

# B-스플라인 보간법에 의한 자동 경로 생성이 가능한 4절링크의 합성에 관한 연구

김진수\*, 양현익\*\*

## A Study on the Synthesis of Four-Bar Linkage Generating Automatic Path by Using B-Spline Interpolation

Jin-su Kim\*, Hyun-ik Yang\*\*

### ABSTRACT

Up until now, it is said that no satisfactory computer solutions have been found for synthesizing four-bar linkage based on the prescribed coupler link curve. In our study, an algorithm has been developed to improve the design synthesis of four-bar linkage automatically generating prescribed path by using B-spline interpolation. The suggested algorithm generates the desired coupler curve by using B-spline interpolation, and hence the generated curve approximates as closely as to the desired curve representing coupler link trajectory. Also, when comparing each generated polygon with the control polygon, rapid comparison is easily achieved by applying convex hull concept. Finally, optimization process using ADS is incorporated into the algorithm based on the 5 precision point method to reduce the total optimization process time. As for examples, three different four-bar linkages were tested and the results showed the effectiveness of the algorithm.

**Key Words** : four-bar linkage(4절 기구), B-spline interpolation(B-스플라인 보간법), 5 precision point method(5점 위치 지정법)

### 1. 서론

지난 20년간 기구 설계를 자동화하기 위한 많은 연구들이 있어 왔으며, 그 결과로 우수한 알고리즘들이 개발되어 왔다. 예를 들어, 4절 기구 설계 분야에 있어서, 링크 궤적 곡선을 다수의 불연속점들로 가능한 정확히 표현하도록 하여 링크를 합성하는 세부 절점 합성 방법(precision point synthesis)이나 커플러 링크가 특정한 궤점들이나 방향들을 포함하게 하여 전체 링크를 합성하는 방법(rigid body guidance)등과 같이 우수한 알고리즘들이 개발되어 왔다. 그러나, 꾸준히 시도되고 있는 방법으로써 링

크의 궤적을 정확히 추적하여 이를 기구합성에 적용하는 알고리즘 개발은 여전히 많은 연구를 필요로 하고 있다. 이들 중 하나가 무한 궤점을 가진 커플러 곡선을 이용하여 4절 기구를 합성하는 방법이다. 이 방법의 주안점은 단지 몇 개의 궤적을 지정하여 곡선을 추적하기보다는 목적 곡선(desired curve)과 생성 곡선(generated curve)의 형상을 가능한 전체적으로 비교하여 목적 곡선에 유사한 생성 곡선을 취하는데 있다. 이 방법에 대한 연구들은 컴퓨터가 발달하기 전에는 거의 수작업에 의존해 왔으며, 따라서 설계자들은 목적 곡선과 가장 비슷한 곡선을 찾을 때까지 Hrones and Nelson 도형<sup>(1)</sup>과

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 한양대학교 기계설계학과

같은 생성 곡선의 실제적인 모양에 의존하였다. 그러나 최근에는 실제 곡선과 실제적인 모양이 가장 유사한 생성 곡선을 찾기 위한 방법으로 B-스플라인 다각형을 이용한 방법이 krishnaswami와 Unruh<sup>(2)</sup>에 의해 제시되었다. 곡선 자체를 비교하는 것은 무한점들의 궤적에 대한 상호 비교가 되므로 알고리즘화 하기에는 비교 변수가 너무 많다고 볼 수 있으나, 하나의 조정 다각형(control polygon)은 단 하나의 곡선을 나타낸다는 점을 이용해서 곡선 자체를 비교하는 것이 아니라, 조정 다각형을 비교함으로써 비교 곡선값의 수를 줄여 알고리즘화 할 수 있었다. 하지만, Unruh와 Krishnaswami가 제시한 방법은 조정 다각형을 결정하는데 있어서 경험적인 요소가 포함되어 정형화하기 힘들고 조정 다각형의 비교에서도 많은 수의 곡선값들이 자료화되어 처리된다는 단점을 보였다.

따라서 본 연구에서는 상기한 문제점들을 보완하고자 조정 다각형을 자동적으로 결정하도록 B-스플라인 보간법<sup>(5)</sup>을 이용하고, 계산되어지는 곡선값들의 수를 감소시키기 위해 조정 다각형에 외접하는 사각형과 최소 볼록 집합(convex hull)을 도입하였다. 또한 ADS<sup>(4)</sup>를 이용한 최적화 기법을 수행하기 위해 초기값 결정을 5점 위치 지정 방법(5 precision point method)<sup>(5)</sup>을 통하여 모든 계산 절차들이 자동적으로 수행될 수 있도록 했다. 예제를 위해 세 가지의 4절 기구를 선정하여 본 연구에서 개발된 알고리즘을 적용하였고, 결과적으로 기존에 비해 상당히 적은 수의 곡선 값들을 가지고 각 기구들을 성공적으로 합성하였으며, 정밀도 또한 상대적으로 우수하게 얻을 수 있었다.<sup>(6),(7)</sup>

## 2. 커플러 곡선의 생성 및 비교 해석

### 2.1 커플러 링크 궤적 곡선 처리

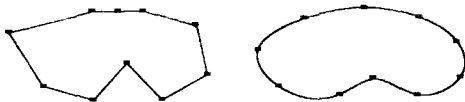


Fig. 1 General desired control polygon and curve

커플러 곡선의 일반적인 형태는 Fig. 1에서 제시한 바와 같이 곡선의 일부분이 움푹 들어간 오목 궤곡선이다. 커플러 링크의 궤적을 표현하고자 주

어진 점집합을 기본으로 Fig. 1의 좌도에서와 같이 조음 다각형을 구성하면 Fig. 1의 우도에서와 같이 합성하고자 하는 4절 기구의 커플러 링크가 그려는 궤적 곡선(오목 궤곡선)이 얻어 진다.

뒤에 다시 선언하겠지만, 링크 길이를 최적화 하기 위한 초기값을 선정하는데 있어 가장 적절히 적용할 수 있는 5점 위치 지정 방법(5 precision point method)을 고려하여 본 연구에서는 커플러 링크의 궤적 곡선을 표현하는 조정 다각형의 꼭지점의 수를 10개로 한정하였다.

### 2.2 조정 다각형의 표현

점 데이터들의 집합을  $\{Q_k\}$ 라 하고, 이러한 점들을 가지고 p차 B-스플라인 곡선을 보간하려고 한다면, 그 기준이 되는 방정식은 선형 대수 방정식이 된다. 이것은 식(1)과 같이 표현된다.

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^p N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \quad (1)$$

where

$P_i$  : (n+1) control points

$U = \{u_0, \dots, u_m\}$  : knot vector

$N_{i,p}$  : basis function

조정 다각형은 매듭값에 의해 표현되는데 이러한 매듭값들을 결정하기 위해서는 주어진 2차원의 점 데이터를 1차원으로 매핑을 해야 하는데 이러한 매핑 방법을 매개변수화라고 한다. 본 연구에서는 식(2)에 나타난 바와 같이 매개변수화의 방법으로 현길이법(chord length method)이 사용되었다.

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}|$$

$$\bar{u}_0 = 0, \bar{u}_n = 1, \bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} \quad (2)$$

$k=1, \dots, n-1$

where

d : total chord length

$Q_k$  : curve points at  $\bar{u}_k$

식(2)와 같은 방법으로 구해진 매개변수를 통해 매듭값을 계산할 수 있으며, 본 연구에서는 매듭값을 구하는 방법으로 식(3)에 나타난 바와 같은 평균법(averaging method)이 사용되었다.

$$u_0 = \dots = u_p = 0, u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} u_i, j=1, \dots, n-p \quad (3)$$

where

$u_j$  : knots

$p$  : order of curve

$n$  : number of points

$m$  : number of knots

상기한 바와 같이 매듭값이 결정되면 이를 통해 조정점들을 계산할 수 있다. 식(2)에서 구한 매개변수를 식(3)에 대입하여 매듭값을 계산할 수 있는데, 식(1)의 모든 항의 값은 양수이고,  $|i-k| \geq p$ 일 때  $N_{i,p}(\bar{u}_k) = 0$ 이 되므로 좌변의 첫번째 항은  $p$ 보다 작은 반대역폭을 가지는 행렬이 되며, 최종적으로 가우스 소거법을 통해 해를 구하면 조정점의 값들을 결정할 수 있으며, 이렇게 구한 조정점들을 직선으로 연결하면 조정다각형이 된다.

### 2.3 스플라인 곡선

2.2절에서 구한 매듭값을 이용하여 기초함수(basis function)를 결정하면 B-스플라인 곡선을 얻을 수 있다. 아래의 식(4)는 B-스플라인 곡선을 구하기 위한 함수이다.

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad a \leq u \leq b \quad (4)$$

where

$\{P_i\}$  : control points

$a, b$  : lower and upper bound of knot

knot vector :  $\{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\}$

assumption :  $a=0, b=1$

위의 식(4)로부터 결정되는 B-스플라인 곡선을 표현하는 함수는  $(n+1) \times (n+1)$  크기의 행렬을 포함하는 시스템 방정식  $Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i$ 이다. 여기서 한가지 주의해야 할 점은 시작점과 끝점에서의 미분값이 일치해야 폐곡선에 침점(cusp)이 생기지 않는다는 것이다. 본 연구에서 취급하는 곡선은 폐곡선이므로, 시작점과 끝점의 위치가 동일하여 침점 발생을 방지하기 위해서는 이 위치에서의 시작점과 끝점의 미분값이 일치해야만 한다. 따라서 침점이 없는 B-스플라인 곡선을 구하기 위해 시작점과 끝점에서의 미분값에 대한 정보를 포함하는 식들을 시스템 방정식인 식(1)에 포함시킨다. 결과적으로 앞의 식(1), (3)은 식(5)로써 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n+p} N_{i,p}(u) P_i$$

$$u_0 = \dots = u_p = 0, \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{j+p+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n+p} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i, \quad j=0, \dots, n-p+1$$

additional terms, (5)

$$-P_0 + P_1 = \frac{u_{p+1}}{p} D_0,$$

$$-P_{n+1} + P_{n+2} = \frac{1-u_{m-p-1}}{p} D_n$$

where

$D_k$  :  $k$ -th derivative value

그러므로 시스템 방정식인 식(1)에 시작점과 끝점에서의 미분값에 대한 정보를 포함하는 2개의 항이 더해져서, B-스플라인 곡선은  $(n+3) \times (n+3)$ 의 대역폭을 가지는 선형 시스템 방정식이 된다.

### 2.4 외접 사각형

2.2절에서 구해진 조정점들을 직선으로 연결하면 다각형이 형성되는데 이 때 생기는 다각형을 조정 다각형이라 한다. 전술한 바와 같이 본 연구에서 생성되는 조정 다각형은 10각형이므로 조정 다각형을 직접 비교하는 것은 고려되는 설계변수들이 비교적 많기 때문에 이 조정 다각형에 외접하는 사각형을 구하여 설계변수가 상대적으로 적은 외접 사각형을 비교함으로써 계산량을 훨씬 줄일 수 있다. 이러한 조정 다각형에 외접하는 사각형을 구하기 위해서는, 우선 조정 다각형의 10개의 꼭지점 중 x방향으로의 최대값과 최소값을 갖는 두 개의 점을 찾고, 같은 방법으로 y방향으로의 최대값과 최소값을 갖는 두 개의 점을 찾으면 되는데, 이 4개의 점을 결정하기 위해서 정렬(sort)알고리즘이 사용된다. 상기한 방법으로 구해진 외접 사각형을 Fig. 2에서 표현하였다.

구해진 외접 사각형을 비교하는 방법으로 대각선의 중점을 비교하는 방법이 쓰였다. 외접 사각형의 대각선의 중점 C는 Fig. 2의 점 1과 점 3을 잇는 대각선으로부터 구해진다. Fig.3의 중점 C는 사각형의 4개의 꼭지점의 정보를 모두 포함하고 있으므로 이 중점을 비교하는 것은 사각형의 4개의 꼭지점을 모두 비교하는 것과 같은 결과를 얻는다. 이러한 방법을 통해 구해진 중점 C는 목적 곡선을 표현하는 조정 다각형(목적 조정 다각형)과 생성 곡

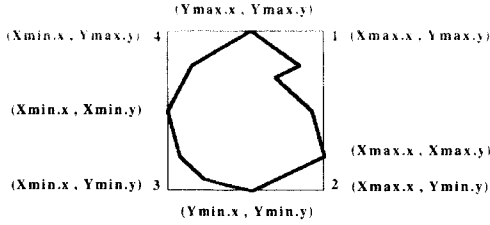


Fig. 2 The vertices coordinates of the rectangle

선에 의해 생성되는 조정 다각형(생성 조정 다각형)을 비교하는 하나의 척도가 된다. 목적 조정 다각형에 외접하는 사각형의 대각선의 중점( $C_d$ )와 생성 조정 다각형에 외접하는 사각형의 대각선의 중점( $C_g$ )사이의 거리를 비교하여 오차 범위 내의 모든 생성 조정 다각형을 선택한다. 하지만  $C_d$ 와  $C_g$ 사이의 거리만을 비교의 척도로 삼으면 최적의 곡선을 얻을 수 없다. 왜냐하면, 조정 다각형의 크기나 위치가 비슷할 지라도 조정 다각형의 각 꼭지점의 배치상황에 따라 곡선 모양의 변화정도가 심하게 나타나는데 이는 대각선의 중점이 조정 다각형의 각 꼭지점들의 배치상황을 전부 표현할 수 없기 때문이다. 따라서 더 정확한 비교를 위해 조정 다각형의 면적을 비교하는 알고리즘을 추가하였다.

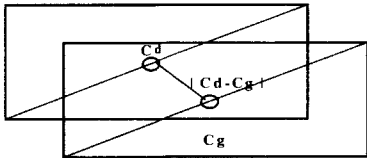


Fig. 3 Explanation of  $C_d$  and  $C_g$

### 2.5 조정 다각형의 면적

조정 다각형의 면적을 구하기 위해 2.4절에서 구한 외접 사각형을 이용한다. 조정 다각형의 면적은 아래의 Fig. 4에 나타난 것처럼 외접 사각형의 면적에서 굵은 점선으로 구분된 삼각형의 면적을 빼서 최소 볼록 집합(convex hull)의 면적을 구한 다음, 오목점을 포함하는 삼각형의 면적(가는 점선으로 구분된 삼각형)을 빼면 구할 수 있다. 여기서 조정 다각형에 외접하는 사각형과 최소 볼록 집합 및 조정 다각형의 면적은 각각 목적 곡선에 가장 잘 부합하는 생성 곡선을 찾기 위한 비교의 기준으로

각 최적화 기법의 구속조건의 역할을 하게 된다.

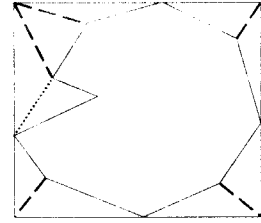


Fig. 4 The area of the control polygon

### 2.6 5점 위치 지정 방법

생성 곡선은 알고리즘 수행 과정에서 고려되는 4절 기구의 커플러 곡선이므로 생성 곡선을 찾기 위해서는 우선 링크의 길이를 초기화할 필요가 있는데, 이를 위해 위치 지정 방법을 도입했다. 현재까지 정확한 해를 얻을 수 있는 것은 각각 2, 3, 4, 5점 위치 지정 방법들이다. 이중

2, 3, 4점 위치 지정 방법들은 아래의 Table 1에 나타난 것처럼 사용자가 임의로 정해야만 하는 스칼라들이 있지만 5점 위치 지정 방법은 임의로 정해야 하는 스칼라가 없기 때문에 자동 설계에 가장 잘 부합되는 방법이라고 할 수 있다. Table 1은 각각의 위치 지정 방법에 따른 미지수의 개수와 방정식의 수, 그리고 해의 개수, 그리고 임의로 정해야 하는 스칼라의 수 등을 나타내고 있다.

Table 1 Maximum number of solutions for the unknown dyad  $W, Z$

when  $\alpha_j, \delta_j$  are prescribed in the equation :

$$W(e^{i\beta} - 1) + Z(e^{i\alpha} - 1) = \delta_j$$

No. of Positions (n) : $j = 2, 3, \dots, n$	No. of scalar equations	No. of scalar unknowns	No. of free choices (scalars)	No. of Solutions
2	2	$5(W, Z, \beta_2)$	3	$O(\infty^3)$
3	4	$6(\uparrow + \beta_3)$	2	$O(\infty^2)$
4	6	$7(\uparrow + \beta_4)$	1	$O(\infty)$
5	8	$8(\uparrow + \beta_5)$	0	finite

## 3. 최적화 기법

### 3.1 목적함수와 구속조건

최적화 기법을 적용하기 위해 먼저 해야 할 일은 목적함수와 구속조건을 찾는 것이다. 아래의

Table 2에 나타난 바와 같이 본 알고리즘에서의 목적함수는 생성 곡선의 10개의 점과 목적 곡선의 10개의 점의 거리를 비교하여 거리의 차이가 가장 큰 점을 선택하여 이 거리를 최소화하는 것이다. 그리고 조정 다각형에 외접하는 사각형의 대각선의 중점 사이의 거리와 사각형의 변적의 차이, 조정 다각형의 변적의 차이가 일정한 오차 범위 내에 포함되어야 한다는 것이 구속조건이다.

Table 2 Cost function and constraints of the optimal design

Objective Function:  $\min[\max(|DPoint[i] - GPoint[i]|)]$   
 Constraints:  $|C_d - C_g| < error_{center}$   
 $|RectArea_d - RectArea_g| < error_{rect}$   
 $|PolArea_d - PolArea_g| < error_{pol}$

where

$DPoint[i]$ : control points of desired curve  
 $GPoint[i]$ : control points of generated curve  
 $C_d$ : center of desired diagonal line  
 $C_g$ : center of generated diagonal line  
 $RectArea_d$ : area of desired rectangle  
 $RectArea_g$ : area of generated rectangle  
 $PolArea_d$ : area of desired control polygon  
 $PolArea_g$ : area of generated control polygon  
 $error_{center}$ : error boundary of center points  
 $error_{rect}$ : error boundary of rectangle  
 $error_{pol}$ : error boundary of control polygon

### 3.2 초기값 선정

최적화 기법을 적용하기 위해 맨 처음 수행해야 할 것은 링크 길이를 초기화하는 일이다. 본 연구에서는 초기값을 선정하기 위해 임의의 스칼라를 지정할 필요가 없는 5점 위치 지정방법을 이용했다.

### 3.3 연속 선형 프로그래밍 기법

많은 공학적 해석과 설계에서 설계변수가 비선형인 것들이 존재한다. 그러나 대다수가 선형화 가능하고, 따라서 선형 프로그래밍 기법으로 해석이 가능하다. 이러한 기법들 중, 비선형인 설계변수들을 테일러 급수를 사용해서 선형화하는 방법이 연속 선형 프로그래밍 기법이다. Table 3은 연속 선형

프로그래밍 기법에서의 목적 함수와 구속 조건들을 나타내고 있다.

Table 3 Objective function and constraints in sequential linear programming.

Minimize  $F(x) \approx F(x^0) + \nabla F(x^0) \delta x$   
 Subject to  $g_j(x) \approx g_j(x^0) + \nabla g_j(x^0) \delta x$   
 $h_k(x) \approx h_k(x^0) + \nabla h_k(x^0) \delta x$   
 $x_i^l \leq x_i + \delta x \leq x_i^h$   
 여기서,  $\delta x = x - x^0$

본 알고리즘에서는 최적값이 설계공간에 놓여 있는, 구속 조건의 문제에서 수렴속도가 빠른 이유로 연속 선형 프로그래밍 기법을 사용했다.

## 4. 알고리즘의 소개

본 연구를 통해서 얻어진 전체적인 알고리즘을 Fig. 5과 같이 순서도 형식으로 나타내었다.

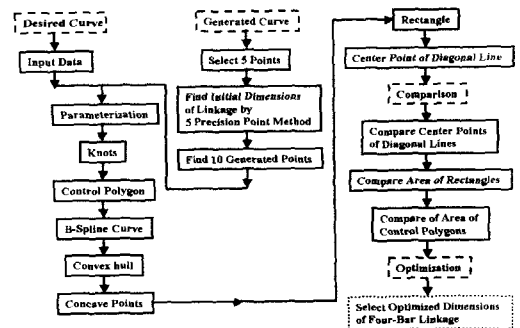


Fig. 5 The flow chart of the algorithm

## 5. 예 제

본 알고리즘을 통해 개발된 프로그램의 실효성을 검토하고자 본 연구에서는 세 가지의 서로 다른 커플러 곡선을 목표로 최적화된 4절 기구를 합성하였다. 여기서 Fig. 6-9의 모든 그림의 단위는 픽셀이고 생성 기구들은 크랭크각이 1라디안(radian)일 때의 모습이다. 각 그림에서 생성곡선과 목적 곡선, 그리고 각각의 경우의 조정다각형, 생성된 4절 기구들을 표현하였다. 위의 예제에서 보듯이 생성 곡선과 목적 곡선의 모양이 일치되는 것은 아니지만,

상당히 유사한 모양을 가진다는 것을 알 수 있다.

[예제 1]



Fig. 6 Desired and generated curve

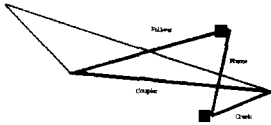


Fig. 7 Generated 4-bar linkage

[예제 2]



Fig. 8 Desired and generated curve

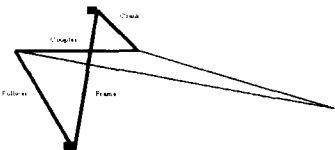


Fig. 9 Generated 4-bar linkage

## 6. 결과 및 고찰

본 연구에서는 4절 링크를 설계 합성하는데 있어서 각 링크 길이의 최적값을 구하고자 하였다. 이를 위해 이상적인 커플러 링크 운동이 그리는 궤적 곡선을 B-스플라인 보간법을 이용하여 이상 궤적 곡선에 대한 근사형의 조정 다각형을 형성케 하여 각 곡선들을 외접 사각형 비교 및 최소 볼록 집합을 이용하여 다각형 비교시 필요한 많은 곡선값들을 줄이고, 가장 유사한 형상의 곡선을 생성하도록 하였다. 또한 각 링크 길이를 ADS를 이용하여 최적화 할 때 초기값 설정을 5점 위치 지정 방법에 의거하여 간단화할 수 있는 알고리즘을 개발하였다. 본 연구를 통해 개발된 알고리즘은 선택된 예

제를 통해 충분히 실용성을 보였으며, 결과적으로 기존의 일부 길러보다 필요 정보량의 상당한 감소가 발생하였다. 또한 더 정밀한 생성 곡선을 생성케 하여 요구되는 커플러 궤적 곡선에 최대한 근접하는 곡선을 갖도록 함으로써 상대적으로 우수한 4절 기구를 설계할 수 있음을 보여 주었다. 향후 연구 과제로는 최적화를 위해 초기값을 지정하는 방법을 개선하여 좀더 간편하고 보다 더 정밀한 값을 갖도록 하여야 하며, 또한 목적 곡선의 곡률이 급격한 경우 이에 따른 조정 다각형의 형상이 급격하게 변하기 때문에 불안정한 생성 곡선이 발생할 우려가 있으나, 이는 향후 조정 다각형을 쓰지 않고 새로운 방법을 통하여 지속적으로 보완할 수 있다고 본다.

## 참고 문헌

1. Hrones, J., and Nelson, G., "Analysis of the Four-Bar Linkage ; It's Application to the Synthesis of Mechanisms," Technology press of MIT, 1951.
2. V. Unruh and P. Krishnaswami, "A Computer-Aided Design Technique for Semi-Automated Infinite Point Coupler Curve Synthesis of Four-Bar Linkages," J. of Mechanical Design, vol. 117, pp. 143-149, 1995.
3. Les Piegl, and Wayne Tiller, "The Nurbs Book," Monographs in Visual Communications, 1995.
4. G.N. Vanderplaats, "ADS - A FORTRAN Program for Automated Design Synthesis," NASA CR 172460, Oct. 1985.
5. Ferdinand Freudenstein, and George N. Sandor, "Synthesis of Path-Generating Mechanisms by means of a Programmed Digital Computer," J. of Engineering for Industry, vol. 81B, No. 2, pp. 159-168, May 1959.
6. S.N. Kramer, and G.N. Sandor, "Selective Precision Synthesis - A General Method of Optimization for Planar Mechanisms," J. of Engineering for Industry, pp. 689-701, 1975.
7. G. N. Sandor, and Arthur G. Erdman, "Advanced Mechanism Design ; Analysis and Synthesis Vol.2," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1984.