

# 스펙트럴요소법을 이용한 1차원 구조물 결합부의 규명

강태호\*, 이우식\*\*

## Identification of One-Dimensional Structural Joints Using Spectral Element Method

Taeho Kang\*, Usik Lee\*\*

### ABSTRACT

In this paper, a dynamic modeling approach is introduced to identify the dynamic characteristics of the structural/mechanical joints within an one-dimensional structure. A structural joint is represented by the four-pole parameters and the four-pole parameters are determined from the measured frequency response functions by using the spectral element method. As the illustrative examples, a cantilevered beam and a clamped-clamped beam, both consist of two beams connected by a bolted joint, are investigated to evaluate the present modeling approach. It is found that the dynamic responses predicted by using the identified four-pole parameters for the bolted joint are well agreed with the measured dynamic responses measured

**Key Words** : vibration (진동), four-pole parameters (4극 매개변수), structural joint (구조물 결합부), spectral element method (스펙트럴요소법), frequency response function (주파수 응답함수)

### 1. 서론

일반적으로 복잡한 구조물은 다양한 구조요소들의 결합으로 이루어진다. 구조물의 결합부는 볼트체결, 리벳이음, 용접등의 형태를 갖을 수 있다. 구조물의 동적특성을 예측할때에 이러한 결합부들을 어떻게 모델링하느냐에 따라서 예측결과가 크게 달라질 수 있다. 따라서, 보다 엄밀한 결합부에 대한 모델이 요구된다. 그러나, 결합부는 일반적으로 그 형태와 구조가 복잡하고 불분명하여 동특성의 규명이 어렵기 때문에 유한요소법과 같은 이론

적인 모델링기법을 단순 적용하는 것이 용이하지 않다. 그러므로 기존의 구조물에 대한 모델링을 실험적 기법과 결합하여 기계적 결합부의 모델링을 개선하는 방법들을 많이 사용하고 있다. 그러나, 이러한 방법도 실험기법이 복잡하거나, 결합부의 모델링에 가정이 필요한 경우가 많다. 또한, 가장 많이 사용되는 유한요소법을 이용하는 모델링기법은 고주파수에서의 정확도가 떨어진다. 따라서, 고주파수에서도 정확도를 확보할 수 있는 기계적 결합부에 대한 새로운 모델링기법의 개발이 필요하다.

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

Yuan과 Wu<sup>(1)</sup>는 유한요소법을 이용하여 구조물의 특성을 파악하는 방법을 제시하였다. 그러나 구조물의 수학적 모델을 구성하는 과정에서 먼저 계의 특성을 가정해야 하는 문제점을 갖고 있다. Tsai와 Chou<sup>(2)</sup>는 구조물을 부분구조로 나누고 부분구조와 전체구조의 주파수응답함수를 사용하여 결합부의 파라미터를 도출하는 방법을 연구하였다. Lin과 Ewins<sup>(3)</sup>은 진동실험에서 얻어진 주파수응답함수를 직접 사용해서 유한요소모델을 개선하는 방법을 제시하였다. Nobari 등<sup>(4)</sup>은 역고유감도법(inverse eigen sensitivity method)<sup>(5)</sup>을 유한요소모델의 결합부에 적용하였다. 이재운 등<sup>(6)</sup>은 결합부위에 대해 상세한 유한요소모델을 하고 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬을 구하여 결합부의 특성을 구하는 기법을 제시하였으며, 시상훈 등<sup>(7)</sup>은 실험에서 얻어진 FRF(주파수응답함수)를 이용한 반복계산을 통해 유한요소모델의 개선과 결합부 파라미터를 고찰하는 연구를 수행하였다.

지금까지의 많은 연구에서 사용되어온 유한요소법은 일반적으로 고주파수에서 신뢰성있는 결과를 제공하지 못한다. 유한요소법과는 달리 고주파수영역에서도 구조물의 동특성을 엄밀하게 제공하는 새로운 구조해석기법의 하나인 스펙트럴요소법(spectral element method)<sup>(8)</sup>이 최근에 개발되었다. 스펙트럴요소법에서는 구조동력학 방정식의 엄밀해인 탄성과동해를 주파수영역에서 중첩하여 엄밀한 동적응답을 유도하는 과정에서 고속푸리에변환(FFT)과 역고속푸리에변환(inverse FFT)을 효율적으로 활용함으로써 전산시간을 단축하는 장점도 갖고 있다. 스펙트럴요소는 주파수의 함수로 유도되기 때문에 주파수영역에서 측정되는 FRF와 결합하여 보다 용이하게 사용할 수 있는 장점이 기존의 유한요소모델에 근거한 방법들과 비교가 된다. 또한 기존의 규명기법들에서 실측된 제한된 모우드파라메

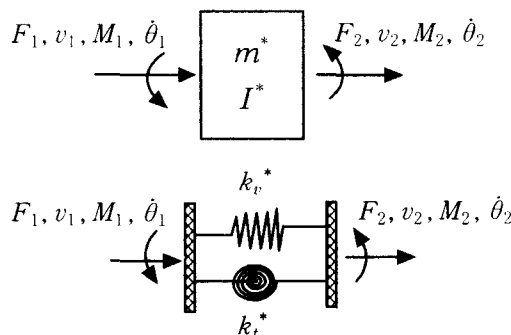


Fig. 2 Free body diagrams : (a) lumped mass, and (b) linear spring components

터만을 이용해야 하는 현실적인 어려움을 상당히 극복할 수 있는 장점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 (1) 스펙트럴 요소법을 적용한 기계적 결합부의 모델링 기법을 개발하고, (2) 주파수응답함수를 이용하여 결합부 파라미터를 규명하고, (3) 결정된 파라미터를 사용하여 이론해석적으로 구한 진동특성을 진동실험결과 및 결합부가 없는 보의 이론해석결과와 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검증하도록 하였다.

## 2. 기계적 결합부의 동적 모델링

4극 매개변수(four-pole parameters)<sup>(9)</sup>법을 이용한 임의의 계에 대한 동적 모델링은 Fig. 1과 같이 계의 양단에서 측정되는 임피던스(impedance:  $F/v$ )를 이용하여 다음과 같이 행렬식으로 구현된다.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

볼트등으로 체결된 보 구조물은 Fig. 2(a)와 2(b)에 나타난 바와 같이 등가질량과 등가강성이 직렬 연결된 2자유도계로 모델링할 수 있다. Fig. 2(a)의 등가질량  $m^*$ 에 대한 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2, F_1 - F_2 = m^* \frac{dv_1}{dt} = m^* \frac{dv_2}{dt} \\ \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta}_2, M_1 - M_2 = I^* \frac{d\dot{\theta}_1}{dt} = I^* \frac{d\dot{\theta}_2}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

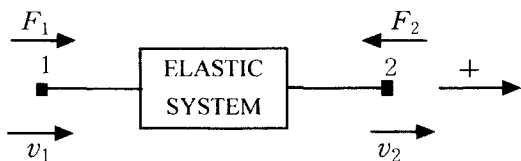


Fig. 1 Four-pole parameters representation of an elastic system

식(2)에서 변위와 외력등을 모두 조화함수로 가정하면 질량  $m^*$ 에 대하여 표현된 식(2)는 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \\ M_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i\omega m^* & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\omega I^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \\ M_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Fig. 2(b)의 등가강성  $k_v^*$ 와  $k_t^*$ 에 관한 관계식은 위의 유도과정과 마찬가지로 식(4)로써 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \\ M_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega/k_v^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega/k_t^* & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \\ M_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

결합부를 직렬 연결된 질량과 강성으로 표현하기 위해 행렬식(3)과 (4)를 곱하여 결합부 전체에 대한 요소행렬을 구성한다. 이를 스펙트럴 요소행렬과의 결합을 위하여 볼트결합부 양끝 절점에서의 힘과 변위와의 관계에 대하여 재구성하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t^* & 0 & -k_t^* & 0 \\ & k_v^* & 0 & -k_t^* \\ -k_v^* & 0 & \omega^2 m^* + k_v^* & 0 \\ 0 & -k_t^* & 0 & \omega^2 I^* + k_t^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서,  $v_1 = i\omega u_1$  이고  $v_2 = i\omega u_2$  이다.

식(5)는 4극 매개변수 방법에 의한 결합부의 동특성을 나타내는 결합부 요소행렬이며, 이 행렬은 스펙트럴 요소법에 의해 유도되는 결합부 주위 보의 요소행렬과 결합된다. 스펙트럴요소의 결합은 유한요소법에서 유한요소를 결합하는 방법과 동일하게 이루어진다<sup>(9)</sup>.

Fig. 3에 보인 보요소에 대한 스펙트럴요소행렬은 다음 관계식으로부터 유도된다.

$$\begin{Bmatrix} F_0 \\ M_0 \\ F_L \\ M_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ & sym & s_{33} & s_{34} \\ & & & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \\ v_L \\ \theta_L \end{Bmatrix} \quad (6)$$

스펙트럴요소행렬[S]의 성분은 파수  $k$ 의 함수로서 다음과 같이 주어진다[8].

$$\begin{aligned} s_{11} &= \xi (\sin kL \cdot \cosh kL + \cos kL \cdot \sinh kL) (kL)^3 \\ s_{12} &= \xi \sin kL \cdot \sinh kL (kL)^2 L \\ s_{13} &= -\xi (\sin kL + \sinh kL) (kL)^3 \\ s_{14} &= \xi (\cosh kL - \cos kL) (kL)^2 L \\ s_{22} &= \xi (\sin kL \cdot \cosh kL - \cos kL \cdot \sinh kL) kL^3 \\ s_{24} &= -\xi (\sin kL - \sinh kL) kL^3 \\ s_{23} &= -s_{14}, \quad s_{33} = s_{11} \\ s_{34} &= -s_{12}, \quad s_{44} = s_{22} \\ \xi &= (EI) / (L^3 z_0) \end{aligned}$$

### 3. 결합부의 동적 파라미터 결정

#### 3.1 외팔보의 경우

본 연구에서는 Fig. 4에 나타난 결합부를 포함하고 있는 보를 대상으로 수행되었으며 이를 예제로 다루어 결합부의 동특성을 나타내는 4개의 파라미터를 결정하는 과정을 설명한다. Fig. 4에 나타난 보는 중앙에 위치하는 결합부 요소 ③을 포함하는 4개의 요소로 나눌 수 있다. 주파수영역에서 입력(가진력)대 출력(진동량)의 비를 나타내는 주파수 응답함수를 사용하면 진동시스템의 고유특성을 보다 용이하게 표현할 수 있기 때문에, 가속도와 각가속도에 대한 FRF인 이너턴스(inertia)  $A$ 와 각가속도 이너턴스  $\alpha$ 를 사용한다.

$$\begin{aligned} A_i(\omega) &= -\omega^2 \frac{v_i}{P} \\ \alpha_i(\omega) &= -\omega^2 \frac{\theta_i}{P} \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에서 첨자  $i$ 는 노드점의 위치를 나타낸다. 요소 ①, ②, ④에 대한 오일러 보의 스펙트럴 요소행렬<sup>(9)</sup>과 식(5)에서 보여진 요소 ③에 대한 4극 매개변수 방법에 의한 결합부의 요소행렬을 결합하

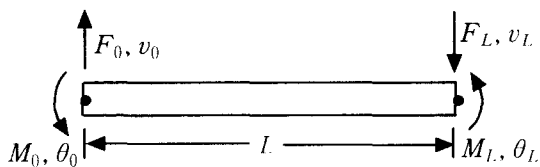


Fig. 3 Sign convention for a spectral beam element

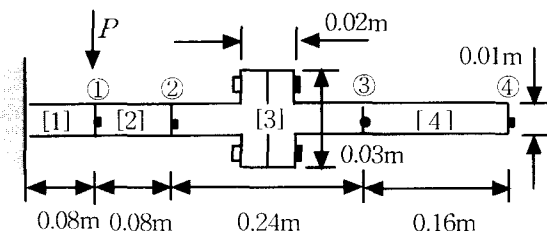


Fig. 4 A cantilevered beam with a bolted joint

여 전체계에 대한 스펙트럴요소행렬  $[S]$ 를 구성한다. 노드점 ①에서의 가진력  $P$ 로 구성된 외력벡터를 스펙트럴요소방정식에 대입한 후 실험을 통해 측정할 수 있는 측정자유도( $A_1, A_2, A_3, A_4$ )와 정확한 측정이 어렵거나 불가능하여 실험을 통해 직접 측정하지 않을 미측정자유도( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ )로 구분하여 스펙트럴요소방정식을 재구성하면 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,

$$\begin{aligned} V_1 &= \{A_1 \ A_2\}^T & V_2 &= \{A_3 \ A_4\}^T \\ V_3 &= \{\alpha_1 \ \alpha_2\}^T & V_4 &= \{\alpha_3 \ \alpha_4\}^T \\ F_1 &= \{0 \ 0\}^T & F_2 &= \{0 \ 0\}^T \\ F_3 &= \{1 \ 0\}^T & F_4 &= \{0 \ 0\}^T \end{aligned} \quad (9)$$

식(8)의 부행렬  $T_{ij}$ 는 참고문헌[10]에 소개되어 있다. 식(9)에서  $V_1$ 과  $V_2$ 는 측정자유도 벡터를 나

타내고  $V_3$ 와  $V_4$ 는 미측정자유도 벡터를 나타낸다.

미측정자유도 4개와 4개의 파라미터는 식(8)으로부터 구할 수 있다. 먼저 식(8)의 1행과 2행을 전개하면 모델링된 결합부의 동특성을 나타내는 4개의 파라미터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k_r^* &= \frac{s_{31}^2 A_1 + s_{32}^2 \alpha_1 + s_{33}^2 A_2 + s_{34}^2 \alpha_2}{A_3 - A_2} \\ k_t^* &= \frac{s_{41}^2 A_1 + s_{42}^2 \alpha_1 + s_{43}^2 A_2 + s_{44}^2 \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_2} \\ m^* &= \frac{k_r^*(A_2 - A_3) - s_{11}^4 A_3 + s_{12}^4 \alpha_3 + s_{13}^4 A_4 + s_{14}^4 \alpha_4}{\omega^2 A_3} \\ I^* &= \frac{k_t^*(\alpha_2 - \alpha_3) - s_{21}^4 A_3 + s_{22}^4 \alpha_3 + s_{23}^4 A_4 + s_{24}^4 \alpha_4}{\omega^2 \alpha_3} \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)으로 주어지는 4개의 결합부 파라미터가 모두 스펙트럴요소행렬의 성분  $s_{ij}$ 와  $A_i$  및  $\alpha_i$ 의 함수로 표현됨을 알 수 있다.

식(10)의 3행으로부터 미측정자유도  $V_3$ 는 측정자유도  $V_1$ 의 함수로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_3 = T_{33}^{-1} \cdot (F_3 - T_{31} V_1) \quad (11)$$

또한 식(8)의 4행으로부터 나머지 미측정자유도  $V_4$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$V_4 = -T_{44}^{-1} \cdot T_{42} V_2 \quad (12)$$

식(11)과 (12)로부터의 미측정자유도를 식 (10)에 대입하면 결합부 파라미터  $k_r^*, k_t^*, m^*$ 와  $I^*$ 를 모두 구할 수 있다. 이와같이 결정된 파라미터를 결합부의 동특성으로 이용하여 외팔보의 동적응답을 구할 수 있다.

### 3.2 양단고정보의 경우

Fig. 5와 같이 결합부를 포함한 보의 양단고정보형 태는 보를 5개의 요소로 분할한다. 외팔보에서 다루었던 방법에 따라 측정하는 자유도( $A_1, A_2, A_3, A_4$ )와 측정하지 않을 자유도( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ )로 구분하여 전체계에 대한 스펙트럴요소방정식을 재구성한다. 이로부터 결합부의 동특성을 나타내는 4개의 파라

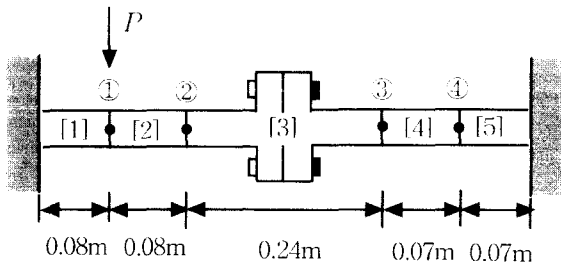


Fig. 5 A clamped-clamped beam with a bolted joint

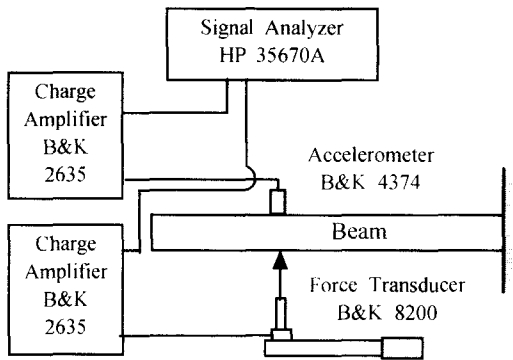


Fig. 6 Schematic of the experimental setup

Table 1 Material properties of beams

Young's modulus ( $E$ )	72 GPa
Structural damping ( $\eta$ )	0.001
Density ( $\rho$ )	$2.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

미터에 대한 식들을 얻을 수 있다. 외팔보에서와 같이 측정자유도를 이용하여 비측정자유도를 결정하면 4개의 결합부 파라미터를 구할 수 있다. 이를 결합부의 동특성으로 이용하여 양단고정보의 동적 응답을 구할 수 있다.

#### 4. 실험 및 검토

본 연구에서 수행한 실험구성은 Fig. 6에 나타내었다. 측정시편(Table 1)의 한쪽 끝을 바이스로 고정시킨 외팔보와 양단을 고정시킨 양단고정보의

신동실험을 수행하였다. 시편의 가진점과 측정점을 선동보드의 노드점이 아닌 곳으로 정하였고, 충격 망치로 시편을 가진하고 각 측정점에서의 진동량은 가속도계로 계측하여 신호분석기로 보내진다. 신호 분석기의 Time Capture기능을 사용하여 특정 샘플링 시간과, 샘플링갯수 조건하에서 해석에 필요한 가진력과 가속도의 시간응답을 얻었다<sup>(11)</sup>. 이렇게 얻어진 시간영역의 실험데이터는 Matlab의 FFT함수를 이용하여 주파수영역으로 변환시킨다. 주파수영역으로 변환된 실험데이터를 이용하여 미측정 자유도를 구한다. 이렇게 구한 가속도 이너턴스  $A_i$ 와 각가속도 이너턴스  $a_i$ 를 결합부의 동특성을 나타내는 파라미터의 관계식에 대입하여 주파수의 함수로 결정하였다.

Figs. 7, 8, 9은 각각 외팔보와 양단고정보의 경계조건하에서 진동실험에 의해 구해진 실험 FRF를 이용하여 구한 결합부의 각 파라미터, 즉 2개의 스프링 상수와 등가질량, 그리고 등가관성모우멘트를 나타낸다. Fig. 8과 Fig. 9에서 보면 같은 종류의 결합부임에도 결합부의 등가파라미터가 경계조건에 따라서 부분적으로 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. 이러한 차이는 외팔보 경계조건을 양단고정 경계조건으로 변환하기 위해 바이스로 한쪽 끝단을 고정시키는 과정에서 기존의 보의 상태가 변화할 수 있고 이러한 변화가 결합부에 영향을 주어 결합부 자체의 결합조건이 미세하게 변화했기 때문으로 판단된다. 본 연구에서 제시하는 결합부 규명기법은 현재 주어진 결합조건에 부합하는 등가파라미터를 제공하기 때문에 결합부의 미세한 변화에 따라 등가파라미터가 변화된 주파수 특성을 보일 수 있다. 일반적으로 구조시스템의 국부에 발생하는 미세한 변화는 국부영역의 특성크기(characteristic dimensions)보다 작은 파장에 해당하는 고주파에서는 그 영향이 민감하게 감지되나 국부영역의 특성크기보다 큰 파장에 해당하는 저주파에서는 상대적으로 적게 감지된다. 이러한 현상을 Fig. 8과 9에서 관찰할 수 있다. 즉 400Hz 이하에서는 두 보의 등가 물성치가 거의 일치하나 400Hz 이상의 고주파수에서는 상당한 차이가 있음을 관찰할 수 있다. Figs. 10과 11는 각각 외팔보와 양단고정보에 대해서 (1) 진동실험으로부터 구한 실험FRF, (2) 실험FRF로부터 결정된 결합부 파라미터를 이용하여 이론적으로 구한 이론FRF, (3) 결합부가 없는 보에 대한 이론적으로 구한 이론FRF를 나타낸다. 일반적으로 실험FRF

와 4극 매개변수 방법에 의한 결합부 모델링에 근거한 이론FRF가 잘 일치하고 있음을 알 수 있으나 결합부가 없는 보에 대한 이론FRF는 고주파영역으로 갈수록 다른 두 경우와 비교하여 점차 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. Figs. 13과 14에서와 같이 실험으로 구한 동적응답과 결정된 파라미터를 결합부의 동특성으로 이용하여 구한 각 경계조건에서의 동적응답이 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

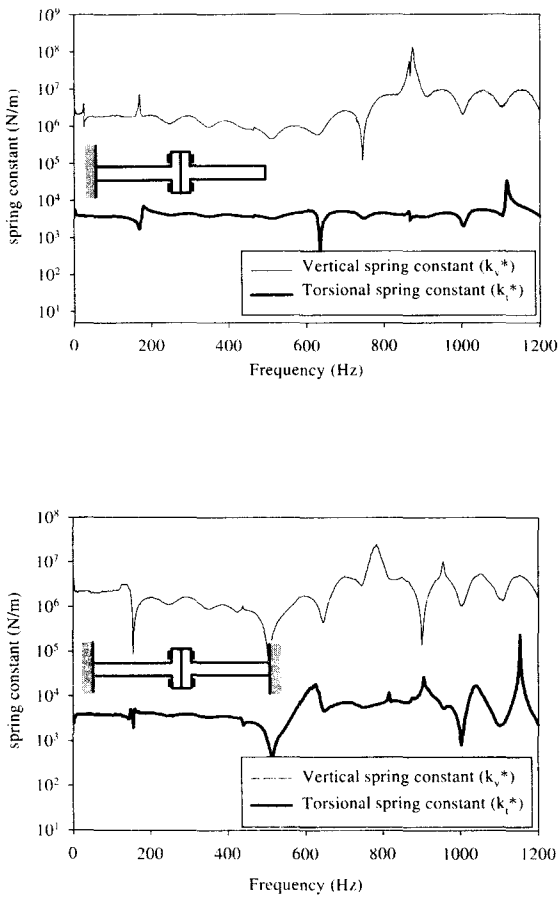


Fig. 7 Measured equivalent vertical and torsional spring constants for (a) the cantilevered beam, and (b) the clamped-clamped beam

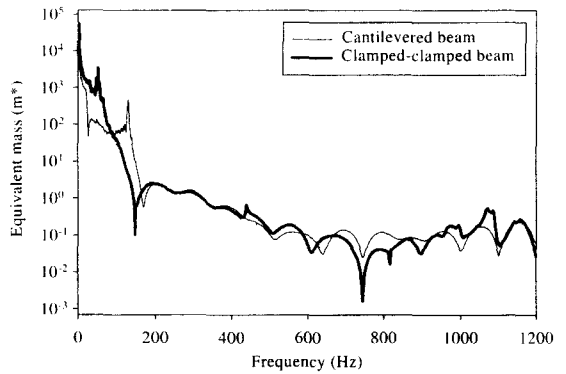


Fig. 8 Measured equivalent masses for the cantilevered and clamped-clamped beams

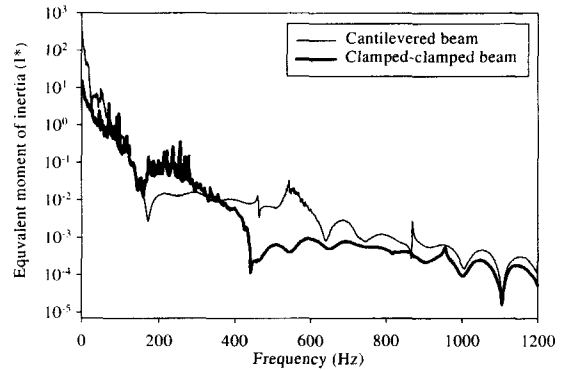


Fig. 9 Measured equivalent moments of inertia for the cantilevered and clamped-clamped beams

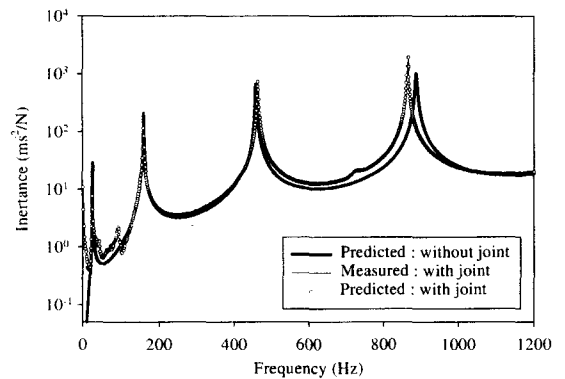


Fig. 10 Comparison of the frequency response functions for a cantilevered beam

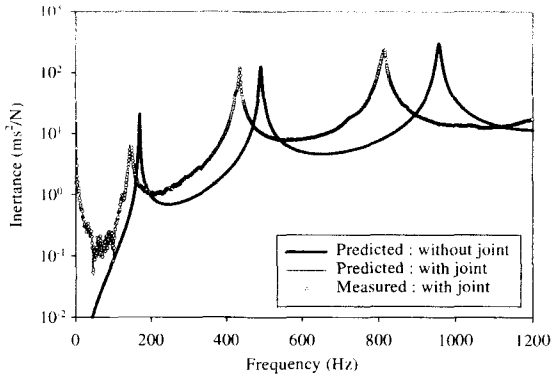


Fig. 11 Comparison of the frequency response functions for a clamped-clamped beam

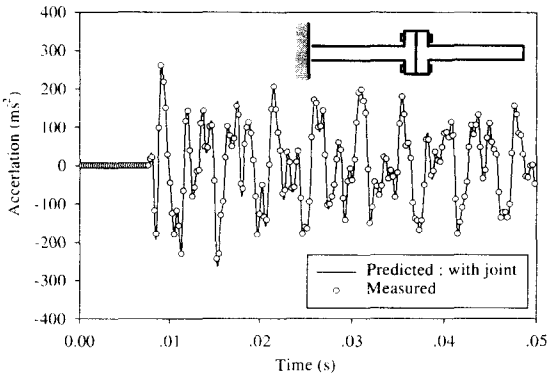


Fig. 12 Comparison of the dynamic responses for a cantilevered beam with a joint

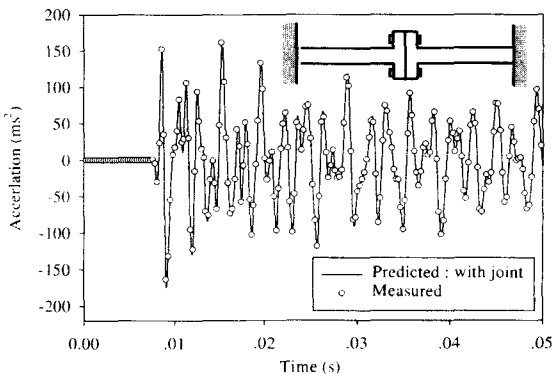


Fig. 13 Comparison of the dynamic responses for a clamped-clamped beam with a joint

## 5. 결 론

본 연구의 결과는 다음과 같다.

- (1) 본 연구에서는 스펙트럴요소와 측정된 주파수 응답함수를 이용하여 1차원 구조물의 결합부에 대한 동특성을 도출하기 위한 기법을 제시하였다.
- (2) 외팔보와 양단지지보를 대상으로 실험을 수행하였으며, 도출된 결합부 파라미터를 이용하여 예측한 진동특성이 실험치와 거의 유사한 결과를 주고 있음을 확인하였다.
- (3) 동일한 형태의 결합부임에도 경계조건 조성과정에서의 오류로 인해 결합부의 특성이 변화할 수 있는데 이러한 변화를 제거하여 결합부 본래의 특성을 도출하기 위한 연구가 현재 진행 중이다. 점차 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다.

## 참고문헌

1. Yuan, J. X. and Wu, X. M., "Identification of Joint Structural Parameters of Machine Tool by DDS and FEM," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 107, pp. 64~69., 1985.
2. Tsai, J. S. and Chou, Y. F., "The Identification of Dynamic Characteristics of a Single Bolt Joint," Journal of Sound and Vibration, Vol. 125, pp. 487~502., 1988.
3. Lin, R. M. and Ewins, D. J., "Model Updating Using FRF Data," International Seminar in Modal Analysis 15, pp. 141~163., 1990.
4. Nobari, A. S., Robb, D. A. and Ewins, D. J., "Model Updating and Joint Identification Methods, Restrictions and Overlap," International Journal of FEM and Experimental Modal Analysis, pp. 95~103., 1993.
5. Zhang, Q., Lallement, G., Fillod, R., and Piranda, J., "A Complete Procedure for the Adjustment of a Mathematical Model from Identified Complex Modes," Proceedings of IMAC 5, pp. 1183~1190., 1987.
6. 이재운, 고강호, 이수일, 이상무, "결합부가 있는 복합구조물의 동적해석," 한국소음진동공학회 '94추계학술대회논문집, pp. 238~243., 1994.

7. 서상훈, 지태한, 박영필, "주파수응답함수를 이용한 유한요소모델의 개선 및 결합부 동정," 한국소음진동공학회지, 제7권, 제1호, pp. 61~69., 1997.
8. Doyle, J. F., "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 3, No. 1, pp. 1~5., 1988.
9. Clark, S. K., Dynamics of Continuous Elements, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs., 1972.
10. 강태호, "스펙트럴요소법을 이용한 구조물결합부의 동적모델링," 석사학위논문, 인하대학교, 1999.
11. Ewins, D. J., Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press, London., 1986.