

# 비구동관절을 가진 기계시스템의 가진제어: 평균화해석을 통한 제어기의 설계

## Vibrational Control of an Underactuated Mechanical System: Control Design through Averaging Analysis

홍금식, 양경진

(Keum-Shik Hong, and Kyung-Jinn Yang)

**Abstract :** An open loop vibrational control for an underactuated mechanical system with amplitude and frequency modulation is investigated. Since there is no direct external input to an unactuated joint, the dynamic coupling between the actuated and unactuated joints is utilized for controlling the unactuated joint. Feedback linearization has been performed to incorporate fully the known nonlinearities of the underactuated system considered. The actuated joints are firstly positioned to their desired locations, and then periodic oscillatory inputs are applied to the actuated joints to move the remaining unactuated joints to their target positions. The amplitudes and frequencies of the vibrations introduced are determined through averaging analysis. A systematic way of obtaining an averaged system for the underactuated system via a coordinate transformation is developed. A control design example of 2R planar manipulator with a free joint with no brake is provided.

**Keywords :** averaging, feedback linearization, open loop control, underactuated manipulator, vibrational control

### I. 서론

비구동관절(unactuated joint)을 가진 기계시스템이란 시스템이 갖고 있는 관절의 일부에 작동기가 부착되어 있지 않는 기계시스템을 말한다. 본 논문에서는 이러한 시스템을 비구동관절시스템(underactuated system)으로 명명하기로 한다. 작동기가 없는 자유관절(free joint) 또는 수동관절(pассив joint)을 가진 머니플레이터는 제어 입력의 수가 일반화된 좌표계의 수보다 작동기가 없는 관절의 수만큼 적기 때문에 비구동관절시스템으로 분류된다. 최근에 비구동관절시스템의 제어에 관한 연구는 센서나 작동기를 줄이는 관점에 있어서 뿐만 아니라 위험한 지역에서 작동하고 있는 머니플레이터에 대한 신뢰도를 높이는 관점에서 많이 이루어지고 있다. 특히, 우주 공간에서 작동하는 머니플레이터의 경우, 작동기가 고장 날 경우에도 제어목적이 달성되어야 하는 것이 중요하게 다루어지고 있다.

관절의 구분에 있어서 능동관절(active joint)이란 작동기가 부착되어 있어 제어입력을 직접적으로 부여할 수 있는 관절을 지칭하며, 수동관절이란 작동기는 없지만 제동기와 같은 감쇠요소가 존재하는 관절로 정의하며, 자유관절이란 작동기 뿐만 아니라 감쇠력도 없는 자유로이 움직일 수 있는 관절로 정의한다. 본 논문에서는 수동관절 또는 자유관절을 가진 시스템을 비구동관절시스템으로 지칭하기로 한다. 또한, 수동관절은 넓은 의미로 자유관절을 포함하는 것으로 한다.

비구동관절시스템에 대한 제어는 시스템의 성격에 따

접수일자 : 1998. 1. 15., 수정완료 : 1999. 4. 12.

홍금식, 양경진 : 부산대학교 기계공학부

\* 본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구 971-0920-137-2에  
의하여 지원을 받았습니다.

라 다르나 일반적으로 기구학적 혹은 동적 상호간섭(coupling)을 이용하고 있다. 기구학적 상호간섭을 이용하는 예로는 모빌로봇 및 유연한 로봇 손 등을 들 수 있다[16]. 이러한 시스템들의 특징은 시스템의 미분방정식에서 제어입력이 선형의 관계로 나타나고, 또한 제어입력이 0이면 시스템 상태가 변하지 않는 특성을 가지고 있다[14][16].

본 논문에서는 표류항(drift term)이 존재하는 비구동관절시스템에 대한 동적 상호간섭을 이용하는 제어기법을 구상한다. 그리고 본 논문에서 먼저 지적하고 싶은 것은 어떤 시스템의 작동기가 부족하다는 것이 그 시스템이 제어불가능(uncontrollable)하다는 것을 의미하는 것은 아니라는 것을 밝힌다. 작동기가 부족하더라도 그 시스템의 특성에 따라 제어가능(controllable)할 수도 있고 제어가능하지 않을 수도 있다. 시스템의 제어가능성은 선형시스템에 대해서는 제어가능성(controllability) 그 램프로세스로 판별할 수 있고, 비선형시스템에 대해서는 small-time local controllability 만족을 위한 충분조건을 판별하는 방법 등이 소개되고 있다[18]. 앞에서 소개된 기구학적 및 동적 상호간섭을 이용하는 모든 예들은 제어가능한 시스템들이다. 그러나, 본 논문의 IV장에서 예를 들고 있는 2R 평면 머니플레이터의 경우에는 임의의 동작점에서 선형화된 어떤 선형시스템도 제어가능하지 않다. 즉, 제어불가능한 시스템을 가진제어를 통하여 제어할 수 있음을 예로 보인다.

비구동관절을 가진 시스템의 제어에 관한 최근의 연구들을 간략히 살펴보면 다음과 같다. Arai와 Tachi[1]는 수동관절을 제어하기 위해 수동관절보다 많거나 같은 수의 능동관절이 필요함을 증명하고 있다. 그들은 또한 모든 관절들을 원하는 위치로 옮기기 위해 직교공간에서

의 제어기의 설계를 제안하고 있다[2]. Bergerman과 Xu[9]는 수동관절을 가지는 3링크 머니풀레이터에 대한 가변구조제어를 소개하고 있다. 관절에 브레이크가 부착되어 있는 수동관절의 경우에는 그 관절을 먼저 원하는 위치에 옮겨 브레이크를 작동시키고 난 후 남아있는 능동관절을 제어할 수 있다. 그러나, 자유관절을 가진 시스템에 대한 연구는 수동관절을 가진 시스템에 대한 연구에 비하여 매우 드문 편이다.

최근에 자유관절을 가지는 머니풀레이터를 제어하기 위하여 주기적 진동(periodic oscillations)을 이용하는 논문이 발표되고 있다[19][20]. 수동관절에 대한 운동방정식에서 능동관절변수는 시변매개변수로서 간주될 수 있다. 즉, 작동기로부터 직접적인 제어입력이 없는 수동관절의 관점에서 볼 때 상호간섭되어 나타나는 능동관절변수의 진동은 제어입력이 된다. Suzuki 외 2인[19]은 Poincare map을 기초로 하여 불변다양체(invariant manifold)로 안정화하는 방법을 소개하고 있다. 또한, De Luca 외 2인[14]은 멱영근사법(nilpotent approximation)과 반복제어(iterative control)를 사용한 개루프제어를 소개하고 있다.

가진제어(vibrational control)란 평균값이 영(average zero)인 고주파의 진동입력을 시스템에 포함으로써 시스템의 동특성이 정성적으로 변화하도록 하는 제어기법을 말한다[15]. 이와 같은 가진제어는 역진자의 지지점에 수직방향으로 빠른 진동을 포함으로써 역진자를 세울 수 있다는 연구로부터 시작되어[10], 유한차원 선형시스템에 대한 가진제어를 통한 안정화의 조건 및 제어가능성에 관한 연구가 발표되었고[15], 1980년대 중반에는 비선형시스템에 대한 연구로 확장되었다[4][5]. 또한, 포물형(parabolic) 편미분방정식과 시간지연 미분방정식에까지 연구가 진행되었다[6]~[8][12][13].

본 논문은 비구동관절시스템에 대한 되먹임선형화(feedback linearization)를 통한 개루프 가진제어에 관한 연구이다. 물론, 되먹임/앞먹임 방법과 같은 전통적인 제어방법이 적용 가능할 경우에는 전통적인 방법을 사용하는 것이 바람직하다. 그러나, 본 논문의 예에서와 같이 어떠한 전통적인 제어방법이 적용 불가능할 경우에는 가진제어가 유일한 대안이 될 수 있다. 또한 센서 결합 등으로 인하여 되먹임 회로가 차단될 경우에도 좋은 대안이 될 수 있다.

본 논문에서의 비선형 비구동관절시스템에 대한 제어전략은 알려진 시스템의 비선형성을 먼저 되먹임 선형화를 통하여 충분히 제어기의 설계시 반영한다. 능동관절부분은 되먹임 선형화시 선형의 형태로 나타나므로 쉽게 제어기의 설계가 가능하다. 능동관절을 우선적으로 원하는 위치로 옮겼을 때, 자유관절은 상태공간에서 임의의 상태에 위치하게 된다. 따라서, 자유관절을 원하는 위치로 옮기기 위해서 목표위치에 이미 위치해 있는 능동관절에 다시 주기적인 진동을 포함으로서 동적 상호간섭(dynamic interference)을 일으켜 자유관절을 옮기게 된다. 발생시키는 진동의 크기와 주파수는 평균화해석

(averaging analysis)을 통하여 결정하게 된다.

본 논문의 공헌은 다음과 같다. 첫째, 본 논문은 작동기가 부착되지 않은 관절을 가진 비구동관절 기계시스템의 가진제어에 관한 첫 번째 시도이다. 둘째, 상미분방정식의 평균화기법을 입력의 미분항까지 포함된 시변시스템으로 확장한다. 셋째, 비구동관절시스템에 대한 평균화된 방정식(averaged equation)을 얻는 체계적인 방법을 제시한다. 마지막으로, 선형제어가 불가능한 시스템인 자유관절을 가지는 평면 2링크 머니풀레이터를 가진제어를 통하여 목표위치로 옮기는 방법을 구체적으로 제시한다. 그리고 참고로 구동관절에 주기진동을 가하였을 때 얻어지는 시변시스템의 성질을 평균화해석을 통한 시불변시스템으로 바꾸어 해석하고자 하는 노력은 최근의 연구[3][19][20]보다도 훨씬 전에 본 논문의 첫번째 저자에 의해서도 이루어 졌다는 것을 밝힌다[6]~[8][12][13].

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 일반적인 비구동관절 기계시스템을 모델링한 후, 되먹임선형화를 수행한다. III장에서는 평균화기법을 입력의 미분항까지 포함하는 시스템으로 확장한다. IV장에서는 2링크 평면 머니풀레이터에 응용하여 평균화된 시스템을 구하고, 이러한 평균화된 시스템을 이용하여 원하는 위치로 제어될 수 있음을 보인다. 마지막으로, V장에서 결론을 기술한다.

## II. 비구동관절시스템의 부분선형화

본 절에서는 비구동관절시스템의 운동방정식을 유도하고, 되먹임선형화 기법을 적용할 때 폐루프시스템이 부분적으로만 선형화됨을 살펴보기로 한다. 즉, 작동기가 부착된 관절변수들은 입출력관계식이 선형의 형태로 되어 제어입력을 직접적으로 받을 수 있는데 반하여, 작동기가 부착되지 않은 관절변수들은 제어입력이 능동관절변수를 통하여 간접적으로 상호간섭되어 나타나게 된다. 따라서, 작동기가 부착되지 않은 관절변수의 제어를 위해서는 능동관절과의 동적 상호간섭을 통한 간접적인 제어를 시도하여야 한다.

### 1. 비구동관절시스템의 운동방정식

관절변수가  $q^1, \dots, q^k$ 인 자유도가  $k$ 인 개루프 기계시스템을 고려한다. 각각의 관절은  $l$  자유도를 가지며, 작동기가 부착된  $m$ 개의 능동관절과 작동기가 부착되지 않은  $l = k - m$ 개의 수동/자유관절이 있다고 가정한다. 그리고, 능동관절 및 수동/자유관절 모두 관절변위 값들을 측정 수 있다고 가정한다. 라그랑즈 방법을 이용하여 시스템의 운동방정식을 구한 후, 능동관절들을  $q_1 \in R^m$ , 수동/자유관절들을  $q_2 \in R^l$ 로 묶어 운동방정식을 재배열하면 다음과 같다.

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = f \quad (1)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = 0 \quad (2)$$

여기서,  $q = [q_1^T \ q_2^T]^T$ 이고, 벡터함수  $C_1(q, \dot{q}) \in R^m$ 과  $C_2(q, \dot{q}) \in R^l$ 은 코리올리력 및 구심력에 대한 항이고,

벡터함수  $C_1(q) \in R^m$  와  $C_2(q) \in R^l$  는 중력에 대한 항이며,  $f \in R^m$  은 능동관절에 작용하는  $m$  개 작동기의 일반화된 힘을 나타낸다. 따라서, 각각의 관절에 작동기가 하나씩 붙어있는 보통의 머니풀레이터와 마찬가지로 비구동관절시스템에 대해서도 다음과 같은 일반적인 표현을 쓸 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = Bf \quad (3)$$

여기서,  $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} I_{m \times m} \\ O_{l \times m} \end{bmatrix}$ ,  $C = [C_1^T \ C_2^T]^T$ ,  $G = [G_1^T \ G_2^T]^T$  으로,  $M$  은 대칭 양한정(symmetric positive definite) 행렬이고, 아래의  $l$  개의 방정식의 제어입력이 0이라는 것을 제외하곤 일반적인 머니풀레이터의 운동방정식과 같은 형태임을 알 수 있다.

## 2. 부분선형화

(2)의  $M_{22}$  는  $l \times l$  양한정행렬이다. 따라서, (2)로부터  $\ddot{q}_2$  을 풀어 (1)에 대입하면 다음이 얻어진다.

$$\overline{M}_{11}\ddot{q}_1 + \overline{C}_1 + \overline{G}_1 = f \quad (4)$$

여기서,  $\overline{M}_{11} = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ ,  $\overline{C}_1 = C_1 - M_{12}M_{22}^{-1}C_2$ ,  $\overline{G}_1 = G_1 - M_{12}M_{22}^{-1}G_2$  이다.

이제, 제어입력  $f$  를 다음과 같이 정의한다.

$$f = \overline{M}_{11}u + \overline{C}_1 + \overline{G}_1 \quad (5)$$

여기서,  $u \in R^m$  는 차후에 결정될 부가적인 제어입력이다. (5)를 (4)에 대입하면 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\ddot{q}_1 = u \quad (6)$$

$$M_{22}(q)\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = -M_{21}(q)u \quad (7)$$

(6)에서 나타나듯 부가적인 제어입력  $u$  와 능동관절변수  $q_1$  은 선형화된 미분방정식의 형태를 취함을 알 수 있다. 그러나, 전체 시스템의 상태벡터  $q = [q_1^T \ q_2^T]^T$  를 살펴보았을 때 단지 부분적으로 선형화가 이루어졌음을 알 수 있다. 즉, 관절변수  $q_2$  에 대해서는 원래의 비선형방정식을 그대로 유지하고 있으며, 능동관절변수의  $\ddot{q}_1$  이 (6)의 관계식을 이용하여 (7)에서 제어입력으로 등장함을 알 수 있다. 이제, 제어문제는 주어진 제어목적이 이루어지도록 (6)과 (7)에 대한 제어입력  $u$  를 설계하는 문제가 된다. 만약 이 시점에서 선형제어기법을 적용하기 위해서 (6)과 (7)을 선형화할 경우와 (1)과 (2)를 선형화 할 경우를 비교한다면 (5)와 같은 변환관계를 활용함으로써 파악된 시스템의 비선형성을 충분히 제어기 설계기 설계시 고려할 수 있다는 장점이 있다. 물론, (6)과 (7)에 대한 제어기 설계시 첫 번째 검토하여야 할 사항은 제어가능성의 확인이다. 또한, (6)과 (7)이 제어가능하지 않을 때 전통적인 제어기법의 적용은 불가능하다. 본 논문에서는 전통적인 제어가 불가능할 경우 이를 대체할 수 있는 대안, 혹은 센서결합 등으로 인하여 되먹임제어가 불가능할 경우 등에 대비한 대안으로서 다음과 같은 가진

제어를 시도한다.

## III. 가진제어

가진제어란 시스템 내에 의도적으로 진동(vibrations) 을 발생시킴으로써 시스템의 동특성이 정성적으로(qualitatively) 변하게 하여 제어목적을 얻는 제어기법을 말한다. 발생시키는 진동은 통상적으로 고주파 성분으로서 평균값이 0인 주기함수이다. 진동을 발생시키는 요소는 시스템 매개변수일 수도 있고 외부로부터의 입력일 수도 있다. 시스템 내의 임의의 매개변수들을 가진하게 될 때 그 매개변수 값은 가진제어의 측면에서 제어입력이 된다. 제어기의 설계문제는 가하는 진동의 크기와 주파수를 결정하는 문제가 된다. 또한, 시스템의 동특성을 변화시키는 진동이 존재하는가 안하는가를 밝히는 것도 가진제어의 중요한 문제가 된다. 시스템 내에 진동을 발생시켜 시스템의 동특성이 변화하기를 기대한다는 것은 가진제어가 본질적으로 개루프제어(open loop control)임을 의미한다. 가진안정화(vibrational stabilization)란 불안정한 시스템에 진동을 발생시킴으로써 시스템을 안정화할 수 있다는 것을 말한다. 본 논문의 경우에는 진동을 발생시킨 후, 상태변수가 상태공간에서 원하는 위치에 도달하게 될 때 가진입력을 중단하게 된다. 따라서, 되먹임제어가 가능한 시스템에 대해서는 구태여 가진제어를 시도할 필요는 없다. 그러나, 전통적인 되먹임/앞먹임 제어기법이 적용 불가능한 경우에는 이러한 가진제어가 적절한 대안이 될 수 있다. 본 논문에서 예로 들고 있는 2R 평면 머니풀레이터의 경우는 선형화된 시스템이 제어불가능하므로 가진제어를 통한 개루프제어는 좋은 대안이 된다. 또한, 중력이 존재하지 않는 우주공간에서 작동하는 어떤 머니풀레이터도 작동기가 일단 고장이 나면 가진제어의 대상이 될 수 있다.

산업현장에서의 가진제어기법을 활용한 예로서 다음을 들 수 있다. 고에너지 입자의 가속장치, 플라즈마의 안정화,  $CO_2$ 레이저의 이온-열 불안정 현상의 안정화, 탄성계의 Euler 불안정성의 감소화, 레이저 발광되는 열-화학 시스템의 가진제어들을 들 수 있다[15].

평균화해석(averaging analysis)이란 시변시스템의 동특성을 주어진 방정식의 오른편을 시간에 대해서 평균하여 얻은 시불변시스템의 동특성을 해석함으로써 원래의 시변시스템의 동특성을 파악하고자 하는 근사해석(asymptotic analysis)기법이다. 이러한 시불변시스템은 먼저 시변시스템을 표준형(standard form)으로 바꾼 후, 오른편을 시간에 대한 평균값을 취함으로서 얻게 된다.

먼저, (6)에 대하여 적절한 제어입력을 가함으로서 능동관절변수  $q_1$  을 원하는 위치에 이미 옮겼다고 가정한다. 이때 관절변수  $q_2$  는 (7)에 의거하여 상태공간에서 임의의 점에 위치하게 된다. 이제  $q_2$  를 원하는 위치로 옮기기 위하여 능동관절에 주기입력을 가하게 되면 능동관절은 매 주기가 끝날 때마다 제 위치로 돌아오게 되나 이로 인하여 수동관절은 동적간섭을 받게 된다. 주기적으로 움직이는 능동관절을 갖는 (7)은 주기시스템(per-

iodic system)이 된다.

상태변수  $x = [q_2^T \quad \dot{q}_2^T]^T \in R^n$ ,  $n=2l$ 을 도입할 때 (7)의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M_{22}^{-1}(x_1, q_1)(C_2(x_1, x_2, q_1, \dot{q}_1) + G_2(x_1, q_1) \\ + M_{21}(x_1, q_1)\ddot{q}_1 \end{bmatrix} \\ &\equiv X(x; q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \\ &\equiv X(x, \lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $X: R^n \rightarrow R^n$ 이고, 능동관절의 변위  $q_1$ , 속도  $\dot{q}_1$ , 가속도  $\ddot{q}_1$ 은 시스템 매개변수로써 취급된다. 또한, 진동을 도입하는 매개변수라는 의미에서 능동관절 변수를  $\lambda$ 로 대표하기로 한다. 일반적인 경우에는  $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1$  모두가 (8)에 매개변수로 나타날 수 있으나, 시스템의 특성에 따라  $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1$  중에서 일부분만이 나타날 수 있다. IV 장의 2R 머니풀레이터의 경우에는  $q_1, \dot{q}_1$  만이 나타나게 된다. 상태방정식에서 나타나는  $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1$  항 중에서 최고차수의 다음 차수를 진동을 도입하는 매개변수로써 정의한다. 즉, 일반적인 경우에 대해서  $\lambda = \dot{q}_1$ 으로 정의한다.

이제, (8)에 다음과 같은 진동을 도입한다.

$$\lambda(t) \equiv \dot{q}_1(t) \rightarrow \lambda_0 + \alpha f(\omega t) \quad (9)$$

여기서,  $\lambda_0$ 는 상수이고  $\alpha f(\omega t)$ 는 평균값이 영(zero)인 주기함수이다.  $\alpha$ 와  $\omega$ 는 주기함수의 진폭과 주파수이다. 또한, 다음과 같은 동반관계가 성립하게 된다.

$$\ddot{q}_1 = \alpha \omega f'(\omega t) \quad (10a)$$

$$q_1 = \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t) \quad (10b)$$

여기서,  $f'$ 과  $F$ 는 각각  $f$ 의 도함수와 역도함수이다. (9)와 (10)을 (8)에 대입하면

$$\dot{x} = X(x, \lambda_0 + \alpha f(\omega t))$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M_{22}^{-1}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)\left(C_2\left(x_1, x_2, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t), \alpha f(\omega t)\right) \right. \\ \left. + G_2\left(x_1, x_2, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right) \right. \\ \left. + \alpha \omega M_{21}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)f'(\omega t)\right) \end{bmatrix} \quad (11) \end{aligned}$$

이 얻어진다. (11)을 다음과 같이 두 부분으로 나눌 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -M_{22}^{-1}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)\left(C_2\left(x_1, x_2, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t), \alpha f(\omega t)\right) \right. \\ \left. + G_2\left(x_1, x_2, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)\right) \end{bmatrix} \\ &\quad + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha M_{22}^{-1}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)M_{21}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(\omega t)\right)f'(\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= X_0\left(x, \omega t, \frac{1}{\omega}\right) + \omega X_1(x, \omega t) \quad (12)$$

즉,  $\omega$ 에 대해서 선형으로 나타나는 항인  $X_1(\cdot, \cdot)$ 과 그 외의 항의 합의 형태이다.

(12)를 표준형으로 변환하기 위하여 (12)의 오른편의 두번째 항을 다음과 같은 생성방정식(generating equation[3])으로 활용한다.

$$\dot{x}(t) = X_1(x, t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha M_{22}^{-1}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(t)\right)M_{21}\left(x_1, \frac{\alpha}{\omega} F(t)\right)f'(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

(13)의 일반해를  $h(t, c): R \times R^n \rightarrow R^n$ 으로 두자. 통상적으로  $h(\cdot, c)$ 는  $\gamma(\cdot)$ 와 같은 주기의 주기함수이다. 초기조건  $x(t_0) \in \Omega \subset R^n$ 이 주어지면  $c \in R^n$ 는 유일하게 결정될 수 있다.

이제, 일반해를 이용하여 다음과 같은 좌표변환(coordinate transformation)을 도입함으로써 새로운 변수  $q(t)$ 를 정의한다.

$$x(t) = h(\omega t, q(t)) \quad (14)$$

(14)의 양변을 시간에 대해서 미분하고 (12)를 대입하여 정리하면

$$\dot{q}(t) = \left[ \frac{\partial h(\omega t, q(t))}{\partial q(t)} \right]^{-1} X_0\left(h(\omega t, q(t)), \omega t, \frac{1}{\omega}\right) \quad (15)$$

이 얻어진다. 따라서,  $\tau = \omega t$ 의 느린시간(slow time)에서  $d\tau = d\omega t$  및  $\varepsilon = 1/\omega$ 의 관계와 느린 변수  $z(\tau) = q(t)$ 를 정의하면 (15)는 다음과 같은 표준형태로 바뀌게 된다.

$$\dot{z}(\tau) = \varepsilon \left[ \frac{\partial h(\tau, z(\tau))}{\partial z(\tau)} \right]^{-1} X_0(h(\tau, z(\tau)), \tau, \varepsilon) \quad (16)$$

상기의 결과들을 다음의 정리로 요약한다.

정리 : (9)의 진동을 가지는 (8)의 비구동관절시스템을 고려할 때,  $h: R^+ \times R^n \rightarrow R^n$ 인 평활한(smooth) 좌표변환이 존재하고, 이러한 좌표변환을 통하여 시스템은 아래의 표준형으로 표현할 수 있다.

$$\dot{z} = \varepsilon f(z, t, \varepsilon): z \in U \subseteq R^n, 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (17)$$

여기서,  $f: R^n \times R \times R^n \rightarrow R^n$ 은 시간  $t$ 에 대하여 주기  $T$ 를 가진다.

이제, (17)의 오른편을 시간에 대해 평균함으로써 다음과 같은 시불변시스템을 정의할 수 있다.

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{Y}(y) \quad (18)$$

여기서,

$$\bar{Y}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, \tau, 0) d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{\partial h(\tau, y)}{\partial y} \right]^{-1} X_0(h(\tau, y), \tau, 0) d\tau \text{ 이다.}$$

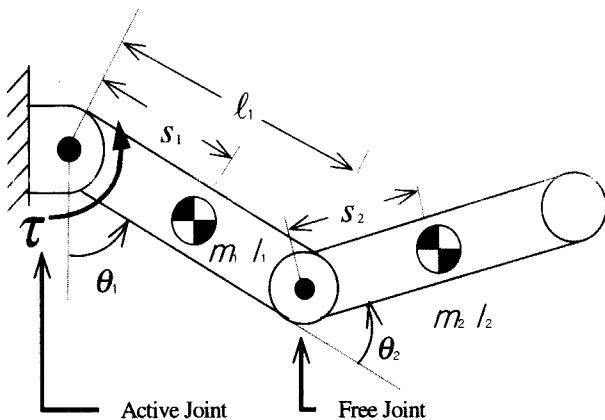


그림 1. 자유관절을 가진 평면 2R 머니퓰레이터.

Fig. 1. A planar 2R manipulator with a free joint.

비선형 시변시스템 (17)의 해와 이를 시간에 대한 평균한 비선형 시불변시스템 (18)의 해에 대한 관계는  $\varepsilon$ 에 의존함을 알 수가 있다. 따라서, 충분히 적은  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ )에 대하여 (18)의 해는 (17)의 해를 대신하여 해석할 수 있다. 시간에 대해 주기적인 시스템에 대한 평균화 기법의 정리를 부록에 수록한다.

#### IV. 응용 : 2R 평면 머니퓰레이터

그림 1은 평면에서 움직이는 2R 머니퓰레이터를 보이고 있다[14][19].  $\theta_1$ 은 능동관절의 각변위 그리고  $\theta_2$ 는 자유관절의 능동관절로부터의 상대각변위를 나타낸다. 라그랑즈 방법을 이용한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M_{11}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + M_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + C_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \tau \quad (19)$$

$$M_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + M_{22}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + C_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 0$$

여기서,

$$\begin{aligned} M_{11}(\theta_2) &= m_1 l_{1c}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{2c}^2 + 2m_2 l_{2c} l_1 \cos \theta_2 \\ &\quad + I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$M_{12}(\theta_2) = m_2 l_{2c}^2 + m_2 l_{2c} l_1 \cos \theta_2 + I_2$$

$$M_{22}(\theta_2) = m_2 l_{2c}^2 + I_2$$

$$C_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = -m_2 l_{2c} l_1 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$C_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 2m_2 l_{2c} l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2$$

이다.

임의의 작동점  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (\theta_1, \theta_2, 0, 0)$ 에 대해서 선형화할 때  $C_1 = C_2 = 0$ 가 되고, 제어가능성 판별을 위한 그램행렬  $[B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ 의 계수(rank)가 2가 되어 선형제어가 불가능한 시스템임을 쉽게 알 수 있다. II 장의 순서에 따라서 부분 되먹임선형화를 수행하면

$$\ddot{\theta}_1 = u \quad (20a)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -(1 + n \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - n \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \quad (20b)$$

이 얻어진다. 여기서,  $n = m_2 l_1 l_2 / (m_2 l_{2c}^2 + I_2)$ 이다.

능동관절변수  $\theta_1$ 은  $u$ 를 통하여 원하는 위치로 이미 옮겨졌다고 가정한다. 이제, 가진제어 문제는  $\theta_1$ 의 이동 종료시 임의의 위치에 머물게 되는  $\theta_2$ 를 어떻게 원하는 목표위치로 옮기는가이다. (20b)를  $\theta_2$ 에 대한 동역학식으로 살펴볼 때  $\ddot{\theta}_1$ 과  $\ddot{\theta}_2$ 는 시변 매개변수로써 간주된다.

상태변수  $x_1 = \theta_2$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_2$ 을 정의하면 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1 + n \cos x_1) \ddot{\theta}_1 - n \sin x_1 (\dot{\theta}_1)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

(10)의 진동입력을 다음과 같이 도입한다.

$$\lambda(t) = \dot{\theta}_1(t) = \sin \omega t \quad (22a)$$

또한, 다음의 관계식이 성립한다.

$$\theta_1(t) = -\frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t \quad (22b)$$

$$\ddot{\theta}_1(t) = \alpha \omega \cos \omega t \quad (22c)$$

(22a), (22b), (22c)를 (21)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -n \sin x_1 (\alpha \sin \omega t)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \cos \omega t (1 + n \cos x_1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 얻어진다. (23)은 III 장의 (12)에 해당함을 주목한다. 따라서, (13)의 생성방정식은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \cos \omega t (1 + n \cos x_1) \end{bmatrix} \quad (24)$$

이 된다. (24)의 일반해를 구하면

$$h(t, c) = \begin{bmatrix} h_1(t, c) \\ h_2(t, c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 - \alpha(1 + n \cos c_1) \sin t \end{bmatrix} \quad (25)$$

이 된다. 또한 (25)를 이용한 (14)의 좌표변환은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) - \alpha(1 + n \cos q_1(t)) \sin t \end{bmatrix} \quad (26)$$

(26)을 이용하여 (15)의 형태를 구하면 다음이 된다.

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 - \alpha(1 + n \cos q_1) \sin \omega t \\ n \alpha \sin q_1 \sin \omega t (-q_2 + n \alpha \cos q_1 \sin \omega t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

이제,  $\tau = \omega t$ ,  $\varepsilon = 1/\omega$ 의 느린 시간에서 상태변수  $q(t) = z(\tau)$ 을 도입하면 (27)은

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(\tau) &= \varepsilon [z_2 - \alpha(1 + n \cos z_1) \sin \tau] \\ \dot{z}_2(\tau) &= \varepsilon n \alpha \sin z_1 \sin \tau (-z_2 + n \alpha \cos z_1 \sin \tau) \end{aligned} \quad (28)$$

과 같이 변환된다. 최종적으로, (18)의 정의에 따라 최종

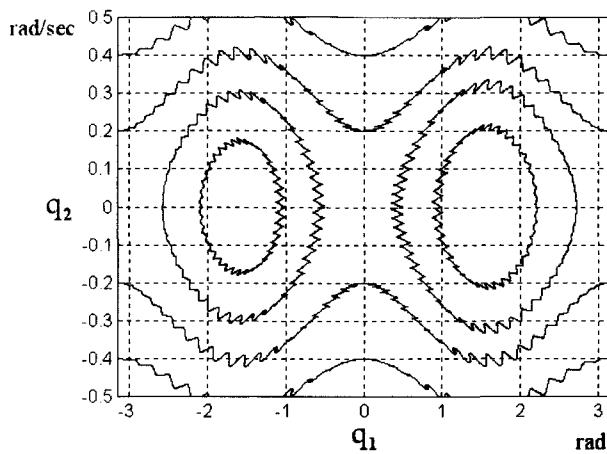


그림 2. 좌표변환된 시스템 (27)의 위상궤적( $\alpha = 0.5$ ,  $\omega = 4\pi$ ).

Fig. 2. Trajectories of transformed system (27) ( $\alpha = 0.5$ ,  $\omega = 4\pi$ ).

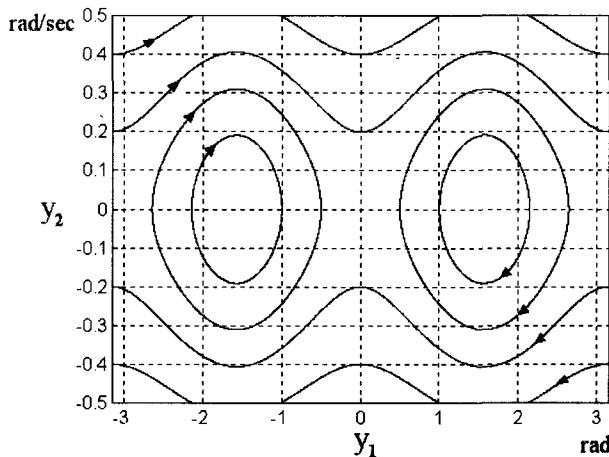


그림 3. 평균화된 시스템 (29)의 위상궤적( $\alpha = 0.5$ ,  $\omega = 4\pi$ ).

Fig. 3. Phase portrait of averaged system (29) ( $\alpha = 0.5$ ,  $\omega = 4\pi$ ).

적인 평균화된 시불변시스템이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \varepsilon y_2 \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon \frac{n^2 \alpha^2}{4} \sin 2y_1 \end{aligned} \quad (29)$$

### 1. 예비 시뮬레이션

본 절에서는 진동입력의 진폭과 주파수를 결정하기 위해서 먼저 2R 머니풀레이터 시스템이 어떠한 동특성을 갖는가를 간략히 조사한다. 그림 2는 진폭  $\alpha = 0.5$ , 주파수  $\omega = 4\pi$  일 때 좌표변환된 시스템 (27)의 다양한 초기조건에 대한 궤적들을 보이고 있고, 그림 3은 동일한 진동에 대해서 평균화된 시스템 (29)의 위상궤적을 보이고 있다. 시스템들의 정성적 성질이 매우 유사함을 알 수 있다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 자유관절의 진동은 두 가지 성분으로 구성되어 있다. 즉, 가진입력과 같은 주파수의 빠른 성분과 주기성의 느린 성분이 복합되어 나

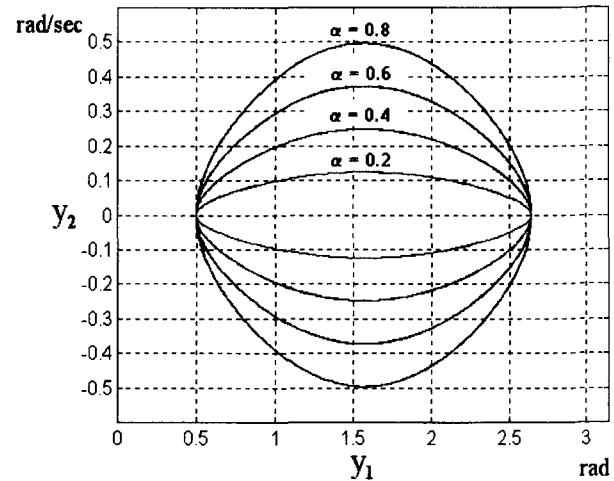


그림 4. 시불변시스템 (29)의  $\alpha$  변화에 따른 궤적비교( $\omega = 4\pi$ ).

Fig. 4. Trajectory comparison with different  $\alpha$ 's of system (29) ( $\omega = 4\pi$ ).

타나고 있다.

그림 4는 진동입력의 주파수가  $\omega = 4\pi$ 로 일정하고 초기위치가  $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = (0.5, 0)$ 일 때, 서로 다른 진폭에 대한 평균화된 시스템의 궤적변화를 보여주고 있는데, 진폭을 변화시킴으로써 상태공간상에서 원하는 위치를 통과하는 궤적을 따라 움직임을 알 수 있다.

시뮬레이션 결과를 요약하면 주기입력의 주파수를 충분히 크게하면 즉,  $\varepsilon$ 을 충분히 작게 하면, 평균화된 시불변 시스템의 궤적이 시변 시스템의 궤적을 충분히 근사할 수 있음을 알 수 있으며, 주파수가 상대적으로 크고 작은 (29)의 궤적을 따르는 시간에 영향을 미치지 않는다는 점이다.

### 2. 제어전략

이 절에서는 IV-1절에서의 시뮬레이션 결과를 바탕으로 다음과 같은 제어전략을 구상한다. 평균화된 시불변 시스템의 특성은 (29)에서와 같이 진폭  $\alpha$ 에만 관련되어 있으므로, 상태공간상에서의 통과하여야 할 점이 주어지면 진폭  $\alpha$ 를 계산함으로써 이를 만족시킬 수 있다. 반면에 가진입력의 주파수의 증가는 (22b)에서 알 수 있듯이 각 변위의 진폭을 상대적으로 줄이게 되어, 세밀한 접근이 가능하므로 목표위치로부터 일정거리가 남았을 경우에는 주파수를 높여줌으로써 정확한 위치에 도달하게 할 수 있다. 이 때, 진폭  $\alpha$  및 진동수  $\omega$ 의 조절은 항상 주기입력의 주기가 끝났을 때 바꾸어 주어야 한다. 왜냐하면, 능동관절이 주기입력의 주기가 끝났을 경우에만 능동관절이 원하는 위치로 되돌아 오기 때문이다. 본 논문에서는 자유관절의 초기위치가  $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = (0.5, 0)$ 이고, 원하는 목표위치가  $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = (1.0, 0)$ 이라고 가정한다. 이와 같은 조건으로 다음과 같은 제어전략을 세울 수 있다. 그림 5와 같이 임의의 주파수  $\omega_1$ 와 진폭  $\alpha_1$ 으로써 가진한다. 이후  $\theta_2$ 가  $\pi/2$ 에 이르렀을 때 그리고  $\theta_1$ 은 한 주기가 끝났을 때 시스템이 낼 수 있는 최대의 진폭으로 변경한다.

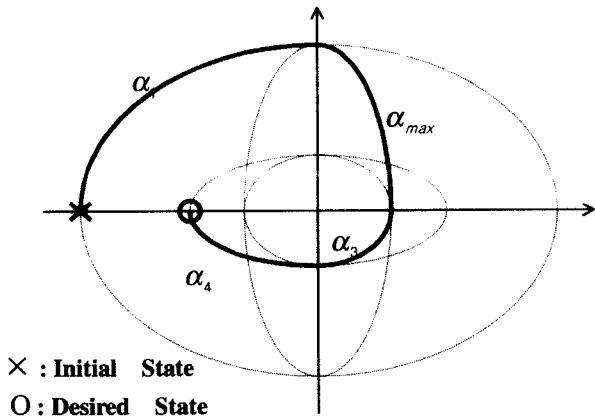
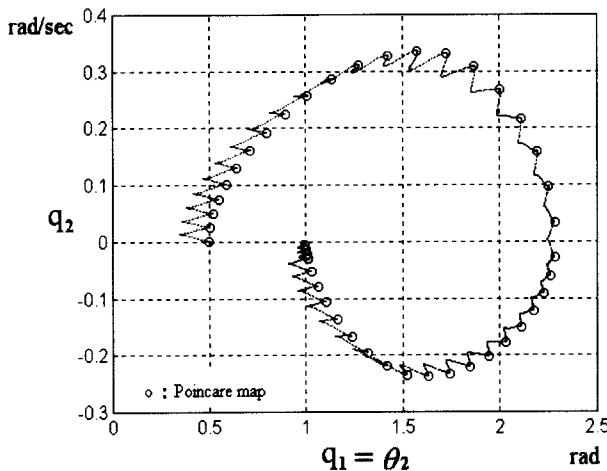


그림 5. 제어전략.

Fig. 5. Control strategy.

그림 6. 가진제어되는 자유관절의 위상궤적: 초기상태(0.5, 0), 최종상태(1.0, 0)  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_{\max} = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 4\pi$ ,  $\omega_2 = 8\pi$ .Fig. 6. Phase portrait of the free joint which is vibrationally controlled: Initial state (0.5, 0), final state (1.0, 0)  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_{\max} = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 4\pi$ ,  $\omega_2 = 8\pi$ .

즉,  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{\max}$ 으로 스위칭한다. 최대진폭으로 가진하는 이유는 자유관절을 옮기는데 걸리는 시간을 가능하면 짧게 하기 위해서이다. 그런 후에  $\theta_2$ 가 다시 그 전의 값  $\alpha_1$ 보다 작으면 즉, 궤적이 상태공간에서 수평축을 가로지르게 되면, 다시 진폭을 처음의 진폭 보다 작게 잡는다. 즉  $\alpha_{\max} \rightarrow \alpha_3$ 으로 스위칭한다. 마지막으로  $\theta_2$ 가 다시  $\pi/2$  지점을 만났을 때, 목표위치까지 적절한 진폭으로 계속해서 변화시켜 준다. 이러한 진폭조절은 (29)로부터 유도되어 진다. 즉, (29)의 양변을 적분하면

$$\frac{n^2 \alpha^2}{2} \cos^2 y_1 + y_2^2 = \frac{n^2 \alpha^2}{2} \cos^2 y_{1d} + y_{2d}^2 \quad (30)$$

의 관계가 얻어진다. 여기서,  $[y_{1d} \ y_{2d}]^T$ 는 목표상태를 나타낸다. (30)에서 현재의 위치와 목표위치를 대입함으로써 원하는 진폭  $\alpha$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

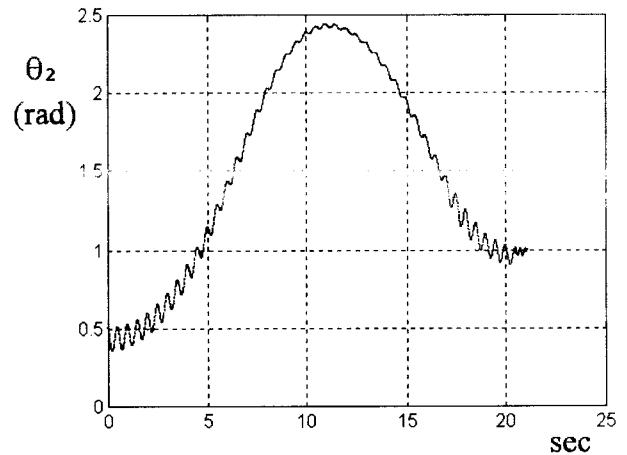
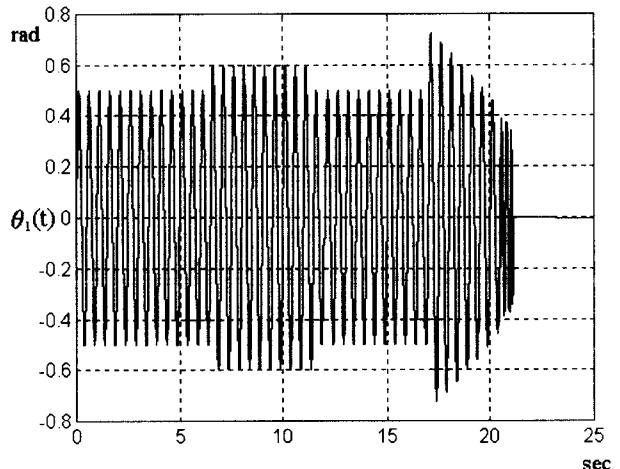
그림 7. 자유관절의 운동( $0.5 \rightarrow 1.0$ ):  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_{\max} = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 4\pi$ ,  $\omega_2 = 8\pi$ .Fig. 7. Motion of the free joint ( $0.5 \rightarrow 1.0$ ):  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_{\max} = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 4\pi$ ,  $\omega_2 = 8\pi$ .

그림 8. 첫번째 관절의 주기 진동.

Fig. 8. Periodic vibrations of the first joint.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(y_{1d}^2 - y_{2d}^2)}{n^2(\cos^2 y_{1d} - \cos^2 y_1)}} \quad (31)$$

주파수를 증가시킬수록 Poincare map의 변화는 더디어진다는 것이 그림 6에서 잘 나타나고 있다. 목표위치부근에 왔을 때 주파수를 증가( $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ )시켜 주어야 하는 이유는 만약 목표위치를 통과하였을 경우에는 처음과 같은 방법으로 일 순회를 다시 하여야 하기 때문이다. 따라서 원하는 목표위치 전방에서 충분히 진동수를 증가시킴으로써 목표위치까지 세밀하게 접근하여 원하는 위치를 지나지 않게 하여야 한다. 그림 6은 위와 같은 제어전략을 따라 시뮬레이션한 것이다. 그림 7은 가진제어되는 자유관절의 운동을 보이고 있고, 그림 8은 그 때의 제어입력, 즉 첫 번째 관절의 주기운동을 보이고 있다.

## V. 결론

본 논문은 작동기가 부착되지 않은 관절을 가진 비구

동관절시스템의 가진체어에 대한 연구이다. 가진체어는 평균값이 영인 고주파의 진동입력을 시스템에 포함으로써 시스템의 동특성이 정성적으로 변화하도록 하는 체어기법으로서 전통적인 제어기법이 적용 불가능한 경우 및 센서결합 등으로 인하여 되먹임 체어가 불가능할 경우 등에 좋은 대안이 된다. 능동관절을 부분 되먹임 선형화를 적용하여 원하는 위치로 움직이고 난 뒤, 이 능동관절에 주기적인 진동을 포함으로써 남아있는 자유관절을 원하는 위치에 점근적으로 도달하도록 제어하였다. 또한, 상미분방정식의 평균화기법을 입력의 미분항이 포함된 시스템으로 확장하였으며, 이를 비구동관절시스템에 적용하여 평균화된 시스템을 구하는 체계적인 방법을 제시하였다. 가진체어의 예로서 선형제어가 불가능한 평면 2R 머니퓰레이터에 적용하였으며, 체계적으로 평균화된 시스템을 구하는 방법을 제시하고, 입력진동의 진폭과 주파수를 구하는 방법을 구체적으로 제시하였다.

### 참고문헌

- [1] H. Arai and S. Tachi, "Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 528-534, 1991.
- [2] H. Arai, K. Tanie and S. Tachi, "Dynamic control of a manipulator with passive joints in operational space," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 9, no. 1, pp. 85-93, 1993.
- [3] J. Baillieul and B. Lehman, "Open-loop control using oscillatory inputs," *CRC The Control Handbook*, vol. II, pp. 967-980, 1996.
- [4] R. Bellman, J. Bentsman and S. M. Meerkov, "Vibrational control of nonlinear systems: vibrational stabilizability," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, 710-716, 1986.
- [5] R. Bellman, J. Bentsman and S. M. Meerkov, "Vibrational control of nonlinear systems: vibrational controllability and transient behavior," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, 717-724, 1986.
- [6] J. Bentsman and K. S. Hong, "Vibrational stabilization of nonlinear parabolic systems with neumann boundary condition," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, no. 4, pp. 501-507, 1991.
- [7] J. Bentsman, K. S. Hong and J. Fakhfakh, "Vibrational control of nonlinear time lag systems: vibrational stabilization and transient behavior," *Automatica*, vol. 27, no. 3, pp. 491-500, 1991.
- [8] J. Bentsman and K. S. Hong, "Transient behavior analysis of vibrationally controlled nonlinear parabolic systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 38, pp. 1603-1607, 1993.
- [9] M. Bergerman and Y. Xu, "Optimal control for underactuated manipulators," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3714-3719, 1996.
- [10] N. N. Bogolyubov and Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, 2nd Ed., Gordon & Breach Publishers, New York, 1961.
- [11] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] K. S. Hong and J. Bentsman, "Stability criterion for linear oscillatory parabolic systems," *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 114, no. 1, pp. 175-178, 1992.
- [13] B. Lehman, J. Bentsman, S. V. Lunel and E. I. Verriest, "Vibrational control of nonlinear time lag systems with bounded delays: averaging theory, stabilizability, and transient behavior," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, pp. 898-912, 1994.
- [14] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo, "Stabilization of underactuated robot: theory and experiments for a planar 2R manipulator," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3274-3280, 1997.
- [15] S. M. Meerkov, "Principle of vibrational control: theory and applications," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 25, pp. 755-762, 1980.
- [16] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1994.
- [17] J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical System*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [18] H. J. Sussmann, "A general theorem on local controllability," *SIAM J. on Control and Optimization*, vol. 25, pp. 158-194, 1987.
- [19] T. Suzuki, and Y. Nakamura, "Chaos and nonlinear control of a nonholonomic free-joint manipulator," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 2668-2693, 1996.
- [20] T. Suzuki, and Y. Nakamura, "Control of manipulators with free-joints via the averaging method," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2998-3005, 1997.

### 부록

아래의 정리는 시변시스템 (17)과 시불변시스템 (18) 사이의 관계를 기술한다.

평균화 정리[11]: 표준형의 시스템 (17)을 고려하자. 다음의 결과들이 얻어진다.

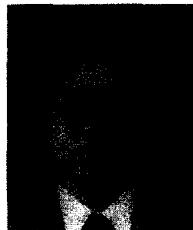
i)  $C^r, r \geq 2$ 인 좌표변환  $z = y + \varepsilon \omega(y, t, \varepsilon)$ 이 존재하고, 이러한 좌표변환을 통하여 (17)은 다음과 같이 변환된다.

$$y = \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon)$$

여기서  $f_1$ 은 시간  $t$ 에 대하여 주기함수이다.

(ii) 초기시간  $t = 0$ 에서 초기값  $z(0) = z_0$ ,  $y(0) = y_0$ 가  $\|z_0 - y_0\| = O(\varepsilon)$ 의 관계를 만족할 때 (17)과 (18)의 해

$z(t)$ 와  $y(t)$ 는 시간구간  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ 에서  $\|z(t) - y(t)\| = O(\varepsilon)$ 의 관계를 만족한다.



### 홍준식

1957년 8월 25일생. 1975-1979 서울대학교 기계설계학과(공학사). 1985년 8월-1987년 1월 Columbia University (New York) 기계공학과(공학석사). 1990년 6월-1991년 1월 University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC) 응용수학과(이학석사). 1987년 1월-1991년 8월 UIUC 기계공학과(공학박사). 1991년 8월-1992년 8월 UIUC 기계공학과 Postdoctoral Fellow. 1979년-1982년 군복무(포병). 1982년-1985년 대우중공업(인천) 기술연구소 근무. 1993년-현재 부산대학교 공과대학 전임강사, 조교수, 부교수. 관심분야는 시스템이론, 적응제어, 비선형제어, 분포계수시스템의 제어.



### 양경진

1969년 2월 10일생. 1987년-1994년 부산대학교 기계공학과 (공학사). 1989년-1991년 군복무(국방부 의장대대). 1994년-1995년 쌍용정유(울산) 근무. 1996년-1998년 부산대학교 대학원(공학석사). 1998년-현재 동대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 적응제어, 분포계수시스템의 제어, 차량시스템의 비선형제어.