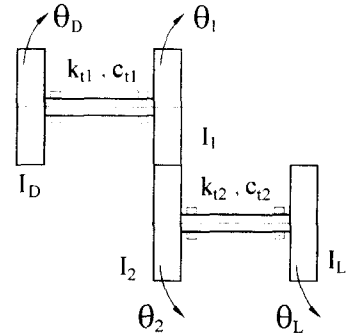


Fig. 1 4-DOF gear train model

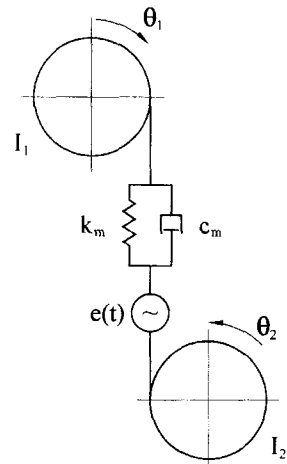


Fig. 2 Interaction between two gears

기어를 포함하고 있는 대부분의 동력 전달계는 Fig. 1 과 Fig. 2와 같이 두 개의 기어로 구성되고 각각의 기어는 부하축과 동력축과 연결된 모델로 표현할 수 있다.

이 시스템의 외부가진원은 회전 불평형질량, 기하학적인 편심, 원동기나 부하토크 변동 등을 포함한다. 회전 불평형질량과 기하학적인 편심요인은 설계나 제작 정밀도를 향상시킴으로 줄일 수 있으나 토크변동은 원동기나 부하의 특성에 의해 결정되기 때문에 제거하기 어렵다. 이것은 대부분 낮은 주파수로 작용하며 주파수는 입력회전수의 몇 배수 정도이다. 경부하가 작용할 때 주로 발생하는 변속기 래틀(rattle) 문제가 대표적인 예이다.

내부 가진원은 기어 제작시 발생하는 치형이나

피치오차 그리고 기어이, 축, 베어링의 탄성변형에 기인한 고주파 성분 가진이 포함된다. 정적인 환경에서 이 모든 값은 정적전달오차로 표현하는 항목에 포함시킬 수 있다.

### 2.2 운동방정식

$$I_D \ddot{\theta}_D + c_t (\dot{\theta}_D - \dot{\theta}_1) + k_t (\theta_D - \theta_1) = T_D \quad (1)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + c_t (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_D) + k_t (\theta_1 - \theta_D) = -W(t)R_1 \quad (2)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + c_t (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_L) + k_t (\theta_2 - \theta_L) = W(t)R_2 \quad (3)$$

$$I_L \ddot{\theta}_L + c_t (\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_2) + k_t (\theta_L - \theta_2) = -T_L \quad (4)$$

$I_D, I_1, I_2, I_L$ 은 각각 원동기, 피니언, 기어 그리고 부하의 질량관성모멘트.  $c_t, k_t$ 는 각각 축의 비틀림감쇠 및 강성.  $\theta_D, \theta_1, \theta_2, \theta_L$ 은 각각 원동기, 피니언, 기어 그리고 부하의 회전변위.  $R_1, R_2$ 는 피니언, 기어의 기초원 지름을 의미한다.

$W(=W(t))$ 는 기어 동적물림힘으로서 동시에 2개의 기어이가 맞물릴 때를 고려하면 다음과 같이 나타낼 수가 있다

$$W = k_m x - k_a e_a - k_b e_b + c_m \dot{x} - c_a \dot{e}_a - c_b \dot{e}_b \quad (5)$$

여기서  $k_m$ 은 변동물림강성,  $c_m$ 는 물림감쇠,  $k_a, k_b$ 는 2쌍의 기어이가 동시 접촉할 때 첫 번째와 두 번째 기어이 쌍의 강성, 마찬가지로  $c_a, c_b$ 는 감쇠를 의미한다.  $e_a, e_b$ 는 각 기어이 쌍의 오차이다.

$x$ 는 동력전달오차로 다음과 같이 정의한다.

$$x = R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2 \quad (6)$$

여기에서는 동력전달오차의 부호를 피동기어의 위치가 이상적인 경우의 위치보다 뒤쪽에 있을 때 양(+)으로 정의한다.

(5)에서 정적인 경우에 대하여 정리하면 (7)식으로 정리된다

$$W_0 = k_m x_s - k_a e_a - k_b e_b \quad (7)$$

여기에서  $W_0$ 는 맞물림 작용 정적힘,  $x_s$ 는 정적 동력전달오차이다.

(5)에서의 마지막 두 항은 다른 값에 비하여 무시할 정도이기 때문에 제거, (7)을 이용하여 정리하면 동적 맞물림힘  $W$ 는 다음과 같다.

$$W = W_0 + k_m (x - x_s) + c_m \dot{x} \quad (8)$$

위의 식들은 기어물림 영역에서 이가 계속해서 접촉하고 있는 경우에 한하여 유효하다(Fig. 3 a). 물림 영역에서 두 기어 사이 접촉이 떨어지는 순간이 있을 경우, 접촉치면의 반대쪽 충돌여부를 검사하여야 한다. 뒷면충돌이 일어나지 않을 경우 동하중  $W$ 는 0이 된다(Fig. 3 b). 뒷면충돌이 일어날 경우는 근사적으로 다음 (9)식으로 계산이 가능하다(Fig. 3 c).

$$W = W_0 + k_m (x - x_s + b) + c_m \dot{x} \quad (9)$$

여기에서  $b$ 는 백래시이다.

(1)~(4), (8) 식은 행렬식으로 정리할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C(t)]\{\dot{X}\} + [K(t)]\{X\} = \{F(t)\} \quad (10)$$

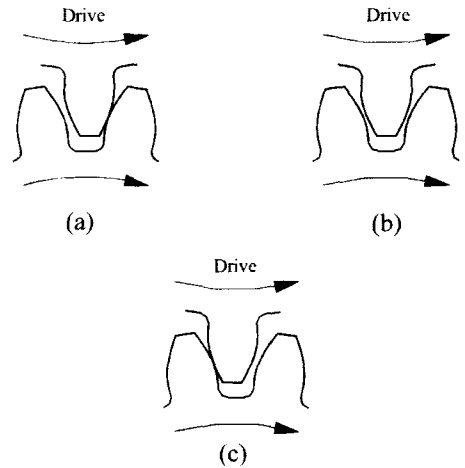


Fig. 3 Tooth contact patterns - a) normal contact, b) tooth separation, c) back side collision

### 2.3 유효감쇠계수

운동방정식에는 축의 비틀림강성과 기어 물림이 변화함에 따라 변하는 물림강성과 함께 축의 비틀림감쇠 및 변동물림감쇠도 포함되어 있다. 감쇠의 경우에는 여러 실험결과에 기초하여 얻은 임계감쇠비를 이용하여 구한다<sup>(3)</sup>.

축의 비틀림감쇠는 다음 식으로 구한다.

$$c_{t_1} = 2\zeta_s (k_{t_1} I_{e_1})^{1/2}, \quad c_{t_2} = 2\zeta_s (k_{t_2} I_{e_2})^{1/2} \quad (11,12)$$

등가관성모멘트  $I_{e_1}, I_{e_2}$ 는

$$I_{e_1} = I_D I_1 / (I_D + I_1) \quad (13)$$

$$I_{e_2} = I_L I_2 / (I_L + I_2) \quad (14)$$

축의 임계감쇠비  $\zeta_s$  는 0.005 정도이다.  
 변동물림감쇠는 다음 근사식으로 구한다.

$$c_m = 2\zeta(k_m m_e)^{1/2} \quad (15)$$

피니언기어와 기어의 관성에 의한 등가질량은

$$m_e = I_1 I_2 / (I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2) \quad (16)$$

기어 물림의 임계감쇠비  $\zeta$  는 일반적으로 0.07 ~ 0.1 정도의 값을 가진다.

### 3. 변동물림강성 및 전달오차

#### 3.1 기어이의 강성계산 방법

두 개의 평기어가 서로 맞물리는 경우 이에 작용하는 하중에 의해 변형이 발생한다. 이 변형량은 기어접촉이 진행됨에 따라 하중위치 및 물리는 기어이의 개수가 지속적으로 변하기 때문에 비선형적으로 변한다. 기어 물림강성은 기어 물림을 작용선 방향으로 비선형 스프링으로 모델링 할 때의 스프링 강성이다.

기어이의 변형량은 Cornell<sup>(5)</sup>의 식을 프로그램화 하기 좋게 변형한 Tavakoli와 Houser<sup>(6)</sup>의 방법을 사용한다. 이 방법은 다음 세 가지를 고려한다.

- (1) 기어이를 외팔보로 보았을 때 굽힘과 전단에 의한 변형
- (2) 이뿌리에서의 강체 운동에 의한 변형
- (3) 헤르쯔 접촉 응력에 의한 곡부 변형

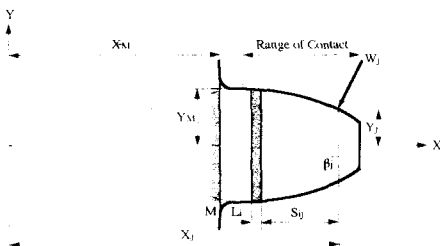


Fig. 4 Gear tooth as a non-uniform cantilever beam

굽힘과 전단에 의한 기어이의 변형량은 기어이를 Fig. 4와 같은 불균일단면 외팔보로 가정 한 후, 접촉 구간을 여러 개의 직사각형 단면 미소요소로 나누어 각각의 미소요소의 변형량을 합하여 구한다. 기어 이뿌리 지지부분의 유연성 때문에 강체가 그 지지 기초에 대하여 회전할 경우 발생하는 변형

량도 Fig. 4에서 구한다.

Fig. 5는 기어이의 변형량을 이용하여 구한 기어이 연성(compliance)이다

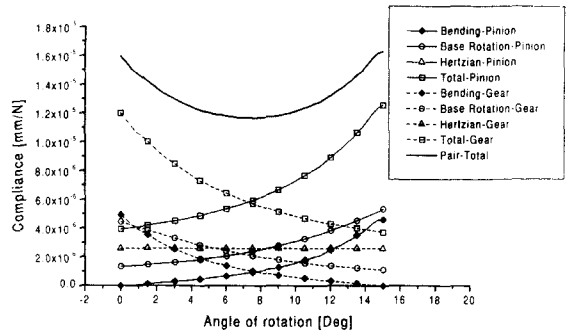


Fig. 5 Compliance of a 44/48 tooth pair

#### 3.2 기어오차와 하중분배 고려한 변동강성 및 동력전달오차

전체 전달하중이 동시에 맞물리는 기어이 각각에 분배되는 비율은 기어쌍의 연성(compliance)과 치형오차, 피치오차등 가공시 발생하는 오차에 의해서 영향을 받는다<sup>(7)</sup>. 따라서 이 맞물림 점에 따라서 변동하는 물림연성은 기어 물림강성뿐 아니라 다양한 정적전달특성을 가진다.

하중이 치폭 전면에 걸쳐 고르게 분포한다 가정 하면, 맞물리는 기어이 사이의 하중분배와 전체 전달오차는 다음 과정을 통하여 구할 수 있다.

기어이가 접촉구간에 걸쳐 동시에 2개의 이 a, b가 맞물리는 경우에 대하여 정적전달 오차를  $E_j$ , 각각의 기어쌍 접촉점에서 부담하는 하중을  $W_j$ 라고 하면,

$$(E_j^a)_j = (E_{a1}^a)_j + (E_{a2}^a)_j + (E_{p1}^a)_j + (E_{p2}^a)_j \quad (17)$$

$$(E_j^b)_j = (E_{a1}^b)_j + (E_{a2}^b)_j + (E_{p1}^b)_j + (E_{p2}^b)_j + (E_{s1}^b)_j + (E_{s2}^b)_j \quad (18)$$

$$W = W_j^a + W_j^b \quad (19)$$

여기에서  $E_a$  는 접촉점에서의 변형에 의한 기어 오차,  $E_s$  는 피치오차,  $E_p$ 는 치형오차 또는 치형수정 값이다. 이때  $E_p$  의 부호는 표면으로부터 재질이 깎여 나간 것을 양(+)으로 한다. 첨자의 1,2는 기어와 피니언을 의미한다.

물림거리 안에서 각각의 정적전달오차는 모두 동일하다. 식 (17),(18)에서

$$Q_j^a W_j^a + (E_p^a)_j = Q_j^b W_j^b + (E_p^b)_j + (E_s^b)_j \quad (20)$$

여기에서,

$$(E_s)_j = (E_{s1})_j + (E_{s2})_j \quad (21)$$

$$(E_p)_j = (E_{p1})_j + (E_{p2})_j \quad (22)$$

$$(E_d)_j = (E_{d1})_j + (E_{d2})_j = Q_j W_j \quad (23)$$

(19)와 (20)식을 동시에 풀면,

$$W_j^a = \frac{(E_p^b)_j + (E_s^b)_j - (E_p^a)_j + Q_j^b W_j^b}{Q_j^a + Q_j^b} \quad (24)$$

$$W_j^b = \frac{(E_p^a)_j - (E_p^b)_j - (E_s^b)_j + Q_j^a W_j^a}{Q_j^a + Q_j^b} \quad (25)$$

따라서 기어오차와 하중분배를 고려했을 때의 기어이의 전체물림강성  $K_{mesh,i}$  는 다음과 같다.

$$K_{mesh,i} = \frac{W_j}{(E_t)_j} \quad (26)$$

치형오차는 모든 이에 대하여 비슷한 형상으로 발생한다. 따라서 이의 인블류트 회전각에 따른 함수의 형태로 나타낼 수 있으며 이 끝이나 이뿌리에 실시하는 치형수정을 포함 할 수 있다. 치형오차와 기준 인블류트 값과의 관계를 Fig. 6에서 확인할 수 있다.

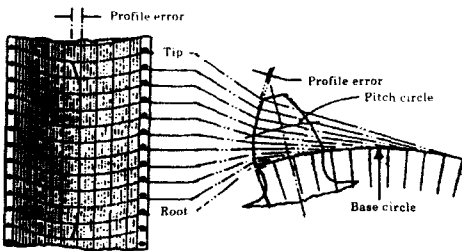


Fig. 6 Relation between the profile error chart and the involute tooth profile

치형수정에는 이끝수정, 이뿌리수정 등이 있으나 여기에서는 이끝수정만을 고려하기로 한다. 이 끝 치형수정이 기어의 변동물림강성과 정적전달오차에 미치는 영향을 (26) 식의 정의에 따라 계산한 결과를 Fig. 7, Fig. 8에 나타내었다. 계산한 기어의 상세 사양은 Table 1.과 같으며 치형 수정량은 이 끝에서 선형적으로 0.2 mm, 3 μm 정도이다.

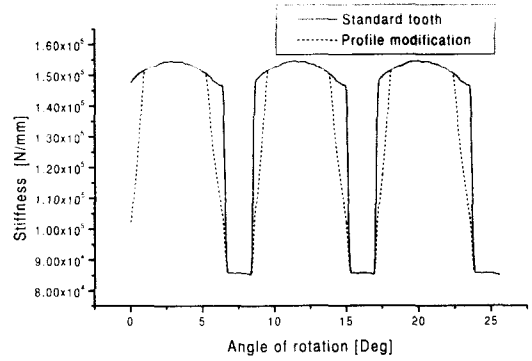


Fig. 7 Mesh stiffness cycle of a 44/88 tooth pair

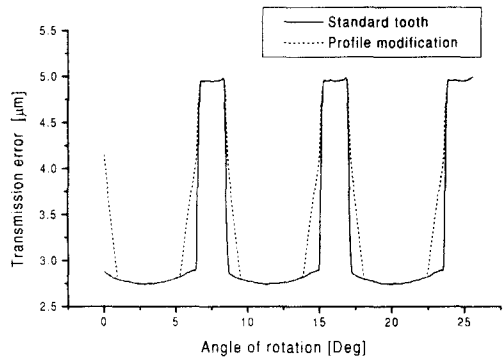


Fig. 8 Transmission error cycle of a 44/88 tooth pair

## 4. 수치해석

### 4.1 수치해석 방법

비선형 시스템 운동방정식의 해를 구하기 위해서는 직접적분 방법을 사용하여야 하며 이것은 운동방정식을 단계적인 수치 값을 이용하여 적분하여 해를 구하는 것이다. 여러 가지 수치해석 알고리즘 중 Newmark 방법을 사용하여 수치적분을 한다<sup>(8)</sup>.

각각의 맞물림 사이클은 Fig. 9와 같이 물림 시작점에서 끝점까지의 길이를 50개의 점으로 나누어 해석한다. 한 사이클당 50개 정도의 점으로 나누면 상당히 훌륭한 정도를 보장한다.

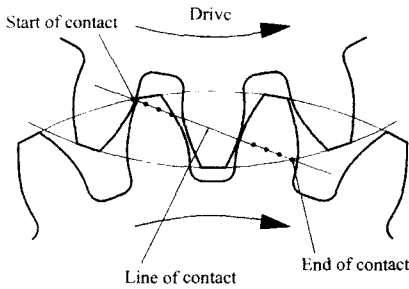


Fig. 9 Resolution of numerical analysis

정상상태에 빠르게 도달하기 위하여 초기 값은 주어진 회전속도에 해당하는 각속도, 정적 하중전달 값에 해당하는 변형량 그리고 이 때의 가속도 값을 사용한다.

각각의 값이 계산되면 동적몰림힘  $W$  가 계산된다. 2장에서 본 바와 같이 음(-)의 몰림힘은 접촉분리나 뒷면충돌이 일어나므로  $W=0$  또는 식(9)를 이용하여 실제 몰림전달하중을 계산한다.

동적몰림힘이 계산되면 동하중계수(dynamic factor)를 구한다. 동하중계수는 물리는 모든 기어에서 발생하여 주위 요소로 전달되는 하중을 나타내는 동하중계수  $DF1$ , 그리고 몰림구간 시작과 끝점사이에서 1쌍의 기어이에 작용하는 하중변화와 이부리 작용 힘을 관찰하기 위한 동하중계수  $DF2$  두 가지 방법으로 정의할 수 있다.

$$DF1 = \frac{W_j}{W_0} \quad (27)$$

$$DF2 = \frac{W_j^a}{W_0} \quad (28)$$

### 4.2 해석적용 모델

해석에 사용한 기어열 사양은 Table 1과 같다. 모타토크 및 부하토크, 모타와 부하의 회전 관성, 연결축의 비틀림강성 값은 다음과 같으며 해석의 편리성을 위하여 입력과 출력 토크는 변동 없이 일정한 것으로 가정한다.

해석모델에 사용된 기어쌍의 몰림강성 및 동력 전달오차는 3.2절에 게재한 Fig. 7, Fig. 8과 같다. 동적해석은 치형수정을 하지 않은 기어와 실시한 기어에 대하여 해석하고 비교하였다

Table 1 Specification of analysis model

Gear pair	
Tooth profile	involute
Number of teeth	44/88
Module	1.5
Pressure angle	20 °
Face width	7 mm
Backlash	0.1 mm
Center distance	99 mm
Contact ratio	1.785
Damping ratio	0.10
Outside diameter	69/135 mm
Base circle diameter	62.02/124.04 mm
Root circle diameter	62.25/128.25 mm
Tooth thickness	2.356 mm
Pinion inertia $I_1$	$2.1227 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Gear inertia $I_2$	$3.6775 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$
Motor inertia $I_D$	$1.3606 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$
Load inertia $I_L$	$1.4207 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$
Torsional stiffness $K_{t1}$	$1.4481 \times 10^8 \text{ Nm/rad}$
Torsional stiffness $K_{t2}$	$2.8962 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$
Transmitted torque $T_D$	14 Nm

### 4.3 고유진동수

고유진동수는 고유치 분석에 의하여 구할 수 있다. 감쇠가 있는 시스템에서 고유치 문제를 풀기 위해서는 운동방정식을 두 배의 자유도를 가진 일차 미분 방정식의 형태로 나타내서 해석한다. 본 연구에서는 변동몰림강성을 1 사이클에 대한 평균값으로 환산하여 고유진동수를 구하여 검토한다. 1 사이클에 대한 몰림강성의 평균값 계산결과는  $134 \times 10^3 \text{ N/mm}$  이다. 이 때의 평균몰림감쇠 값은  $3173 \text{ s.N/m}$  이다. 이 값을 이용하여 계산한 고유치 값은 Table 2에 정리하였다.

Table 2 Natural frequency

고유진동수 (Hz)	
1st Order	556
2nd Order	1352
3rd Order	2360

본 연구는 모타나 부하로부터의 외부 가진성분을 제외하고 내부 가진요인만 고려한다. 내부 가진요인은 입력축과 출력축 회전속도 및 회전속도의

배수 값, 그리고 주요 내부 가진원으로 작용하는 시간에 따라 변동하는 불림강성이다. 따라서 불림강성 변화로 인한 가진 주파수와 회전속도와의 관계를 파악하여야 한다. Fig. 10은 이 시스템에 해당하는 캠벨선도(Campbell Diagram)이다.

해석 대상 시스템의 실제 운전영역이 0 ~ 3500 rpm 정도이므로 Fig. 10의 캠벨선도에서 보면, 기어나 피니언 회전속도의 1,2배수 성분은 크게 영향을 미치지 못한다. 다만 피니언과 기어의 변동불림강성 주파수만이 주로 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. 약 759, 1844, 3218 rpm 정도에서 공진이 발생할 수 있는 영역이라는 것을 예측 할 수 있다.

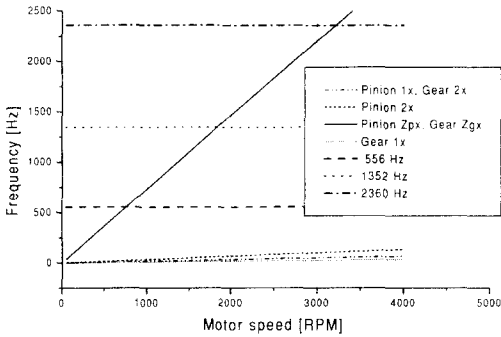


Fig. 10 Campbell diagram

#### 4.4 치형수정이 동하중에 미치는 영향

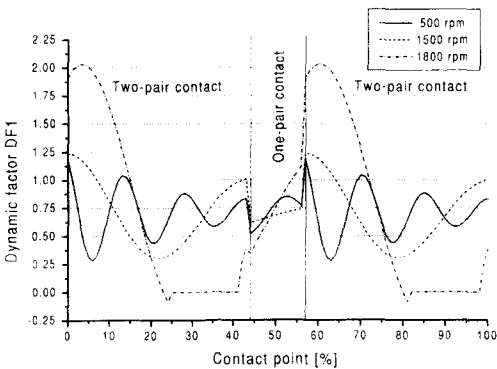


Fig. 11 Change of dynamic factor  $DF1$  during one mesh cycle

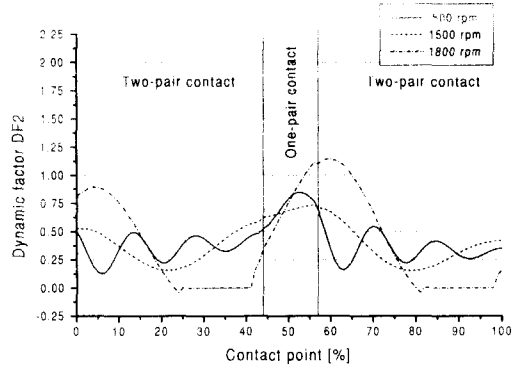


Fig. 12 Change of dynamic factor  $DF2$  during one mesh cycle

기어 이에 작용하는 하중을 불림 시작점과 끝점 사이의 구간에서 변하는 양상을 검토한다.

Fig. 11은 불림 시작점과 끝점 사이의 길이를 100%로 하였을 때의 속도 변화에 따른 동하중 변동  $DF1$ 을 Fig. 12는  $DF2$ 를 계산한 것이다.

그림에서 보듯이 공진점 이외의 회전수 500 rpm, 1500 rpm에서의 동하중 변동 진폭이 크지 않은 반면에 공진점 주위 1800 rpm에서 동하중 변동 진폭은 크게 증가하며 동하중 계수가 0이 되는 치 접촉 분리, 뒷면 충돌이 발생하는 것을 의미하는 음(-)의 동하중 계수 값을 관찰 할 수 있다.

전체 이 불림구간에서 최대 동하중( $DF1$ )이 작용하는 위치는 기어이 한 쌍만 접촉하고 있는 구간에서 두 쌍 접촉으로 넘어간 직후에 발생한다. 이 순간의 접촉형태는 이 끝과 이뿌리가 접촉하는 순간이다. 따라서 기어불림에서 최대 동하중이 작용하는 순간은 이 끝 부분의 접촉에서 발생한다.

Fig. 12의 동하중 계수  $DF2$ 를 보면 변동불림강성의 가진요인과 크게 관련이 없는 낮은 회전수(500, 1500 rpm) 부분의 동하중은 강성변화에 따라 변화하는 정하중 변동 형태와 유사하며 최대 동하중( $DF2$ )은 1쌍 접촉에서 일어난다. 속도가 증가하여 시스템 공진점 주위(1800 rpm)에서 최대 동하중 계수는 두 쌍 접촉구간으로 이동하는 것을 알 수 있다.

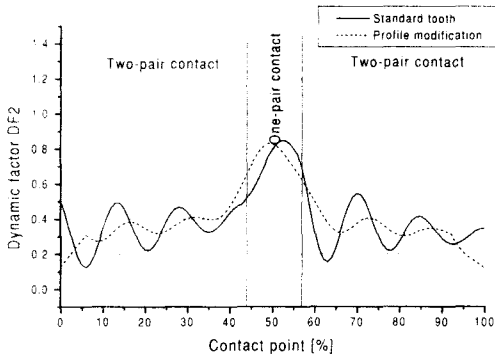


Fig. 13 Dynamic factor  $DF_2$  variation by profile modification : 500 rpm

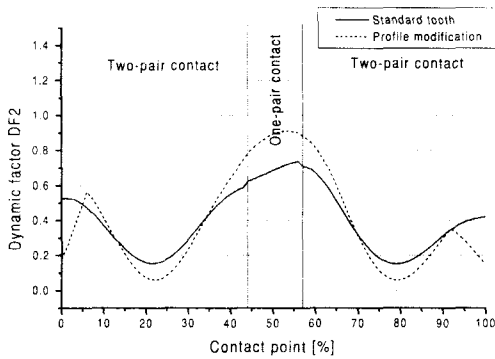


Fig. 14 Dynamic factor  $DF_2$  variation by profile modification : 1500 rpm

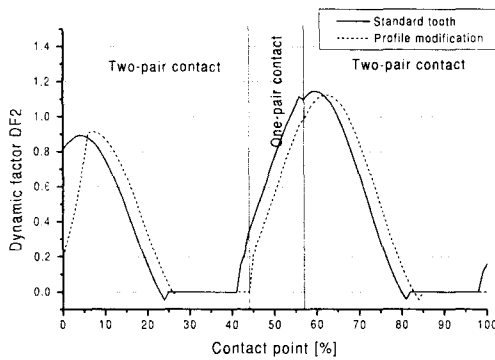


Fig. 15 Dynamic factor  $DF_2$  variation by profile modification : 1800 rpm

Fig. 13, Fig 14, Fig. 15는 선형적으로 치형 수정 하였을 때 동하중 ( $DF_2$ )에 대한 영향을 기어이 맞물림 시작점과 끝점의 길이 100%에 대하여 조사한 것이다.

Fig. 13의 속도에서는 치형수정이 동하중 값과 진폭을 낮추는데 긍정적인 역할을 하는 것으로 나타났다으나 Fig. 14의 속도에서는 오히려 동하중이 증가하며 Fig. 15에서는 효과가 거의 없다.

이것으로부터 치형수정을 실시하였을 때 긍정적으로 영향을 미치는 속도범위가 작은 것을 알 수 있다.

따라서 주 운전속도 범위에 적합한 치형 수정량은 동하중 분석과 연계하여 결정하여야 한다.

#### 4.5. 정상상태 진동

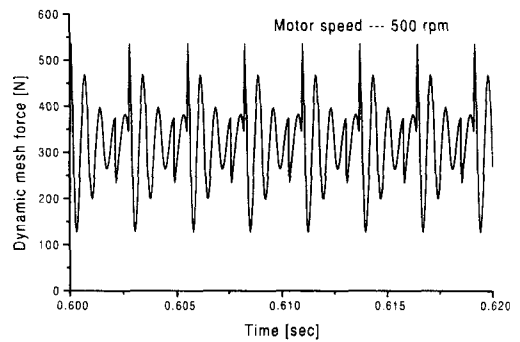


Fig. 16 Steady state mesh force : 500 rpm

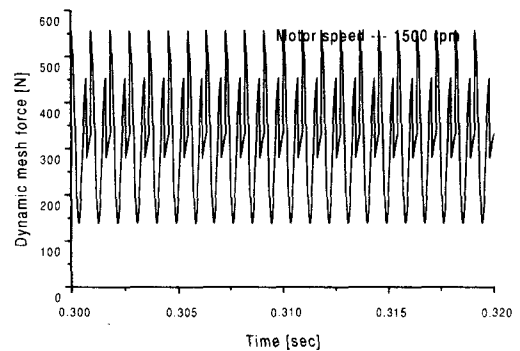


Fig. 17 Steady state mesh force : 1500 rpm



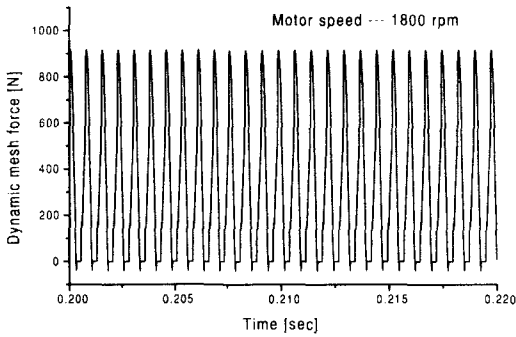


Fig. 18 Steady state mesh force : 1800 rpm

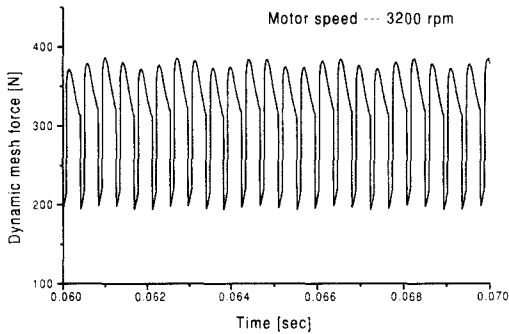


Fig. 19 Steady state mesh force : 3200 rpm

앞에서 예측한 회전수와 몇 가지 회전수에 대하여 정상상태의 동적물림하중 변동을 나타낸 것이 Fig. 16, Fig. 17, Fig. 18 그리고 Fig. 19이다.

변동물림강성 가진 주파수 주변의 1800 rpm은 맞물림힘이 0이 되는 부분과 음(-)의 값이 되는 경우가 발생하는 것으로 보아 기어쌍의 접촉이 분리와 뒷면 충돌이 발생함을 알 수 있다. 그러나 3200 rpm에서는 크게 영향을 미치지 못하는 것을 알 수 있다.

#### 4.6 최대 동하중계수 및 축 강성의 영향

축 강성변화가 시스템의 진동특성에 미치는 영향을 파악하기 위하여 Table 3에 표시한 것과 같이 위 해석모델에 비하여 축의 비틀림강성이 2배에 해당하는 시스템에 대하여 동적해석을 실시하여 그 결과를 비교한다.

Table 3 Torsional stiffness values of two shafts

	$K_{t1}$	$K_{t2}$
	N · m/rad	N · m/rad
A system	$1.4481 \times 10^4$	$4.5817 \times 10^4$
B System	$2.8962 \times 10^4$	$9.1634 \times 10^4$

동일한 기어쌍을 사용하였을 때 B 시스템의 축 비틀림강성을 이용하여 고유치를 구한 결과는 Table 4에 정리하였다.

Table 4 Natural frequency of systems of A and B

	고유진동수 (Hz)	
	A System	B System
1st Order	556	769
2nd Order	1352	1385
3rd Order	2360	3334

따라서 B 시스템에서 고유치에 해당하는 회전 속도는 약 1049 rpm, 1889 rpm, 4546 rpm 이다.

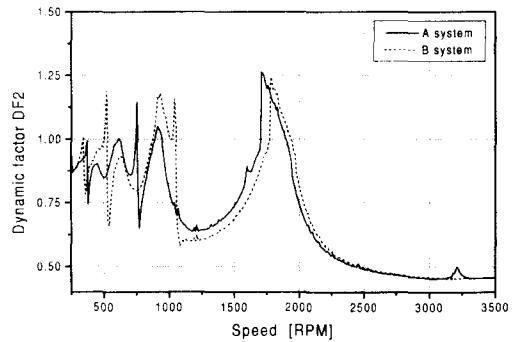


Fig. 20 Dynamic factor  $DF_2$  variation by shaft stiffness change

Fig. 20은 회전속도에 따른 정상상태 영역에서의 최대 동하중( $DF_2$ )을 계산하여 A, B 시스템에 대하여 비교한 것이다.

계산결과 A 시스템은 약 610 rpm, 750 rpm, 910 rpm, 1710 rpm에서의 동하중계수가 큰 것을 볼 수 있다. 고유치(759 rpm, 1844 rpm) 부근의 회전속도에서 최대 1.27 정도의 큰 동하중이 작용하며 고유

치 이외는 아조화 공진값 근처에서 큰 동하중이 작용한다.

B 시스템에서는 약 520 rpm, 630 rpm, 930 rpm, 1810 rpm에서의 동하중 값이 극대 값을 가지는 것을 알 수 있다.

원래의 시스템 A와 축의 비틀림강성을 2배로 증가시킨 B 시스템을 비교하면 B 시스템이 약 6% 정도의 높은 회전속도에서 동하중 극대 값을 가진다. 이것은 축의 강성 변화에 따른 고유 변화에 의한 결과 일 뿐이다. 따라서 축의 비틀림강성을 2배 정도로 변화시킨 정도에 비하여 그 영향은 크지 않으며 최대 동하중계수 차이는 A 시스템과 약 5% 정도로 작게 차이 난다.

이것으로부터 축의 비틀림강성이 시스템의 운동에 미치는 영향은 기어의 물림강성변화에 비하여 작다고 볼 수 있다.

### 5. 결론

두 개의 기어로 구성되고 각각의 기어는 부하축과 동력축으로 연결 되어있는 기어 시스템에 대하여 물림강성 변화를 고려하여 비틀림 진동해석을 수행하였다. 변동물림강성은 기어오차와 치형수정에 의한 영향이 반영되도록 정식화하였다.

변동물림 강성을 반영, 수치적분 알고리즘을 이용하여 프로그램을 작성, 4자유도계의 연구 모델과 같은 형식의 기어열 해석에 적용하였고 치형수정, 축강성변화 등의 몇 가지 인자 변화가 시스템의 진동특성에 미치는 영향을 조사하였다. 이상의 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 동하중 계수  $DFI$ 은 정적하중분포와는 달리 한 쌍의 이 접촉이 끝나 두 쌍의 기어이가 접촉하는 순간 즉, 이 끝과 이뿌리 부분이 접촉하기 시작하는 순간에서 최대 값을 가진다.
- (2) 치형수정을 실시하면 일정한 속도범위에서는 진동특성이 좋아지나 그 외의 속도범위에서는 효과가 없거나 악영향을 미친다. 따라서 치형 수정량 결정에 있어서 속도에 따른 동하중분석을 병행하여야 한다.
- (3) 축의 강성변화가 시스템의 진동특성에 미치는 영향은 기어의 강성변화가 미치는 영향에 비하여 사소하다.
- (4) 동하중은 운전 속도가 공진점에 근처에 다가갈 때 치면분리에 의한 반복적 진동으로 급격히 증가

하고 공진점 이후에서는 서서히 감소한다.

- (5) 동하중계수 분석결과 고유치 해석을 통해 얻은 시스템의 고유진동수와 변동물림강성의 가진주파수가 일치되는 부근에서 가장 높은 경향을 보인다.
- (6) 특별한 외부 가진요인이 없을 때 회전축의 회전 속도 자체에 의한 가진은 시스템의 운동특성에 큰 영향이 없으며 변동물림강성에 의한 가진이 가장 큰 영향을 미친다.

### 참고문헌

1. Özgüven, H. N. and Houser, D. R., "Mathematical Models Used in Gear Dynamics - a Review," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 3, pp. 383-411, 1988.
2. Kahraman, A. and Singh, R., "Interactions Between Time-Varying Mesh Stiffness and Clearance Non-Linearities in a Geared System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146. No. 1, pp. 135-156, 1991.
3. Özgüven, H. N., "A Non-Linear Mathematical Model for Dynamic Analysis of Spur Gears Including Shaft and Bearing Dynamics," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, No. 2, pp. 239-260, 1991.
4. Comparin, R. J. and Singh, R., "Non-Linear Frequency Response Characteristics of an Impact Pair," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 134, No. 2, pp. 259-290, 1989.
5. Cornell, R. W., "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth," *ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, pp. 447-459, 1981.
6. Tavakoli, M. S., and Houser, D.R., "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears," *ASME, Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 86-95, 1986.
7. Lee, C., Lin, H. H., Oswald, F. B. and Townsend, D. P., "Influence of Linear Profile Modification and Loading Conditions on the Dynamic Tooth Load and Stress of High-Contact-Ratio Spur Gears," *ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 113, pp. 473-480, 1991.
8. Bathe, K. J., "Finite Element Procedures," Prentice Hall, pp. 780-784, 1996.