한국정밀공학회지 제16권 제7호 (1999년 7월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 16, No. 7, July 1999.

# 구조동특성해석을 위한 ARMAX 모형의 식별과 선형추정 알고리즘

최의중*, 이상조**

# Identification of ARMAX Model and Linear Estimation Algorithm for Structural Dynamic Characteristics Analysis

Eui Jung Choe*, Sang Jo Lee**

**ABSTRACT**

In order to identify a transfer function model with noise, penalty function method has been widely used. In this method, estimation process for possible model parameters from low to higher order proceeds the model identification process. In this study, based on linear estimation method, a new approach unifying the estimation and the identification of ARMAX model is proposed. For the parameter estimation of a transfer function model with noise, linear estimation method by noise separation is suggested instead of nonlinear estimation method. The feasibility of the proposed model identification and estimation method is verified through simulations, namely by applying the method to time series model. In the case of time series models with noise, the proposed method successfully identifies the transfer function model with noise without going through model parameter identification process in advance. A new algorithm effectively achieving model identification and parameter estimation in unified frame has been proposed. This approach is different from the conventional method used for identification of ARMAX model which needs separate parameter estimation and model identification processes. The consistency and the accuracy of the proposed method has been verified through simulations.

**Key Words** : time series model(시계열모형), ARMAX, linear estimation method(선형추정법), model identification(모형식별), parameter estimation(모수추정), noise separation method(잡음분리법)

## 1. 서론

시계열해석법은 기계· 전자 등 공학 분야와 경제학, 통계학 등 다양한 분야에서 응용되고 있다. 공학 분야에서는 계에서 측정된 입출력 데이터로부터 실제 동적 계를 수학적으로 근사 모형화하는 system identification과 각종 필터 설계에 많이 이용되고 있다. 특히, 기계공학 분야에서는 구조물의 동적인 특성을 시간 영역에서 해석할 때 또 기계 계에서 발생되거나 측정 가능 한 여러 가지

* 국방과학연구소
** 연세대학교 기계 · 전자공학부

신호로부터 물리적으로 의미 있는 현상을 해석하는데 이용되고 있다. 시계열 모형화 과정은 식별과 추정으로 구분할 수 있다. 입력신호와 출력신호를 이용하여 해석하는 경우 일반적으로 잡음의 동적 성분까지 모델링 하는 ARMAX(Autoregressive Moving Average eXogenous)모형을 이용한다. 그렇지만 ARMA모형화 과정에서의 여러 가지 문제점들은 여전히 존재한다. ARMA과정의 파라미터를 추정하는 가장 직접적이고 잘 알려진 방법은 최우추정법이다[1,2]. 최우추정법이 이론적, 계산적 관점에서 추정결과의 일치성(consistency), 유효성(efficiency)에도 불구하고 비선형 알고리즘에 따른 여러 문제점들을 내포하고 있다. 많은 계산양을 요구하며, 초기 값에 따른 추정 값의 민감성, 모형특성에 따른 알고리즘상의 불안전성, 그리고 우도함수가 국부적으로 최대 값을 가질 수 있고 그 값들 중의 하나로 수렴함에 따라 완전히 다른 값으로 추정될 가능성도 있다[3,4,5]. 이러한 계산상의 문제점을 극복하고 계산과정을 단순화하기 위하여 선형추정방법을 이용하여 비선형알고리즘에 비해 계산상 편리하게 적용할 수 있고 정확한 값을 추정할 수 있는 방법에 대한 연구가 진행되었다. 초기의 선형추정법은 2단계 최소자승법으로 불리는 추정법이 Durbin[6]에 의해 처음으로 제안되었다. 그후 instrumental variable 방법이 Mayne[7], Wong과 Polak[8]에 의해 소개되었다. 또 다른 2단계 최소제곱법을 Kashyap과 Nasburg[9], Pandya, Pagurek, Söderström이 Durbin 이후 제시하였다. Durbin의 비유효성 문제를 극복하고자 Mayne과 Firoozan, Hannan과 Rissanen, Koreisha와 Pukkila 등이 점근적으로 유효한 추정 값을 얻기 위하여 3번째 단계를 추가할 것을 제안하였다[10~17]. 그 외에도 Spliid[18], Sabiti[19] 등에 의해 제시된 방법들이 있다. 또한 Fassois와 Lee등은 4단계로 이루어진 선형추정법으로 SML(suboptimun maximum likelihood)방법을 제시하였다[20,21,22,23]. 또한 주어진 시계열데이터에 적합한 모형의 식별은 객관적이어야 하고 일치성이 있어야 한다. 식별법으로는 Box-Jenkins의 상관함수를 이용하는 방법[1], 벌칙함수( FPE, AIC, BIC 등과 F-test)를 이용하는 방법[24,25], 형태인식을 이용하는 방법으로 Gray, Kelly, McIntire의 R배열과 S배열[26], Tuker의 RS배열[27], Woodward, Gray의 GPAC (generalized partial autocorrelation)방법[28], Beguin, Gourierux, Monfort의 모퉁이 방법(Corner method)[29], 최병선의 3배열방법[24,30] 등이 있다. 형태인식법은 모형에 대한 파라미터추정과정 없이 모형을 식별할 수 있으며, 또한 모든 정보를 하나의 값에 의존해야 하는 벌칙함수법에 비해 더 효율적이라 하겠다. 지금까지 동특성해석을 위한 시계열모형의 식별을 위해서는 저차 모형부터 가능성 있는 고차 모형까지 먼저 선형· 비선형 추정법으로 모형의 파라미터를 추정하여 추정된 모형을 대상으로 벌칙함수를 이용한 식별과정을 거쳐 최적의 모형을 선정하였다. 이에 비해 각각의 모형에 대한 추정과정 없이 식별이 이루어진다면, 혹은 식별과 추정이 동시에 이루어질 수 있다면 벌칙함수에 의한 방법보다 모형화 하는데 더 효율적이다. 잡음을 고려한 전달함수형태의 시계열모형에 대하여 선형추정법을 이용하여 모형식별을 위한 각각의 모형에 대한 파라미터 추정과정 없이 모형의 식별과 파라미터 추정과정이 결합된 형태의 식별과 추정 알고리즘을 제시하고, 시뮬레이션으로 제안한 방법의 식별성과 추정성을 검증한다.

## 2. 잡음분리에 의한 시계열모형 식별과 추정

기계구조물의 동특성을 시간영역에서 입출력신호를 이용하여 모형화 할 때 신호에 잡음항이 포함되어 있지 않다면 출력시계열데이터를 출력시계열데이터의 과거항과 입력시계열데이터의 과거항과 오차항으로 표현되는 ARX모형으로 모형화 한다. 그러나 입출력 신호에 잡음항이 포함되는 경우 일반적으로 저차의 ARX모형도 고차 모형화 되는 경향으로 모형의 차수를 줄이고 잡음항을 고려한 모형화 방법으로 ARMAX모형으로 모형화 한다. 기계계에서 측정되는 신호에는 다양한 잡음원이 존재한다. 구조 동특성 해석에서 잡음항으로 고려할 수 있는 것으로는 구조계를 유한차원화함으로써 발생되는 잉여자유도계에 의한 영향과, 비선형계를 근사선형계로 모형화 함으로 발생되는 오차, 전기적 신호에 의한 잡음항과 외부에서 가해진 미지의 입력에 의한 영향 등으로 구분할 수 있다. ARMAX모형은 잡음성분을 포함해서 모델링 하는 방법인데 여기서 잡음항을 먼저 분리한다면 즉 입력항과 잡음항이 서로 독립이라는 가정을 이용하

여 먼저 ARMAX모형에서 잡음을 분리하여 형태인 식법으로 ARX모형을 식별하면 저차에서 고차모형까지 각각의 모형에 대한 추정과정을 줄이고 또한 파리미터도 선형 추정법으로 추정이 가능 할 것이다. 따라서 본 연구에서는 모형식별을 위한 불필요한 모형추정과정 없이 효율적으로 모형화 하는 방법으로 선형추정법을 이용하여 모형의 식별과 추정이 별개의 과정이 아닌 결합된 형태의 체계적인 모형화 방법을 제안한다.

입력시계열과 잡음시계열이 서로 독립이라는 가정으로부터 잡음분리에 의한 모형화 과정은 다음과 같다.

ARMAX(p,r,q,b) 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi(B)y_t = \Psi(B)x_t + \Theta(B)a_t \tag{2.1}$$

여기서

$$\Phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \cdots + \phi_p B^p$$

$$\Psi(B) = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots + \psi_r B^r) B^b$$

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

$y_t$는 출력시계열데이터, $x_t$는 입력시계열데이터, $a_t$는 잔차항이다. 잔차항 $a_t$는 평균이 0이고 분산이 $\sigma_a^2$이며, $x_t$와 $a_t$는 서로 독립으로 가정한다. B는 후진연산자(backshift operator)이고, 지연모수 b는 입력시계열 데이터가 출력시계열데이터에 영향을 미치는데 걸리는 시차를 나타낸다. ARMAX모형은 안정적(stable)이고 작인적(causal)이며 역변환성(invertability) 조건을 만족하고, $\Phi(B)=0$, $\Theta(B)=0$와 $\Psi(B)=0$에는 공통근이 존재하지 않는 것으로 가정한다. 이 모형을 무한차수의 ARX모형으로 나타내면 다음 식과 같다.

$$H_y(B)y_t = H_x(B)x_t + a_t \tag{2.2}$$

여기서

$$H_y(B) = \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} = 1 + h_{y1}B + h_{y2}B^2 + \cdots$$

$$H_x(B) = \frac{\Psi(B)}{\Theta(B)} = h_{x0} + h_{x1}B + h_{x2}B^2 + \cdots$$

무한차수의 ARX모형을 종속변수를 $y_t$로 하고 $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots$를 설명변수로 하는 유한차수의 선형회귀모형의 파라미터 $\hat{h}_{yi}$, $\hat{h}_{xi}$ 를 최소자승법으로 계산한다. ARX모형의 차수는 입출력을 같은 차수로 하여 벌칙함수 식별법인 AIC, BIC 등을 이용하여 결정한다. 특히 이 모형의 차수 결정과정에서 Whittle 알고리즘[31]을 이용하여 계산량을 줄일 수 있다. 추정된 ARX모형으로부터 추정오차 $\widehat{a_t}$은 다음과 같다.

$$\widehat{a_t} = \sum_{i=0}^{L} \hat{h}_{yi} y_{t-i} - \sum_{j=0}^{L} \hat{h}_{xj} x_{t-j} \tag{2.3}$$

식(2.2)에서 무한차수의 $H_y(B)$와 $H_x(B)$의 유한차수 추정식을 $\widehat{H_y}(B)$와 $\widehat{H_x}(B)$로 정의하고 식(2.3)의 양변을 $\hat{H}_y(B)$로 나누면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$y_t = \frac{\hat{H}_x(B)}{\hat{H}_y(B)} x_t + \frac{1}{\hat{H}_y(B)} \widehat{a_t} \tag{2.4}$$

식(2.4)의 우변 두 번째 식을 다음과 같이 정의하고

$$\widehat{n_t} = \frac{\widehat{a_t}}{\hat{H}_y(B)} \tag{2.5}$$

식(2.5)를 이용하여 식(2.4)를 정리하면 다음과 같다.

$$y_t = \frac{\hat{H}_x(B)}{\hat{H}_y(B)} x_t + \widehat{n_t} \tag{2.6}$$

식(2.2)와 식(2.6)의 관계식으로부터 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\hat{H}_x(B)}{\hat{H}_y(B)} = \frac{\Psi(B)}{\Phi(B)} \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{\widehat{H}_y(B)} = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \tag{2.8}$$

$$y_t - \widehat{n}_t = \frac{\Psi(B)}{\Phi(B)} x_t \tag{2.9}$$

잡음이 분리된 입출력신호를 식(2.9)에서 ARX모형화 하기 위하여 충격반응함수를 이용하여 형태인식법으로 모형을 식별한다[32,33,34,35]. 식(2.9)로부터 초기 $\widehat{\phi}_i$, $\widehat{\psi}_i$ 추정치는 선형회귀모형으로부터 $\{y_t - \widehat{n}_t\}$와 $\{x_t\}$를 이용하여 최소자승법으로 계산된다.

$$y_t - \widehat{n}_t = \frac{\widehat{\Psi}(B)}{\widehat{\Phi}(B)} x_t + e_t \tag{2.10}$$

여기서 $\{e_t\}$는 초기 추정값 $\widehat{\phi}_i$, $\widehat{\psi}_i$ 에 의한 추정오차항이다. 식(2.5)와 식(2.8)의 관계로부터 다음과 같다.

$$\widehat{n}_t = \frac{\widehat{\Theta}(B)}{\widehat{\Phi}(B)} \widehat{a}_t \tag{2.11}$$

$$\widehat{\Phi}(B)\,\widehat{n}_t = \widehat{\Theta}(B)\,\widehat{a}_t \tag{2.12}$$

식(2.12)의 좌변항과 우변의 $\widehat{a}_t$는 기지의 값이므로 선형회귀모형으로 하여 $\widehat{\theta}_i$의 초기 값을 계산한다. 여기서 MA항은 결정해야 하는 차수가 하나이므로 벌칙함수법을 이용하여 식별한다.

식(2.12)로 부터 추정된 $\widehat{\theta}_i$을 이용하여 개선된 $\widetilde{\phi}_i$, $\widetilde{\psi}_i$ 를 다음과 같은 관계식으로 추정한다. 식(2.1)로 부터 다음과 같이 정리된다.

$$\Phi(B)\frac{y_t}{\Theta(B)} = \Psi(B)\frac{x_t}{\Theta(B)} + a_t \tag{2.13}$$

$$y_t^f = \frac{y_t}{\widehat{\Theta}(B)} \tag{2.14}$$

$$x_t^f = \frac{x_t}{\widehat{\Theta}(B)} \tag{2.15}$$

$$\widetilde{\Phi}(B)\, y_t^f = \widetilde{\Psi}(B)\, x_t^f + \widetilde{a}_t \tag{2.16}$$

식(2.16)은 $\sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{p} \widetilde{\phi}_i y_{t-i}^f - \sum_{j=1}^{r} \widetilde{\psi}_j x_{t-j}^f\right)^2$을 최소화시키는 $\widetilde{\phi}_i$, $\widetilde{\psi}_j$ 값을 선형최소자승법으로 계산한다. 개선된 파라미터 $\widetilde{\phi}_i$, $\widetilde{\psi}_j$를 이용하여 식(2.12)로 부터 다시 $\widehat{\theta}_i$를 계산하고 파라미터가 정지규칙에 이를 때까지 식(2.12)에서 식(2.16)까지 반복 수행한다.

## 3. 시뮬레이션

시계열모형을 대상으로 하여 이 방법의 식별성과 추정정확도를 검토하였다. 다음과 같은 ARMAX(3,2,2,1)모형에 대해 신호대잡음비가 30%로하여 잡음이 포함된 경우에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다.

$$\begin{aligned} y_t &- 1.5y_{t-1} + 1.2y_{t-2} - 0.4y_{t-3} \\ &= x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + 0.9x_{t-3} \\ &\quad + a_t + 0.5a_{t-1} + 0.2a_{t-2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

위와 같은 ARMAX(3,2,2,1)모형을 대상으로 1000개의 잡음과 입력신호에 대해 출력신호를 생성하였다. 여기서 $x_t$와 $a_t$는 각각 평균이 0이고 서로 독립인 백색잡음과정이다. 보편적으로 이용되는 벌칙함수법으로 모형을 식별한다면 72개의 모형에 대한 추정과정이 요구되어진다. 그러나 다음과 같이 제안한 방법으로 각각의 모형에 대한 추정과정 없이 모형 식별과 모형의 파라미터를 추정하였다. 1단계에서 먼저 잡음을 분리하고 잡음이 분리된 입출력신호로 부터 입력에 대한 충격반응가중함수를 계산하여 형태인식법으로 입출력모형 차수를 식별하였다. 입출력에 대한 모형 식별을 위한 계산 결과를 Table 1. ~ Table 3.에 나

타냈다. Table 1.에는 3배열 방법[32,33]으로 계산된 $\theta, \lambda, \eta$배열을 나타내었다. $\lambda$배열 1행 1열, $\eta$배열 1행 2열에서 0이므로 지연모수 b는 1이다. 여기서 0의 의미는 비교값으로 상대적으로 주변 값 보다 작은 값을 의미한다. $\theta$배열에 k=3, i=3에서 0에 가까운 작은 숫자가 나타나므로 출력차수 p는 3, 입력차수 r은 2이다. $\lambda$배열에서도 k=3, i=3에서 행으로 상수형태를 나타내고 k=3, i=4 부터 삼각형 형태의 0에 가까운 값을 나타내므로 출력차수 p는 3, 입력차수 r은 2이다. 또한 $\eta$배열 k=3, i=4부터 행과 열이 증가함에 따라 상수형태를 나타내고, k=3, i=5에서 삼각형 형태의 0에 가까운 값이 나타나므로 출력차수 p는 3, 입력차수 r은 2이다. 따라서 3배열방법에 의한 입출력 모형은 ARX(3,2,1)모형이라 할 수 있다. Table 2.는 R배열과 S배열방법[34]에 의하여 계산된 결과를 나타낸다. 먼저 R배열의 1행 1열에서 0에 가까운 값으로 나타나므로 지연모수 b는 1이다. m=1, k=4부터 행으로 작은 값을 나타내므로 p는 3이고 r은 2이다. S배열에서는 1행 1열에서 큰 값이 나타나므로 지연모수 b는 1이 되고, m=1, k=3에서 행으로 일정한 값이 나타나며 2행 3열, 1행 4열에서 부호가 반대인 일정한 값의 형태로 나타나므로 p는 3, r은 2이다. 따라서 R배열과 S배열에서도 ARX(3,2,1)모형으로 식별된다. Table 3.에는 모통이 방법[35]에 의한 D배열을 나타내었다. D배열에 의하면 1행에서 0인 값들이 존재하므로 지연모수 b는 1이고 k=4, i=4에서 부터 사각형 형태의 0인 값이 나타나므로 출력차수 p는 3, 입력차수 r은 2인 ARX(3,2,1)모형으로 식별되었다. 이상과 같이 30% 잡음이 포함되었을 때 잡음을 분리한 ARX모형에 대해 각각의 형태인 식법에 의하면 입출력에 의한 모형은 p는 3, r은 2, 지연모수 b는 1이다. 다음 단계는 MA항의 차수 식별과정과 파라미터 추정 과정이다. 식별된 ARX모형의 파라미터를 선형추정법으로 계산하고, 식(2.12)로부터 벌칙함수법인 AIC, BIC값을 계산하였다. 그 결과는 Table 4.와 같고 MA항의 차수는 최소값을 갖는 2로 식별되었다. 따라서 식별된 시계열 모형은 ARMAX(3,2,2,1)모형이고 계속해서 식별된 모형으로 모형의 개선된 파라미터를 계산하였다. Table 5.에는 제안한 방법으로 추정한 모형의 파라미터와 기존의 비선형 추정법 (Gauss-Newton 방법 : MATLAB)과 선형 알고리즘으로 Spliid방법[18], 반복적 HR방법[12], Mayne과 Firoozan방법[10], Fassois와 Lee의 SML방법[22]에 의해 추정된 결과를 비교하였다. $E_J$는 파라미터 추정오차지수로 다음 식과 같이 정의하였다.

$$E_J = \frac{\| \hat{a_i} - a_i \|}{\| a_i \|} \times 100\% \tag{3.2}$$

여기서 $\| \cdot \|$는 octahedric vector norm 이다. 각각의 알고리즘에 따라 실제 파라미터 값과 추정값이 약간의 차이는 있지만 비슷함을 알 수 있다. 데이터에 따라 각각의 알고리즘에 의한 추정값에서의 차이가 있으므로 100개의 데이터 군을 생성하여 제안한 모형 파라미터 추정 방법의 정확성을 검토하였다. 데이터 개수를 1000개로 하여 100개의 앙상블에 대하여 기존의 비선형, 선형추정법과 제안한 잡음분리에 의한 추정법으로 ARMAX(3,2,2,1) 모형의 파라미터를 추정하였으며 각 알고리즘에 대해 파라미터 추정값의 평균값(mean)과 표준편차(std), 추정오차지수의 평균값과 표준편차를 Table 6.에 정리하였다. 추정오차지수의 평균값이 각각의 알고리즘에 따라 아주 작은 차이는 있지만 표준편차 값에서 유사한 값을 나타내므로 기존의 비선형, 선형 추정알고리즘과의 비교 결과 제안한 추정법으로도 일치성 있고 유효한 추정 값을 얻을 수 있었다.

## 4. 결론

본 논문에서는 ARMAX모형의 체계적인 식별법과 선형적인 추정법을 제안하였다. 잡음이 포함된 전달함수모형 추정법으로 비선형 알고리즘에 비해 계산상 편리하게 적용할 수 있는 선형추정법을 제안하였고 또한 지금까지 동특성 해석을 위한 모형 식별은 가능성 있는 저차 모형에서 고차 모형까지 모형추정에 의한 벌칙함수법을 이용하였으나 본 논문에서는 모형화 과정을 선형적 추정법으로 잡음을 분리하여 식별과 추정이 별개의 독립된 과정이 아닌 결합된 형태로 이루어진 식별과 추정법을 제안하였으며 시뮬레이션으로 알고리즘의 안정성

Table 1. 3-pattern array for ARX model identification of the ARMAX model.

1) $\theta$ array

| k\i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.97E-1 | 1.70E+0 | 2.25E+0 | 1.71E+0 | 5.36E-1 | -3.48E-1 | -4.65E-1 | -4.99E-2 | 3.57E-1 |
| 1 | -2.15E+5 | -6.62E-1 | -1.26E+0 | -7.66E-1 | -5.16E-1 | -6.92E-1 | 5.72E-1 | 3.63E-1 | 2.98E+0 |
| 2 | -1.65E+0 | -1.00E+0 | 2.35E+0 | 2.90E-1 | 1.54E-1 | 1.25E-1 | 1.33E-1 | 1.14E-1 | 6.29E-2 |
| 3 | -1.81E+0 | 1.43E+0 | 1.41E+0 | 7.82E-3 | -2.32E-3 | 8.82E-3 | 3.79E-3 | 6.77E-4 | -6.81E-4 |
| 4 | -1.16E+0 | 5.01E-1 | -5.34E-1 | -2.15E-3 | 8.17E-3 | 3.79E-2 | -8.43E-4 | -7.98E-4 | -1.16E-3 |
| 5 | -9.50E-1 | -1.43E-1 | -3.70E-1 | 8.77E-3 | 4.02E-2 | -1.39E-2 | -6.29E-4 | 5.28E-4 | -6.69E-5 |
| 6 | -3.33E+0 | -3.07E-1 | 7.04E-1 | 4.67E-3 | -3.45E-4 | -3.46E-4 | 8.74E-5 | 2.69E-5 | -5.78E-5 |
| 7 | 1.24E+0 | 7.76E-2 | 2.80E-1 | 2.11E-3 | -3.68E-4 | 4.25E-4 | 3.69E-5 | -6.48E-5 | -8.05E-5 |
| 8 | 6.25E-1 | 2.55E-1 | -8.98E-1 | 5.72E-4 | -3.19E-5 | 4.90E-6 | -5.24E-5 | -3.85E-5 | 8.74E-6 |

2) $\lambda$ array

| k\i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.60E-6 | 9.97E-1 | 1.70E+0 | 2.25E+0 | 1.71E+0 | 5.36E-1 | -3.48E-1 | -4.65E-1 | -4.99E-2 |
| 1 | -2.15E+5 | 9.97E-1 | 3.87E-1 | 9.56E-1 | 1.00E+0 | 1.65E+0 | -1.06E+0 | -4.28E-1 | -3.38E+0 |
| 2 | -3.40E+0 | 1.65E+0 | -1.51E+0 | 7.21E-1 | 3.62E-1 | 3.00E-1 | 2.98E-1 | 2.47E-1 | 1.35E-1 |
| 3 | -2.60E+0 | 3.72E+0 | 2.36E+0 | 9.08E-1 | -1.94E-2 | 5.47E-3 | -2.11E-2 | -8.49E-3 | -1.46E-3 |
| 4 | -1.33E+0 | 1.66E+0 | -1.30E+0 | 8.95E-1 | 2.50E-1 | -6.83E-2 | -2.35E-2 | -4.71E-3 | -1.00E-2 |
| 5 | -3.25E-1 | 1.09E+0 | 4.78E-1 | 9.00E-1 | 3.64E+0 | -1.23E+0 | -2.50E-2 | 1.75E-2 | -3.12E-3 |
| 6 | 2.45E+0 | 1.14E+0 | -2.33E+0 | 9.12E-1 | -4.80E-1 | 3.13E-2 | 3.06E-2 | -3.48E-3 | -8.95E-4 |
| 7 | -2.08E+0 | 9.16E-1 | 2.88E-1 | 9.27E-1 | -4.12E-1 | 5.12E-1 | 3.85E-2 | -1.29E-2 | -8.36E-3 |
| 8 | -1.34E+0 | 1.04E+0 | -3.02E+0 | 9.25E-1 | -2.51E-1 | 3.58E-2 | -5.90E-3 | 5.47E-2 | 7.68E-3 |

3) $\eta$ array

| k\i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.97E-1 | 4.60E-6 | 9.97E-1 | 1.70E+0 | 2.25E+0 | 1.71E+0 | 5.36E-1 | -3.48E-1 | -4.65E-1 |
| 1 | -2.15E+5 | 9.97E-1 | -5.83E-1 | -2.92E-1 | -1.25E+0 | -3.21E+0 | 2.54E+0 | 7.97E-1 | 3.99E+0 |
| 2 | -1.65E+0 | 3.40E+0 | 2.49E+0 | -4.64E-1 | 9.00E-1 | 7.07E-1 | 7.15E-1 | 5.55E-1 | 2.92E-1 |
| 3 | -1.81E+0 | 5.34E+0 | 6.14E+0 | 1.52E+0 | -2.25E+0 | 4.57E-2 | -1.31E-2 | 4.74E-2 | 1.84E-2 |
| 4 | -1.16E+0 | 1.91E+0 | -4.33E+0 | 2.18E+0 | -1.04E+2 | -2.09E+0 | 4.23E-2 | -1.31E-1 | -5.90E-2 |
| 5 | -9.50E-1 | 3.74E-1 | -3.64E+0 | -1.16E+0 | 3.74E+2 | -1.11E+2 | -2.21E+0 | 6.99E-1 | -1.03E-1 |
| 6 | -3.33E+0 | -8.39E-1 | 8.68E+0 | -3.02E+0 | -9.36E+1 | 4.35E+1 | -2.77E+0 | -1.21E+0 | 1.15E-1 |
| 7 | 1.24E+0 | -1.53E+0 | 3.41E+0 | 9.56E-1 | -1.80E+2 | 5.73E+2 | 4.63E+1 | -1.34E+1 | -1.66E+0 |
| 8 | 6.25E-1 | -2.25E+0 | -1.23E+1 | 3.11E+0 | -4.05E+2 | 2.81E+2 | -4.31E+1 | 6.16E+0 | -1.09E+1 |

Table 2. R and S array for ARX model identification of the ARMAX model.

1) R array

| m\k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.60E-6 | 9.97E-1 | -2.98E-1 | 3.54E+0 | -5.26E-4 | 3.20E-3 | -5.43E-5 | -7.67E-6 |
| 1 | -9.97E-1 | -2.44E-1 | -3.14E-1 | 1.91E-3 | -2.75E-3 | -6.88E-3 | -1.36E-5 | -8.61E-6 |
| 2 | 1.70E+0 | 5.44E-1 | 9.17E-2 | 5.55E-4 | -3.23E-3 | 9.94E-5 | 4.86E-6 | -1.38E-5 |
| 3 | -2.25E+0 | -4.35E-1 | -6.15E-2 | 2.13E-3 | 1.39E-4 | 4.86E-5 | 9.49E-6 | 7.73E-6 |
| 4 | 1.71E+0 | 3.93E-1 | 5.93E-2 | -8.84E-4 | -1.56E-4 | 8.96E-6 | 7.46E-6 | 2.95E-6 |
| 5 | -5.36E-1 | -1.97E+0 | -6.50E-2 | 1.55E-4 | -2.42E-1 | -6.09E-6 | 2.19E-5 | 3.17E-8 |
| 6 | -3.48E-1 | -2.45E-1 | 4.41E-2 | 1.56E-4 | 3.02E-5 | -8.97E-6 | -1.14E-5 | -2.36E-6 |
| 7 | 4.65E-1 | 3.28E-1 | -2.14E-2 | -1.13E-4 | -2.76E-6 | -7.53E-6 | -4.57E-6 | -5.40E-7 |

2) S array

| m\k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -2.16E+5 | 3.37E+0 | 3.98E-1 | 4.09E+0 | 1.25E+1 | 6.37E+0 | -4.81E+0 | -9.27E-1 |
| 1 | -2.71E+0 | 7.49E+0 | -4.09E+0 | 2.96E+0 | -2.02E+0 | 6.42E+0 | -7.52E+0 | 3.54E+0 |
| 2 | -2.32E+0 | 3.16E+0 | -4.17E+0 | -1.17E+1 | -6.33E+0 | 5.54E+0 | 5.80E+0 | 4.17E+0 |
| 3 | -1.76E+0 | 2.50E+0 | -4.14E+0 | 6.06E+0 | -1.08E+1 | 6.09E+0 | -2.68E+0 | 3.37E+0 |
| 4 | -1.31E+0 | 2.11E+0 | -4.29E+0 | 5.11E+0 | -7.47E+0 | 1.25E+1 | -5.46E+0 | 6.13E+0 |
| 5 | -3.50E-1 | 2.04E+0 | -4.34E+0 | -4.80E-3 | -7.47E+0 | -2.81E+0 | -6.20E+0 | 4.67E+2 |
| 6 | -2.33E+0 | 2.58E+0 | -4.36E+0 | 7.46E+0 | -5.96E+0 | 4.07E+0 | -6.18E+0 | 7.24E+0 |
| 7 | -1.10E+0 | 2.93E+0 | -4.33E+0 | 5.46E+0 | -2.53E+1 | 1.02E+1 | -9.38E+0 | 3.95E+1 |

Table 3. D array for ARX model identification of the ARMAX model.

| k\i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.04E-06 | 4.17E-12 | 8.53E-18 | 1.74E-23 | 1.64E-29 | 8.99E-31 | 1.83E-36 | 5.03E-30 |
| 1 | 4.42E-01 | 1.95E-01 | 8.66E-02 | 3.83E-02 | 1.69E-02 | 7.50E-03 | 3.32E-03 | 1.47E-03 |
| 2 | 7.56E-01 | 1.30E-01 | -8.75E-02 | -3.17E-02 | 1.25E-02 | 6.81E-03 | -1.58E-03 | -1.37E-03 |
| 3 | 1.00E+00 | 4.24E-01 | 1.36E-01 | 5.48E-02 | 2.20E-02 | 8.84E-03 | 3.58E-03 | 1.45E-03 |
| 4 | 7.60E-01 | 3.40E-01 | 5.47E-02 | -4.72E-04 | -5.24E-05 | -8.56E-05 | 1.79E-05 | -3.00E-06 |
| 5 | 2.38E-01 | 1.74E-01 | 2.32E-02 | 5.64E-05 | -1.71E-06 | 9.36E-07 | 1.77E-08 | 3.08E-09 |
| 6 | -1.54E-01 | 7.32E-02 | 9.69E-03 | -9.11E-05 | 9.52E-07 | -1.05E-08 | -1.43E-10 | -2.64E-12 |
| 7 | -2.06E-01 | 3.93E-02 | 4.32E-03 | -1.63E-05 | 3.41E-08 | 2.65E-10 | -4.10E-13 | 2.35E-15 |
| 8 | -2.21E-02 | 3.33E-02 | 1.99E-03 | -1.30E-06 | 5.77E-09 | -8.00E-12 | 3.18E-15 | -1.18E-17 |

Table 4. MA order identification results of the ARMAX model.

| MA order | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| AIC | 23.21 | -10.47 | -8.79 | -9.99 | -8.19 | -8.81 |
| BIC | 28.17 | -0.66 | 5.93 | 9.63 | 16.35 | 20.64 |

Table 5. Estimated parameters of ARMAX(3,2,2,1) model due to the various and proposed methods.

| parameters | GN | P | SP | HR | MF | SML |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.5000 | -1.4925 | -1.4942 | -1.4981 | -1.4924 | -1.4940 | -1.4939 |
| 1.2000 | 1.2017 | 1.2042 | 1.2102 | 1.2016 | 1.2036 | 1.2035 |
| -0.4000 | -0.4035 | -0.4049 | -0.4087 | -0.4034 | -0.4044 | -0.4044 |
| 1.0000 | 0.9978 | 0.9977 | 0.9979 | 0.9978 | 0.9977 | 0.9977 |
| 0.2000 | 0.2175 | 0.2160 | 0.2115 | 0.2176 | 0.2161 | 0.2162 |
| 0.9000 | 0.9080 | 0.9080 | 0.9049 | 0.9080 | 0.9078 | 0.9079 |
| 0.5000 | 0.5407 | 0.5263 | 0.5341 | 0.5415 | 0.5311 | 0.5302 |
| 0.2000 | 0.1956 | 0.1911 | 0.1967 | 0.1977 | 0.1833 | 0.1875 |
| $E_J$ | 1.4507 | 1.2927 | 1.3007 | 1.4293 | 1.4925 | 1.4120 |

GN : Gauss-Newton method
P : Proposed method
SP : Spliid method
HR : Iterative Hannan and Rissanen method
MF : Mayne and Firoozan method
SML : Suboptimum maximum likelihood method

Table 6. Comparison of the estimation results of ARMAX(3,2,2,1) model due to the various and proposed methods.

| param-eters | GN | | P | | SP | | HR | | MF | | SML | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | mean | std | mean | std | mean | std | mean | std | mean | std | mean | std |
| -1.5000 | -1.4993 | 0.0146 | -1.5001 | 0.0143 | -1.5000 | 0.0148 | -1.4996 | 0.0144 | -1.4996 | 0.0145 | -1.4995 | 0.0145 |
| 1.2000 | 1.1991 | 0.0206 | 1.2001 | 0.0199 | 1.2001 | 0.0209 | 1.1995 | 0.0200 | 1.1994 | 0.0201 | 1.1993 | 0.0201 |
| -0.4000 | -0.3994 | 0.0129 | -0.3999 | 0.0125 | -0.3999 | 0.0133 | -0.3995 | 0.0125 | -0.3994 | 0.0125 | -0.3994 | 0.0126 |
| 1.0000 | 1.0007 | 0.0106 | 1.0006 | 0.0104 | 1.0006 | 0.0104 | 1.0006 | 0.0104 | 1.0006 | 0.0104 | 1.0006 | 0.0104 |
| 0.2000 | 0.1987 | 0.0171 | 0.1982 | 0.0169 | 0.1982 | 0.0176 | 0.1986 | 0.0169 | 0.1986 | 0.0169 | 0.1987 | 0.0169 |
| 0.9000 | 0.8981 | 0.0108 | 0.8984 | 0.0106 | 0.8982 | 0.0109 | 0.8983 | 0.0107 | 0.8983 | 0.0107 | 0.8983 | 0.0106 |
| 0.5000 | 0.4966 | 0.0332 | 0.4932 | 0.0331 | 0.4953 | 0.0330 | 0.4969 | 0.0328 | 0.4971 | 0.0346 | 0.4968 | 0.0355 |
| 0.2000 | 0.1945 | 0.0324 | 0.1930 | 0.0332 | 0.1944 | 0.0332 | 0.1946 | 0.0320 | 0.1928 | 0.0331 | 0.1934 | 0.0356 |
| $E_J$ | 2.0469 | 0.8118 | 2.0590 | 0.8388 | 2.0887 | 0.8728 | 2.0348 | 0.7693 | 2.0875 | 0.7900 | 2.1142 | 0.8738 |

과 정확성을 시험하였다.

시계열모형에 대해 잡음이 포함된 경우 제시한 알고리즘으로 모형을 식별하였으며 또한 비선형 추정법과 선형 추정법 즉 Spliid방법, HR방법, Mayne과 Firoozan에 의한 방법, SML방법과 본 논문에서 제시한 방법으로 계산된 파라미터와 추정 오차지수를 이용하여 비교하였고 각각 다른 100개의 데이터 군에 대해 계산된 추정 파라미터의 평균값과 표준편차, 오차지수의 평균과 표준편차를 비교한 결과 제안한 방법으로 일치성 있고 유효한 추정값을 얻을 수 있었다. 이상과 같이 지금까지 잡음이 포함된 전달함수 형태의 ARMAX모형 식별법으로 보편적으로 사용된 벌칙함수법 대신 모형식별과 추정과정이 서로 독립된 과정이 아닌 결합된 형태로 불필요한 모형을 대상으로 한 모형 추정과정 없이 한 번에 식별과 추정이 이루어지는 알고리즘을 제안하였다.

## 후기

본 연구는 1996년도 연세대학교 학술연구비의 지원을 받아 이루어졌으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., Time Series Analysis ; Forcasting and Control, Holden-Day, 1976.
2. Ästrom, K. J., " Maximum Likelihood and Prediction Error Methods," Automatica, Vol.16, pp. 551 - 574, 1980.
3. Ästrom, K. J. and Söderström, T., "Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimates of the Parameters of an ARMA Model," IEEE Transactions on Automatic control, Vol.19, pp. 769-773, 1974.
4. Söderström, T., "Convergence Properties of the Generalised Least Squares Identification Method," Automatica, Vol.10, pp. 617-626, 1974.
5. Söderström, T., "On the Uniqueness of Maximum likelihood Identification," Automatica, Vol.11, pp. 193-197, 1975.
6. Durbin, J., "The Fitting of Time Series Models," Revue Inst. Int. de Stat. Vol.23, No.3, pp. 233-244, 1960.
7. Mayne, D. Q., "Parameter estimation," Automatica, Vol.3, pp. 245-253, 1966.
8. Wong, K. Y. and Polak, E., "Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Mehtod," IEEE Transactions on Automatic Control, AC-12, pp. 707-718, 1967.
9. Kashyap, R. L. and Nasburg, R. E., "Parameter Estimation in Multivariate Stochastic Difference Equations," IEEE Transactions on Automatic Control, AC-19, No.6, pp. 784-797, 1974.
10. Mayne, D. Q. and Firoozan, F., " Linear Identification of ARMA process," Automatica, Vol.18, pp. 461-466, 1982.
11. Mayne, D. Q., Ästrom, K. J., and Clark, J. M. C., " A New Algorithm for Recursive Estimation of Parameters in Controlled ARMA Processes," Automatica, Vol.20, No.6, pp. 751-760, 1984.
12. Hannan, E. J. and Rissanen, J., "Recursive Estimation of Mixed Autoregressive Moving Average Order," Biometrika, Vol.71, pp. 81-94, 1982.
13. Hannan, E. J. and Kavalieris, L., "A Method for Autoregressive Moving Average Estimation," Biometrika, Vol.71, pp. 273-280, 1984.
14. Hannan, E. J., Kavalieris, L., and Mackisack, M., " Recursive Estimation of Linear System," Biometrika, Vol.73, pp. 119-133, 1986.
15. Hannan, E. J. and McDougall A. J., "Regression Procedures for ARMA Estimation," Journal of the American Statistical Association, Vol.83, No.402, pp. 490-498, 1988.
16. Koreisha, S. and Pukkila, T., " A Generalized Least Squares Approach for Estimation Of Autoregressive Moving Average Models," Journal of Time Series Analysis, Vol.11, No.2, pp. 139-151, 1990.
17. Pukkila, T., Koreisha, S., and Kallinen, A., "The Identification of ARMA models," Biometrika,

Vol.77, pp. 537-548, 1990.

18. Spliid, H., "A Fast Estimation Method for the Vector Autoregressive Moving Average Model with Exogeneous Variables," Journal of American Statistical Association, Vol.78, pp. 843-848, 1983.
19. Sabiti, J. K., "A Fast Estimation Method for ARMA processes," Automatica, Vol.32, No.2, pp. 235-239, 1996.
20. Fassois, S. D., Eman, K. F., and Wu, S. M., " A Linear Time Domain Method for Structure Dynamics Identification," Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol.112, pp. 98-106, 1990.
21. Fassois, S. D., Eman, K. F., and Wu, S. M., "A Suboptimum Maximum Likelihood Approach to Parametric Signal Analysis," Journal of Dynamic Systems Measurements and Control, Vol.111, pp. 153-159, 1989.
22. Lee, J. E., Linear Multistage Identification of ARMAX processes with stochastic structural dynamics applications, Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan, 1991.
23. Lee, J. E. and Fassois, S. D., "Suboptimum Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Multiple - Excitation Vibration Data," Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 114, pp. 260-271, 1992.
24. Choi, B. S., ARMA model Identification, Spring-Verlag, 1992.
25. Pandit, S. M. and Wu, S. M., Time Series and System Analysis with Application, John Wiley & Sons, 1983.
26. Gray, H. L., Kelly, G. D., and McIntire, D. D., "A New Approach to ARMA Modeling," Commun. Statist.-Simula. Computa., B7(1), pp. 1-77, 1978.
27. Tucker, W. T., " On the Pade Table and its Relationship to the R and S array and ARMA modeling," Commun. Statist., A11, pp. 1335-1379, 1982.
28. Woodward, W. A. and Gray, H. L., "On the Relationship Between the S Array and the Box-Jenkins Method of ARMA model Identification," Journal of the American Statistical Association, Vol.76, No.375, pp. 579-587, 1981.
29. Beguin, J. M., Gourieroux, C., and Monfort, A., "Identification of a mixed ARMA process : The Corner Method," Time Series(Anderson, O. D., Ed), Amsterdam, North-Holland, 1980.
30. Choi, B, S., "Two Chi-square Statistics for Determining the Orders p and q of an ARMA (p,q) Process," IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.41, No.6, 1993.
31. Whittle. P., "On the Fitting of Multivariate Autoregressions, and the Approximate Canonical Factorization of a Spectral Density Matrix," Biometrika, Vol.50, pp. 129-134, 1963.
32. 최병선, 다변량시계열분석, 세경사, 1994.
33. 장승욱, 3배열방법을 이용한 전이함수모형의 식별, 석사학위논문, 연세대학교, 1993.
34. Kim, H. J., "R and S Arrays Approach for Transfer Function-Noise Model Identification," Journal of the Korean Statistical Society, Vol.19, No.1, pp. 1-14, 1990.
35. Liu, L. M. and Hanssens, D., "Identification of Multiple-input Transfer Function Models," Commun. Statist.-Theor. Math., 11(3), pp. 294-314, 1982.