

# 고차 시스템을 위한 근궤적을 따르는 시변 슬라이딩 모드

## Time-Varying Sliding Mode Following Root Locus for Higher-Order Systems

김 가 규, 최 봉 열  
(Ga-Gue Kim, and Bong-Yeol Choi)

**Abstract** : In this paper, we present a new time-varying sliding surface to achieve fast and robust tracking of higher-order uncertain systems. The surface passes through an initial error, and afterwards, it moves towards a predetermined target surface by means of a variable named by sliding surface gain and its intercept. Specifically, the sliding surface gain is determined so that its initial value can minimize a shifting distance of the surface, and that the system roots in sliding mode can follow certain stable trajectories. The designed sliding mode control forces the system errors to stay always on the proposed surface from the beginning. By this means, the system remains insensitive to system uncertainties and disturbances for the whole time. To illustrate the effectiveness of the proposed method, the comparative study with conventional time-invariant sliding mode control is performed.

**Keywords** : time-varying sliding mode, root locus, sliding surface gain

### I. 서론

최근 비선형 시스템을 포함한 여러 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어의 이론과 응용에 많은 연구가 수행되어 왔다[1]-[8]. 슬라이딩 모드 제어는 기본적으로 슬라이딩 평면이라는 흡입 평면 위로 상태 또는 오차를 도달시켜 이후에는 항상 그 평면 위에 머물도록 함으로써 시스템 불확실성과 외란에 둔감하도록 하는 제어 기법이다.

그러나 현실적인 추적은 오차가 슬라이딩 평면에 도달한 이후에만 보장되며 도달 모드 동안에는 견실성을 보장할 수 없다. 과거 초기조건을 고려하지 않고 설계된 전형적인 시불변 슬라이딩 평면을 보면 초기에 얼마간은 이러한 도달 모드로 인해 슬라이딩 모드의 장점을 얻을 수 없었다. 좀 더 엄격히 말하면 슬라이딩 평면 도달 시간은 초기조건에 따라 달라진다. 만약 초기 오차에 근접하게 슬라이딩 평면이 설계된다면 도달 시간을 어느 정도 줄일 수 있어 견실성을 높일 수 있으나 일반적으로 볼 때 슬라이딩 모드에서의 응답은 느려지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 초기의 연구에서는 큰 불연속 제어 입력을 가하는 방법이 제안되었다. 그러나 이 방법은 비록 도달 시간은 줄일 수 있으나 슬라이딩 모드에서 입력의 심한 떨림 현상으로 말미암아 실제 시스템에 적용하기 어려운 단점을 가지고 있다.

그 뒤 도달 시간을 줄이는 일련의 연구는 주로 초기 조건에 적응하는 시변 슬라이딩 평면의 설계에 치중되어 왔으며[3]-[8] 대부분 이차 시스템에 국한되어 수행되어 왔다[5]-[7]. Choi와 Park[5]는 이차 시스템에 대해 초기 오차에 적응하는 시변 슬라이딩 라인을 제안하였다. 처음에 이 라인은 주어지는 초기 오차를 지나며 이후 미리 정해진 라인을 향해서 불연속적으로 회전 또는 평행이동을 하게 된다. 여기서 제안된 방식은 기존의 시불변 슬라이딩 라인에 의한 결과에 비해 더 빠른 오차 수렴을

보여 주었으나 슬라이딩 라인의 불연속적인 순간 이동 후에는 오차점이 더 이상 라인 위에 존재하지 않음으로 최소 얼마 시간 동안 시스템은 시스템 불확실성 또는 외란에 대해 견실하지 못하게 된다[6][7]. 즉 시스템은 순간적으로 이동하는 새로운 슬라이딩 라인의 도달 모드에 있게 된다.

Bartoszewicz[6]는 Choi와 Park의 불연속적인 시변 슬라이딩 라인을 연속적인 라인으로 바꾸고 슬라이딩 모드의 존재를 보장하는 개선된 제어 입력을 제안하였다. 제안된 방식에 의해 오차는 도달 모드 없이 항상 슬라이딩 라인 위에 머물게 되어 불확실성과 외란에 둔감한 빠른 추적 성능을 보여 주었다.

그 뒤 Bartoszewicz[7]는 유계된 입력 하에서 최적의 성능을 유지하는 슬라이딩 라인의 매개변수를 구하였다. 그러나 최적의 매개변수는 오버슈트가 없는 궤적에 대해서만 유효하며 실제 실험에서는 초기 오차에 따라서 오버슈트를 발생시키는 모순이 나타날 수 있다.

상기 논문들의 공통적인 문제점은 슬라이딩 라인이 절편을 가지는 평행이동 구간에서는 오차 수렴을 보장할 수 없다는 점이다. 절편을 가지는 슬라이딩 라인 위에서 운동은 평형점이 원점이 아니며 심지어 오차를 증가시키는 방향으로 운동할 수 있다[8]. 특히 Bartoszewicz[7]의 논문에서는 절편의 이동 속도와 가속도의 변화만으로 시변 슬라이딩 라인을 구현하였기 때문에 오차가 원점을 향하는 운동은 실제로 절편 이동이 끝나는 시간 이후에 기대할 수 있다. 따라서 평면의 평행이동은 가능한 한 피할 수 있어야 하고 오차의 위치에 따라 부득이한 경우에는 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면으로의 이동을 짧게 할 수 있는 설계가 허용되어야 한다.

그리고 기존의 시변 슬라이딩 평면은 주로 이차 시스템에 대해 설계되었으며 고차 시스템에 대한 이론으로 확장하기 어려운 단점을 가지고 있다. 고차 시스템으로의 확장이 힘든 원인으로서는 두가지를 제시할 수 있다. 첫번째로, 삼차 이상의 고차 시스템에 대해서는 늘어나

접수일자 : 1998. 7. 24., 수정완료 : 1999. 3. 12.

김가규 : 경북대학교 전자공학과

최봉열 : 경북대학교 전자전기공학부

는 시스템 차수에 따라서 결정되어야 할 평면의 매개변수가 많아짐에 따라 위상 평면 상의 어떤 오차점을 지나 는 평면을 유일하게 결정하기 어렵고, 두번째로, 목표 슬라이딩 평면에 이르기까지 거치게 되는 중간 슬라이딩 평면에서의 시스템 안정성을 보장할 수 있는 평면 이동 알고리즘의 설계가 어려웠다.

본 논문에서는 고차 불확실 시스템에 대한 시변 슬라이딩 평면과 슬라이딩 모드 제어기의 설계를 다룬다. 제안하는 시변 슬라이딩 평면은 슬라이딩 평면 이득(sliding surface gain)이라 불리는 매개변수와 절편의 변화를 통해서 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면을 향하도록 설계된다. 초기 슬라이딩 평면 이득은 평면 위에서의 운동이 안정하면서 초기 오차에 대해 평면의 평행이동 거리를 가장 짧게 하도록 설정되고 이로부터 초기 시간부터 항상 슬라이딩 모드가 존재하도록 절편이 생성된다. 특히, 슬라이딩 평면 이득의 변화는 슬라이딩 모드에서의 시스템 근들이 항상 어떤 안정한 궤적을 이루게 한다. 제어 입력은 오차가 초기 시간부터 항상 변화하는 평면 위에 머물도록 설계되며 이것은 Lyapunov 함수를 이용해 증명된다. 시뮬레이션을 통하여 기존의 시불변 선형 슬라이딩 평면을 이용한 슬라이딩 모드 제어와 비교함으로써 제안한 방식의 타당성을 확인한다.

II. 문제 제기

다음과 같이 표현되는  $n$ 차 제어 가능 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^m [1 + \delta_i(t)] f_i(x, t) + b(x, t)u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in \mathbb{R}^n$ 는  $n$ 개의 상태를 포함하는 상태벡터,  $u \in \mathbb{R}$ 는 제어 입력,  $\delta_i(t)$ 는 플랜트의 불확실성,  $f_i(x, t)$ 는 시간과 시스템 상태로 구성되는 기지의 함수,  $d(t)$ 는 외란을 나타낸다.

본 논문에서 다루는 제어 문제는  $x_1(t)$ 가 연속 시간 함수  $x_d(t)$ 를 추적하도록 하는 것이다. 이를 위해 다음과 같은 형태의 추적 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_1(t) \ e_2(t) \ \dots \ e_n(t)]^T \\ &= [x_1(t) - x_d(t) \ x_2(t) - \dot{x}_d(t) \ \dots \ x_n(t) - x_d^{(n-1)}(t)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 제어 문제는 (2)로 표현되는 추적 오차를 영으로 만드는 문제로 바꾸어 진술할 수 있다.

한편 미지의 시스템 불확실성과 외란은 다음과 같이 유계되어 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} |\delta_i(t)| &< \delta_{i\max}, \quad i=1, 2, \dots, m \\ |d(t)| &< d_{\max} \end{aligned} \quad (3)$$

시간  $t_0$ 에서 시스템의 초기 오차는 다음과 같이 가정한다.

$$e_0 = [e_1(t_0) \ e_2(t_0) \ \dots \ e_n(t_0)]^T \quad (4)$$

본 논문에서는 주어진 시스템 (1)에 대해 알려진 초기 조건 (4)를 지나면서 빠른 수렴 성능을 보장하는 시변 슬라이딩 평면을 설계하고 그에 따른 슬라이딩 모드 제어기를 얻는다. 이를 위해 기존 시변 슬라이딩 평면 설계에서 나타나는 다음과 같은 난제를 극복하고자 한다.

- a) 삼차 이상의 고차 시스템에 대해 위상 평면 상의 어떤 오차점을 지나 는 평면을 유일하게 결정할 수 있어야 한다.
- b) 목표 슬라이딩 평면에 이르기까지 거치게 되는 중간 슬라이딩 평면에서의 운동이 안정할 수 있도록 설계 되어야 한다.
- c) 오차 수렴을 보장하지 못하는 평행이동 구간을 짧게 할 수 있는 설계가 허용되어야 한다.

III. 근계적을 따르는 시변 슬라이딩 모드

시스템을 항상 슬라이딩 모드에 있도록 하기 위해서는 초기 오차를 지나도록 슬라이딩 평면을 설계할 수 있어야 한다. 그리고 시간에 따라 변화하는 평면에서의 운동이 안정하도록 평면의 매개변수를 변화시켜야 한다. 시스템의 차수가 이차인 경우에는 위상 평면 상의 어떤 오차점을 지나 는 평면은 유일하게 결정되나 차수가 삼차 이상으로 늘어나면 결정해야할 평면의 매개변수가 많아 지면서 오차점을 지나 는 평면은 무수히 많이 존재한다. 본 논문에서는 슬라이딩 평면 이득  $\alpha$ 와 절편  $\beta$ 를 이용한 다음과 같은 새로운 시변 슬라이딩 평면을 제안한다.

$$\alpha(e, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \alpha c_{fi} e_i + e_n + \beta = 0 \quad (5)$$

여기서,  $c_{fi}$ 는 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면, 즉 방정식  $\alpha(e, 1, 0) = 0$ 의 각 계수를 나타내며 기존의 선형 슬라이딩 평면 설계에서와 같이 최종 슬라이딩 평면에 이르렀을 때 기대하는 시스템 고유치 집합으로부터 다음과 같은 절차를 통해 구해질 수 있다.

먼저 시스템 (1)로부터 다음과 같은 추적 오차 동특성을 구한다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= \sum_{i=1}^m [1 + \delta_i(t)] f_i(x, t) + b(x, t)u(t) + d(t) - \dot{x}_{dn} \end{aligned} \quad (6)$$

최종 슬라이딩 평면에 대한 선형 슬라이딩 모드에서의 오차 동특성은 (6)과 방정식  $\alpha(e, 1, 0) = 0$ 로 요약할 수 있으며 이것은 다시 다음과 같은  $n-1$ 차의 축소된 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_{fi} e_i \end{aligned} \quad (7)$$

(7)로 표현되는 시스템의 특성 다항식은 다음과 같이 나타낸다.

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} c_{fi} \lambda^{i-1} + \lambda^{n-1} \quad (8)$$

구하고자 하는 최종 슬라이딩 평면의 계수  $c_{\beta}$ 는 슬라이딩 모드에서의 시스템을 위해 요구되는 안정한 고유치 집합  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$ 을 가지도록 설계함으로써 결정될 수 있다. 일단 요구 고유치 집합으로부터 다음과 같은 또 하나의 특성 다항식을 구한다.

$$p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_i) \tag{9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} d_i \lambda^{i-1} + \lambda^{n-1}$$

이제 다항식 (8)에서의 계수  $c_{\beta}$ 는 요구 고유치 집합으로부터 얻어지는 다항식 (9)와 비교함으로써 다음과 같이 구해진다.

$$c_{\beta i} = d_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \tag{10}$$

한편 (10)을 절편이 없는 시변 슬라이딩 평면  $\sigma(e, \alpha, 0) = 0$ 에 대입하여 슬라이딩 모드에서의 시스템 특성 다항식을 구하면 다음과 같은  $\alpha$ 의 함수로 나타낸다.

$$p(\lambda, \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha c_{\beta i} \lambda^{i-1} + \lambda^{n-1} \tag{11}$$

$$= \alpha c_{\beta 1} + \alpha c_{\beta 2} \lambda + \alpha c_{\beta 3} \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}$$

다항식 (11)의 근들은 이득  $\alpha$ 에 따라 일정한 궤적을 형성하며 이 궤적에서  $\alpha=1$ 을 중심으로 안정한 근을 가지는 영역 ( $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ )이 존재한다. 따라서 슬라이딩 모드에서의 시스템을 점진적으로 안정화시키기 위해서는 시변 슬라이딩 평면 (5)의 이득  $\alpha$ 가 영역  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$  내의 값으로 제한되어야 한다.

초기 슬라이딩 평면 이득  $\alpha_0$ 는 초기에 수행되는 평면의 평행이동을 짧게 할 수 있도록 다음과 같이 오차 위상 평면의 원점을 지나는 안정한 평면 중에서 초기 오차에 대해 슬라이딩 함수치의 크기를 가장 작게 만드는 값으로 결정한다.

$$\alpha_0 = \arg \left( \min_{\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} |\sigma(e_0, \alpha, 0)| \right) \tag{12}$$

만약 (12)의 해가 유일하지 않으면 다음과 같이 최종 슬라이딩 평면에 해당하는 이득  $\alpha=1$ 에 가장 가까운 값을 새로운 초기 평면 이득으로 선택한다.

$$\arg \left( \min_{\alpha_0} |1 - \alpha_0| \right) \tag{13}$$

그리고 평면이 초기 오차를 지나도록 다음과 같은 초기 절편을 생성한다.

$$\beta_0 = -\sigma(e_0, \alpha_0, 0) \tag{14}$$

이제 시변 슬라이딩 평면은 초기 평면  $\sigma(e, \alpha_0, \beta_0) = 0$ 에서 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면  $\sigma(e, 1, 0) = 0$ 까지 변화하도록 설계되어야 한다. 다음과 같이 변화하는  $\alpha(t)$ 와  $\beta(t)$ 를 고려한다.

$$\alpha(t) = \begin{cases} A_\alpha t + \alpha_0, & t < T_1 \\ 1, & t \geq T_1 \end{cases} \tag{15}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} A_\beta t + \beta_0, & t < T_2 \\ 0, & t \geq T_2 \end{cases} \tag{16}$$

(15)와 (16)은 단위 계단 함수  $U_s(t-T)$ 를 이용해서 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$\alpha(t) = A_\alpha t + \alpha_0 - A_\alpha(t - T_1)U_s(t - T_1) \tag{17}$$

$$\beta(t) = A_\beta t + \beta_0 - A_\beta(t - T_2)U_s(t - T_2) \tag{18}$$

제안하는  $\alpha(t)$ 와  $\beta(t)$ 는 각각 초기값  $\alpha_0$ 와  $\beta_0$ 에서 등속으로 목표값 1, 0까지 변화시키는 형태이며 각각의 속도  $A_\alpha$ 와  $A_\beta$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$A_\alpha = \frac{1 - \alpha_0}{T_1} \tag{19}$$

$$A_\beta = -\frac{\beta_0}{T_2} \tag{20}$$

설계된 시변 슬라이딩 평면과 시스템 불확실성 및 외란에 대한 가정 (3)에 대해 다음과 같은 슬라이딩 모드 제어 입력을 고려한다.

$$u(t) = \frac{1}{b(x, t)} \left[ -\sum_{i=1}^n \alpha c_{\beta i} e_{i+1} - \sum_{i=1}^n f_i(x, t) + x_d^{(n)} - A_\alpha(1 - U_s(t - T_1)) \sum_{i=1}^n c_{\beta i} e_i - A_\beta(1 - U_s(t - T_2)) \right. \tag{21}$$

$$\left. - \left( \sum_{i=1}^n \delta_{i \max} |f_i(x, t)| + d_{\max} \right) \operatorname{sgn}(\sigma(e, \alpha, \beta)) \right]$$

제안한 제어 입력 (21)은 도달 모드 없이 초기 시간부터 항상 슬라이딩 모드를 유지시키며 이는 Lyapunov 함수를 이용한 도달 조건(reaching condition)으로부터 증명될 수 있다.

다음과 같은 양한정 함수(positive definite function)를 고려한다.

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2(e, \alpha, \beta) \tag{22}$$

$V(\sigma)$ 의 시간 미분값을 구하기 앞서  $\sigma(e, \alpha, \beta)$ 의 시간 미분값을 구한다.

$$\dot{\sigma}(e, \alpha, \beta) = \frac{\partial \sigma}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \dot{\beta} \tag{23}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha c_{\beta i} e_{i+1} + \dot{e}_n + A_\alpha(1 - U_s(t - T_1)) \sum_{i=1}^n c_{\beta i} e_i + A_\beta(1 - U_s(t - T_2))$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha c_{\beta i} e_{i+1} + \sum_{i=1}^n [1 + \delta_i] f_i + bu + d - x_d^{(n)} + A_\alpha(1 - U_s(t - T_1)) \sum_{i=1}^n c_{\beta i} e_i + A_\beta(1 - U_s(t - T_2))$$

제안한 슬라이딩 모드 제어 입력 (21)을 (23)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma}(e, \alpha, \beta) = - \left( \sum_{i=1}^n \delta_{i \max} |f_i| + d_{\max} \right) \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$+ \left( \sum_{i=1}^m \delta_i f_i + d \right) \quad (24)$$

(24)를 이용하여  $V(\sigma)$ 는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$V(\sigma) = \sigma \dot{\sigma} = \sigma \left[ - \left( \sum_{i=1}^m \delta_{i \max} |f_i| + d_{\max} \right) \text{sgn}(\sigma) + \left( \sum_{i=1}^m \delta_i f_i + d \right) \right] < 0 \quad (25)$$

(25)는 도달 조건이 만족됨을 의미하며 또한 제안된 슬라이딩 평면은 초기 오차를 지나므로 제어 입력 (21)은 초기 시간부터 항상 슬라이딩 모드를 유지시켜 시스템 불확실성과 외란에 둔감한 높은 견실성을 제공한다.

한편 제어 입력 (21)에서 보여지는 것처럼 슬라이딩 평면 이득의 이동 속도  $A_\alpha$ 와 절편의 이동 속도  $A_\beta$ 는 제어 입력의 크기에 영향을 미친다. 만약 두 값을 크게 두어 평면을 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면으로 빨리 이동시킨다면 빠른 추적 성능을 기대할 수 있으나 제어 입력의 크기가 증가한다. 반대로 두 값을 작게 두면 추적 성능이 저하될 수 있다. 따라서 설계자는 제어 입력의 크기를 고려하여 빠른 추적 성능을 달성할 수 있도록 적절한  $A_\alpha$ 와  $A_\beta$ (또는  $T_1$ 과  $T_2$ )를 선택할 필요가 있다.

**IV. 시뮬레이션**

앞서 제안한 시변 슬라이딩 모드 제어의 타당성을 확인하기 위해 다음과 같은 4차의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i=1,2,3 \\ \dot{x}_4 &= -x_1(1 + \delta_1(t)) - 0.2x_1^2 - 4x_2 + 4.1x_1x_2 \\ &\quad - 0.7x_2^2 - 12x_3 - 0.7x_1x_3 - 2x_4 + u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 시스템 불확실성  $\delta_1(t)$ 와 외란  $d(t)$ 는 각각 다음과 같은 주기성을 가지는 형태로 가정한다.

$$\delta_1(t) = 0.1 \sin(\pi t) \quad (27)$$

$$d(t) = 0.8 \sin(\pi t) \quad (28)$$

$\delta_1(t)$ 와  $d(t)$ 에 대한 유계치는 각각  $\delta_{1 \max} = 0.1$ 과  $d_{\max} = 0.8$ 로 둔다. 추적할 기준 궤적  $x_d$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$x_d(t) = \sin(0.1\pi t) \quad (29)$$

그리고 시스템의 초기 상태는 다음과 같이 주어진다.

$$x(0) = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (30)$$

시변 슬라이딩 평면을 설계하기 위해 먼저 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면을 구한다. 슬라이딩 모드에서의 시스템이 요구 고유치 집합  $\{-3, -4, -5\}$ 을 가지도록 설계한 최종 슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$\sigma(e, 1, 0) = 60e_1 + 47e_2 + 12e_3 + e_4 = 0 \quad (31)$$

따라서 제안하는 시변 슬라이딩 평면은 다음과 같은 형

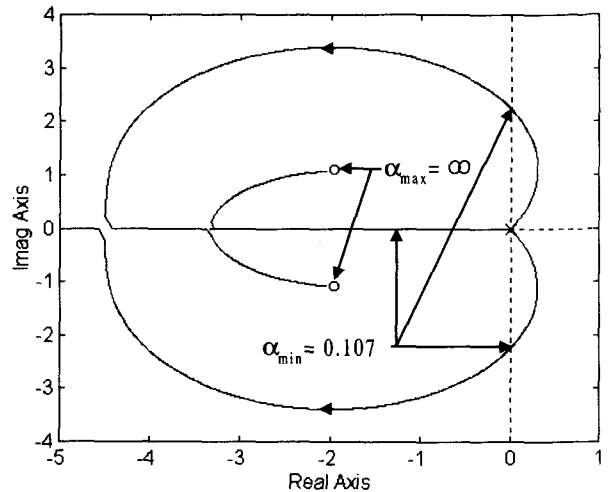


그림 1. 특성 다항식  $p(\lambda, \alpha)$ 의 근궤적.

Fig. 1. Root locus of characteristic polynomial  $p(\lambda, \alpha)$ .

태가 된다.

$$\sigma(e, \alpha, \beta) = 60\alpha e_1 + 47\alpha e_2 + 12\alpha e_3 + e_4 + \beta = 0 \quad (32)$$

$\sigma(e, \alpha, 0) = 0$ 에 대한 슬라이딩 모드에서의 시스템 특성 다항식은 다음과 같이 구해진다.

$$p(\lambda, \alpha) = 60\alpha + 47\alpha\lambda + 12\alpha\lambda^2 + \lambda^3 \quad (33)$$

그림 1은 특성 다항식 (33)에 대한 근궤적을 그린 것이고 안정한 슬라이딩 평면을 위한 평면 이득의 극한값은 각각  $\alpha_{\min} = 0.107$ 과  $\alpha_{\max} = \infty$ 로 구해진다.

초기 슬라이딩 평면 이득은 (12)에 의해  $\alpha_0 = 0.1070$ 로 구해지고 평면의 초기 절편은 (14)에 의해  $\beta_0 = 0.9069$ 로 구해진다. 실제 매개변수  $T_1$ 과  $T_2$ 는 모두 2 sec로 두었고 평면 이득과 절편의 이동 속도는 (19)와 (20)으로부터 각각  $A_\alpha = 0.4465$ ,  $A_\beta = -0.4535$ 로 구해진다.

비교를 위한 기존의 시불변 슬라이딩 평면은 다음과 같이 제안한 방식의 목표 슬라이딩 평면 (31)과 동일하게 주어진다.

$$\sigma_{conv}(e) = 60e_1 + 47e_2 + 12e_3 + e_4 = 0 \quad (34)$$

(34)에 대한 시불변 슬라이딩 모드 제어는 실험 결과 실험 시간 10초 이내에 오차가 수렴하지 않는다. 그래서 기존의 방식에 대해서는 다음과 같이 매개변수  $P$ 를 이용해 도달 모드를 가속시켜 제안한 방식과 비교를 하였다.

$$\dot{\sigma}_{conv} - P\sigma_{conv} - \left( \sum_{i=1}^m \delta_{i \max} |f_i| + d_{\max} \right) \text{sgn}(\sigma_{conv}) \quad (35)$$

실험에서 시불변 슬라이딩 모드 제어에 사용된 도달 모드 가속도는  $P = 1.0$ 으로 임의의 값을 선택하였다. 그러나 제안한 슬라이딩 모드 제어에서는  $P$ 의 채택을 받지 않는다. 실험의 표본 주기를 1000Hz로 두고 두 방식을 비교한 결과를 그림 2부터 그림 6에 나타내었다. 그림 2는 오차  $e_1$ 을 비교한 것으로 제안한 방식에 의한 추적

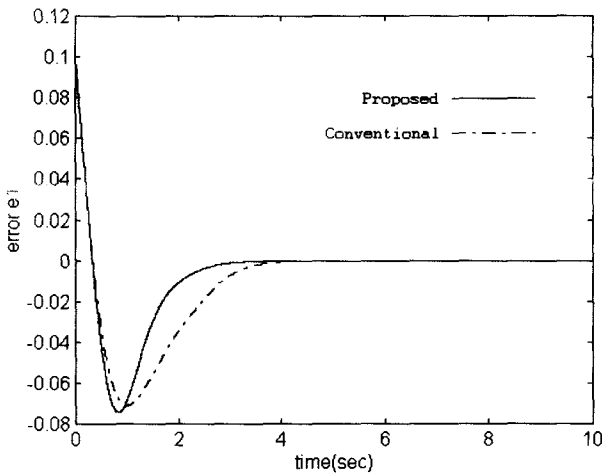


그림 2. 오차  $e_1$ .  
Fig. 2. Error  $e_1$ .

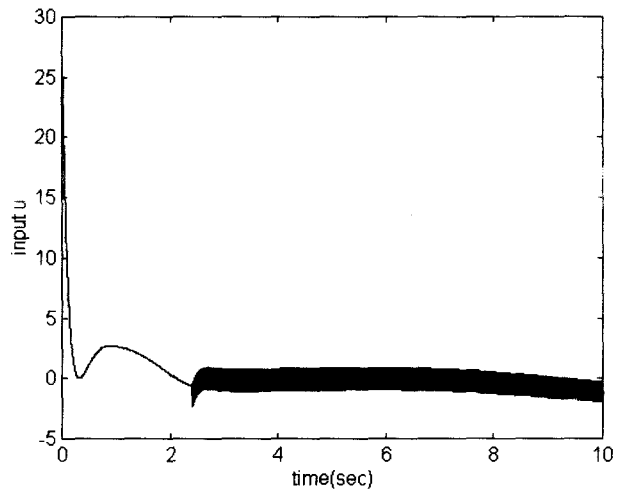


그림 5. 기존의 슬라이딩 모드 제어 입력  $u$ .  
Fig. 5. Conventional sliding mode control input  $u$ .

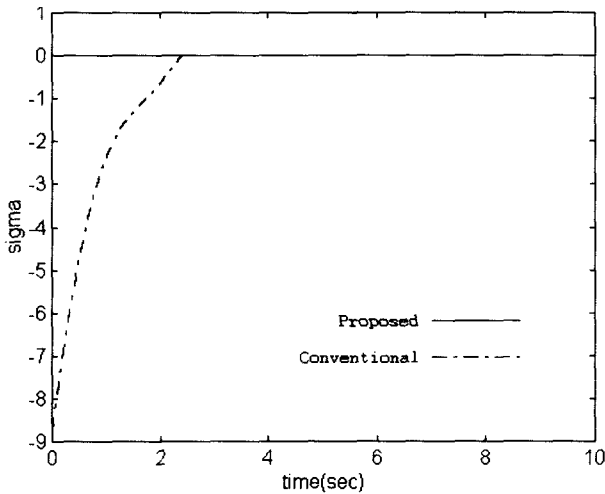


그림 3. 슬라이딩 함수치  $\sigma$ .  
Fig. 3. Sliding function value  $\sigma$ .

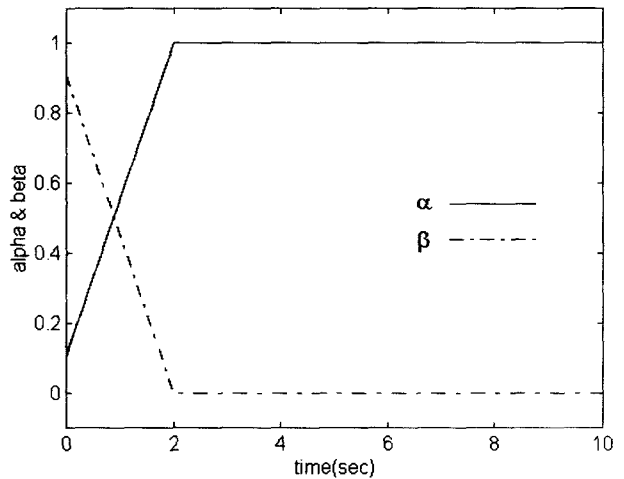


그림 6. 슬라이딩 평면 이득  $\alpha$  와  $\beta$  절편.  
Fig. 6. Sliding surface gain  $\alpha$  and intercept  $\beta$ .

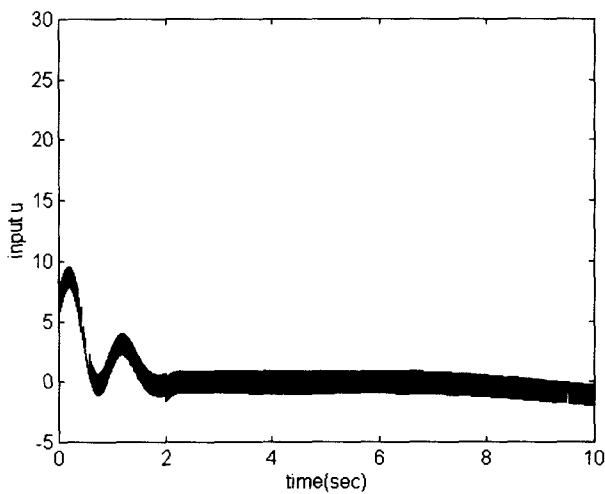


그림 4. 제안한 슬라이딩 모드 제어 입력  $u$ .  
Fig. 4. Proposed sliding mode control input  $u$ .

성능이 도달 모드가 가속되는 시불변 슬라이딩 모드 제어에 비해 우수함을 볼 수 있다. 그림 3은 슬라이딩 함수치  $\sigma$ 를 비교한 것으로 제안한 방식은 도달 모드 없이 초기 시간부터 항상 슬라이딩 모드에 있음을 보여준다. 그림 4와 그림 5는 두 방식에 대한 제어 입력  $u$ 를 비교한 것으로 도달 모드가 가속되는 시불변 슬라이딩 모드의 경우 초기에 큰 제어 입력이 소요됨을 볼 수 있다. 그리고 입력의 떨림현상이 시작되는 시간으로부터 간접적으로 슬라이딩 모드가 일어나는 시점을 추측할 수 있다. 그림 6은 제안한 시변 슬라이딩 평면의 매개변수  $\alpha$  와  $\beta$ 의 변화를 보여주고 있다. 설계에서 설정한 시간  $T_1 = T_2 = 2 \text{ sec}$  내에  $\alpha$ 는 등속도로  $\alpha_0 = 0.1070$ 에서 1까지 증가하고  $\beta$ 는  $\beta_0 = 0.9069$ 에서 0까지 등속도로 감소함을 볼 수 있다.

**V. 결론**

본 논문에서는 고차 불확실 시스템에 대해 건설하면

서도 빠른 추적을 달성하기 위한 시변 슬라이딩 평면을 설계하고 그에 따른 슬라이딩 모드 제어를 제안하였다. 제안한 평면은 슬라이딩 평면 이득과 절편을 이용하여 초기에 초기 오차를 지나면서 이후에는 목표로 하는 최종 슬라이딩 평면으로 이동된다. 특히 슬라이딩 평면 이득의 변화는 평면의 평행이동 구간을 최소화시키면서 슬라이딩 모드에서의 시스템 근들이 어떤 안정한 궤적을 형성하도록 정해진다. 시변 슬라이딩 평면에 대해 설계되는 제어 입력은 오차를 초기 시간부터 항상 평면 위에 머물도록 설계되어 시스템 불확실성과 외란에 대해 높은 견실성을 제공한다. 시뮬레이션에서 제안된 방식은 도달 모드를 가속시킨 기존의 시불변 슬라이딩 모드 제어에 비해 빠른 추적 성능을 보였다.

#### 참고문헌

- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes." *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.
- [3] J. C. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 35, pp. 1345-1350, 1983.
- [4] K. B. Park and J. J. Lee, "Variable structure controller for robotic manipulators using time-varying sliding surface," *Proc. of 1993 IEEE Conf. on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 89-93, 1993.
- [5] S. B. Choi and D. W. Park, "A time-varying sliding surface for fast and tracking control of second-order uncertain systems," *Automatica*, vol. 30, no. 5, pp. 899-904, 1994.
- [6] A. Bartoszewicz, "A comment on 'A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'," *Automatica*, vol. 31, no. 12, pp. 1893-1895, 1995.
- [7] A. Bartoszewicz, "Time-varying sliding modes for second-order systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 143, no. 5, 1996.
- [8] R. G. Roy, N. Olgac, "Robust nonlinear control via moving sliding surfaces - n-th order case," *Proc. of 1997 IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 943-948, 1997.

#### 김 가 규

제어·자동화·시스템공학 논문지 제1권, 제2호, 참조.

#### 최 봉 열

제어·자동화·시스템공학 논문지 제1권, 제2호, 참조.